桁材フランジの塑性座屈実験*

林 毅**・浜中順一***・川島矩郎****

On the Plastic Buckling of Spar Flanges*

Tsuyoshi HAYASHI, Jun'ichi HAMANAKA
and Norio KAWASHIMA

Abstract

The compression tests of extruded 2024-ST₄Al "T" sections with various " b/t " and " l/b " are carried out in the plastic range. First, an investigation is made to ascertain the validity of various theories for the plastic buckling of compressed plates. The results obtained are in excellent agreement with the theory which is based on a deformation theory of plasticity. Moreover, "YAMAMOTO'S theory"¹⁾ of the flow type shows a fairly good agreement with the test results. Next, in this paper, so-called "DONNELL'S method" and "SOUTHMELL'S method" which gives experimentally the critical value of elastic plate buckling is extended to plastic plate buckling problems. The critical values experimentally decided by those methods and other methods are compared with the theoretical values.

1. 緒 言

航空機のスパーが外力によって曲げを受けると、スパー・キャップの1方は強い圧縮力をうける。したがって設計にあたってはスパー・キャップが座屈を起こさぬようにキャップの形状、寸法、小骨間隔等を決めねばならぬ。このための基礎的研究として材質 2024-ST₄ の T 型フランジを用いて塑性座屈実験を行なった。従来、塑性変形が十分進んだ所での座屈実験があまりなされていなかったが、この点を留意して広い歪み範囲にわたって実験を行なった。また平板の塑性域における座屈点を実験結果から決定する方法として、弾性の場合と同様に SOUTHMELL の方法、DONNELL の方法が有効であることを新たに指摘した。また実験結果を従来の諸理論と比較した結果、STOWELL の理論¹⁾ 等変形理論によるものがよく実験値を説明しており、流理論でも山本の理論²⁾ がかなり実験結果とあうことが分かった。

2. 記 号

p, p_y	平均圧縮応力, 降伏点における平均圧縮応力
$\varepsilon, \varepsilon_y$	平均圧縮歪み, 降伏点における平均圧縮歪み
E	YOUNG'S modulus
E_t	Tangent modulus
E_s	Secant modulus
w	板の撓み
w_0	板の初期撓み
w_y	板の降伏点における撓み
δ	板の付加撓み
w^*, p^*	十分塑性変形が進んだある状態における撓み, 平均圧縮応力
D	板の曲げ剛性
p_{cr}	座屈応力

3. 実験の概要

3.1 試験片 実験には、材質 2024-ST₄ の T 形断面押し出し材を試験片として用いた。断面形を第 1 図に示す。

寸法を決定するにあたっては、まず各フランジが板として壁面座屈するように l/b を決め座屈が塑性域で起こるように t/b を決めた。寸法および試験片番号

第 1 図 試験片

* 昭和 41 年 12 月 28 日原稿受理

** 東京大学工学部

*** 石川島播磨重工業株式会社

**** 航空宇宙技術研究所

第1表 試験片の寸法

l/b	l/b	t mm	b mm	e mm	試験片番号	個数
$\frac{1}{8}$	1.5	4	32	48	Ta ₁	3
	3.0	4	32	96	Ta ₂	3
	4.5	4	32	144	Ta ₃	3
	6.0	4	32	192	Ta ₄	3
$\frac{1}{10}$	1.5	4	40	60	Tb ₁	3
	3.0	4	40	120	Tb ₂	3
	4.5	4	40	180	Tb ₃	3
$\frac{3}{37.5}$	1.4	3	37.5	54	Tc ₁	3
	2.4	3	37.5	90	Tc ₁	3

を第1表に示す。

3.2 応力-歪み曲線 引っ張り試験および圧縮試験によって応力-歪み曲線を得た。引っ張り試験ではマルテンス伸び計を用いて測定し、圧縮試験では wire strain gauge を使った。試験片は各3個について行ない、後の計算には、圧縮試験によるものを用いた。結果を第2図に示す。これよりヤング率 $E \approx 7,200 \text{ kg/mm}^2$ 、0.2% 耐力 $P_2 \approx 35 \text{ kg/mm}^2$ を得た。

第2図 応力-歪み曲線

3.3 実験装置および実験方法 試験機は最小2 ton range の油圧式 100 ton 万能試験機を用いた。実験を完全固定の条件で行なうため、第3図に示すような固定治具を使用した。

荷重を負荷する際、特に応力の一様性に留意して歪みがほぼ一樣になるまで数回予備テストを行なった。歪み分布が一樣になったところで、荷重を増しながら歪みおよびスパン中央の撓みを測定した。歪みゲージ貼付位置およびダイヤル・ゲージ測定位置を第4図に示す。なお試験機端部間の接近量もダイヤル・ゲージで測定した。

4. 塑性座屈値の実験的決定法

平板の塑性域における座屈値を実験結果から決定する方法として、圧縮歪み-撓み曲線の折れ曲がり点、

第3図 固定治具

STRAIN GAUGE

DIAL GAUGE

第4図 歪みゲージ貼り付け位置およびダイヤル・ゲージ測定位置

荷重-撓み曲線の折れ曲がり点、表裏の歪みの分岐点、最高荷重をとる方法等があるが、いずれも理論的根拠は明確でない。ここでは塑性座屈の場合も、弾性座屈の場合と同様に、SOUTHWELLの方法、DONNELLの方法に相当する座屈値決定法が有効であることを述べる。

4.1 ϵ - δ^2 法 この方法は藤田⁴⁾によって提案されたもので、座屈後圧縮歪み ϵ と撓みの2乗 δ^2 とは近似的に線形関係にあるという結果を用いる。

4.2 Donnell の方法 以下の記述にあたってはつぎのことがらを仮定する。

1. 初期撓みが存在するとするが、これは微小とする。
2. 座屈が起こるまでは、近似的に一軸応力状態にあるとする。すなわち p を平均圧縮応力とすると、

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(-p, 0, \dots, 0)$$

3. 平均圧縮歪み ϵ と p との関係を第5図の如く折れ線タイプと仮定する。
ここで平均圧縮応力-撓み曲線を第6図に示す。

第5図 p - ϵ 曲線

以上を仮定すると座屈点の近傍で DONNELL の方法を塑性域に拡張した次式が成り立つ。

$$\epsilon_{cr} - \epsilon = w_Y \cdot \left(\frac{\epsilon - \epsilon_Y}{\delta} \right) \quad (1)$$

ここで ϵ_{cr} は座屈歪み、 ϵ_Y は降伏歪み、 w_Y は降伏時の撓み、 δ は付加撓みを表わす。すなわち ϵ と $(\epsilon - \epsilon_Y)/\delta$ が近似的に線型関係にある。以下 (1) 式の証明を試みる。

4.2.1 四辺単純支持矩形板の場合 初期撓みを w_0 とすると、弾性範囲において撓み w の満たすべき式は

$$D \cdot \left[\frac{\partial^4(w - w_0)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4(w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(w - w_0)}{\partial y^4} \right] = -p t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2)$$

p が p_Y を越えると、剛性が下がり (2) 式の D に

第6図 p - w 曲線

相当する量が変わる。このとき撓み増分 dw の満たすべき式は

$$D_x \frac{\partial^4 dw}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 dw}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 dw}{\partial y^4} = -t \left(dp \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

ここで境界条件を満たす撓み w 、初期撓み w_0 を $w = W \cdot \sin(\pi x/\lambda) \cdot \sin(\pi y/b)$
 $w_0 = W_0 \cdot \sin(\pi x/\lambda) \cdot \sin(\pi y/b)$ ただし $\lambda = a/n$ } (4)

と仮定し、 D_x 、 D_y 、 D_{xy} が板の面内で一定値をとるものとする (3) 式は

$$\left[D_x \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 + 2 D_{xy} + D_y \left(\frac{\lambda}{b} \right)^2 - p t \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \right] dW = d p t \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 W \quad (5)$$

となる。ここで λ は近似的に弾性座屈の波形が成長すると考えてよい。

(1) 流理論による (1) 式の誘導 今塑性変形が十分進んでいるときには近似的に

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_x &= \frac{E_t}{1-\nu^2} (d\epsilon_x + \nu d\epsilon_y) \\ d\sigma_y &= \frac{E_t}{1-\nu^2} (d\epsilon_y + \nu d\epsilon_x) \\ d\tau &= \frac{E_t}{2(1+\nu)} d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

が成り立つ⁵⁾。すると (5) 式における D_x 、 D_{xy} 、 D_y は

$$D_x = D_y = D_{xy} = \left(\frac{E_t \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \right) \quad (7)$$

となる。今

$$D_t = \frac{E_t \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}, p_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot D_t}{b^2 \cdot t} \left[\left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 + 2 + \left(\frac{\lambda}{b} \right)^2 \right] \quad (8)$$

と置く (5) 式は次式の如く変形される。

$$\frac{dW}{W} = \frac{dp}{p_{cr} - p} \quad (9)$$

今十分塑性変形が進行したある状態を (p^*, w^*) とすると (9) 式を積分して、 $p^* < p_{cr}$, $p < p_{cr}$ より

$$W = W^* \cdot \frac{p^* - p_{cr}}{p - p_{cr}} \quad (10)$$

今付加撓みを δ とすると近似的に次式が成り立つ。

$$\delta = W^* \cdot \frac{p^* - p}{p - p_{cr}} \quad (11)$$

また $p^* \doteq p_r$, $W^* \doteq W_r$, $dp \doteq E_t \cdot d\varepsilon$ と仮定すると上式は

$$\varepsilon_{cr} - \varepsilon = W_r \cdot \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\delta} \right) \quad (12)$$

となり、(1) 式が証明された。

(2) 変形理論による (1) 式の誘導 応力-歪み関係は

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_x &= \frac{4E_s}{3} \left(1 - \frac{3K}{4} \right) d\varepsilon_x + \frac{2}{3} E_s d\varepsilon_y \\ d\sigma_y &= \frac{2E_s}{3} d\varepsilon_x + \frac{4}{3} E_s d\varepsilon_y \\ d\tau_{xy} &= \frac{1}{3} E_s d\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{ただし } K = 1 - E_t/E_s, D_s = E_s \cdot t^3/9$$

となる。すると D_x , D_{xy} , D_y なる量は次式で与えられる。

$$D_x = D_s \left(1 - \frac{3K}{4} \right), D_{xy} = D_s, D_y = D_s \quad (14)$$

初期撓みがない場合は、 p_{cr} は (5) 式で $dp=0$ として

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 D_s}{b^2 t} \left[\left(1 - \frac{3K}{4} \right) \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 + 2 + \left(\frac{\lambda}{b} \right)^2 \right] \quad (15)$$

となる。一方初期撓みがある場合には

$$\left\{ \frac{\pi^2 D_s}{b^2 t} \left[\left(1 - \frac{3K}{4} \right) \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 + 2 + \left(\frac{\lambda}{b} \right)^2 \right] - p \right\} dW = W dp \quad (16)$$

となる。今

$$p_{cr} = \frac{D_s}{t} \cdot \frac{\iint [(1-3K/4)(\partial^2 w/\partial x^2)^2 + (\partial^2 w/\partial x \partial y)^2 + \partial^2 w/\partial y^2 \cdot \partial^2 w/\partial x^2 + (\partial^2 w/\partial y^2)^2] dx dy}{\iint (\partial w/\partial x)^2 dx dy} \quad (17)$$

$$f(p) = \frac{\pi^2 D_s(p)}{b^2 t} \left[\left(1 - \frac{3K(p)}{4} \right) \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 + 2 + \left(\frac{\lambda}{b} \right)^2 \right] \quad (17)$$

とおくと (16) 式は

$$\frac{dp}{f(p) - p} = \frac{dW}{W} \quad (18)$$

となる。今変形の十分進んだ状態を考えると

$$\frac{df(p)}{f(p_{cr})} \ll \frac{dp}{p_{cr}} \quad (19)$$

したがって座屈点の近傍では近似的に

$$f(p) \doteq p_{cr} \quad (20)$$

と考えてよい。すると (18) 式は

$$\frac{dp}{p_{cr} - p} = \frac{dW}{W} \quad (21)$$

以下前節と同様にして (1) 式が導かれる。

4.2.2 他の境界条件の場合

(1) 流理論による (1) 式の誘導 (3) 式を EULER の方程式とするような積分表示 Π を求めると

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{D_t}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad \times dx dy - \frac{1}{2} \iint p \cdot t \left(\frac{\partial dw}{\partial x} \right)^2 dx dy \\ &\quad - \iint dp \cdot t \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial dw}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned} \quad (22)$$

ここで例えば、荷重辺支持、非荷重辺固定の板では

$$w = W/2 \cdot \sin(\pi x/a) \cdot [1 - \cos(2\pi y/b)] \quad (23)$$

荷重辺固定、非荷重辺 1 辺自由 1 辺支持の板では

$$w = W/2 \cdot y/b \cdot [1 - \cos(2\pi y/b)] \quad (24)$$

なる撓み形を (22) 式に代入して

$$\frac{\partial \Pi}{\partial (dW)} = 0 \quad (25)$$

とおけば、以下前節と全く同様にして (1) 式が導かれる。

(2) 変形理論による (1) 式の誘導 (22) 式に相当する積分表示式は

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{D_s}{2} \iint \left[\left(1 - \frac{3K}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint p t \left(\frac{\partial dw}{\partial x} \right)^2 dx dy \\ &\quad - \iint dp \cdot t \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial dw}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned} \quad (26)$$

となる。1 方初期撓みがない場合の座屈荷重は

$$p_{cr} = \frac{D_s}{t} \cdot \frac{\iint [(1-3K/4)(\partial^2 w/\partial x^2)^2 + (\partial^2 w/\partial x \partial y)^2 + \partial^2 w/\partial y^2 \cdot \partial^2 w/\partial x^2 + (\partial^2 w/\partial y^2)^2] dx dy}{\iint (\partial w/\partial x)^2 dx dy} \quad (27)$$

なる式に (23), (24) 式等を代入すれば求まる。さらに (26) 式に (23), (24) 式等を代入すれば

$$\frac{\partial \Pi}{\partial (dW)} = 0 \quad (28)$$

より前節と同様にして (1) 式が導かれる。

以上より DONNELL の方法を用いれば、実験結果を、 ϵ と $(\epsilon - \epsilon_Y)/\delta$ の関係で整理し、その直線部分の切片として ϵ_{cr} が決定できることがわかった。

4.3 SOUTHWELL の方法 (1) 式を変形すると

$$\epsilon(\delta + W_Y) = \epsilon_{cr} \cdot \delta + W_Y \cdot \epsilon_Y \quad (29)$$

となる。したがって実験結果を $\epsilon(\delta + W_Y)$ と δ で整理すれば、直線部分のこう配として ϵ_{cr} が決定される。

例を試験片 Tb₃ の 1 にとる。まず、荷重—撓み曲線を第 7 図に、荷重—歪み曲線を第 8 図に示す。

この実験結果をもとに、DONNELL の方法、SOUTHWELL の方法を適用した結果を第 9 図、第 10 図に示す。

第 7 図 荷重—撓み曲線

第 8 図 荷重—歪み曲線

第 9 図 DONNELL の方法

第 10 図 SOUTHWELL の方法

5. 実験値の整理および諸理論との比較

5.1 実験値の整理 座屈点を種々の方法で決定した結果を第 2 表に示す。ここで P_d は DONNELL の方法、 P_s は SOUTHWELL の方法、 P_m は最高荷重、 P_e は表裏の歪みの分岐する点、 P_b は荷重—撓み曲線

第 2 表 実験値 1 覧表

試験片番号	断面積 mm ²	P_s ton	P_d ton	P_m ton	P_b ton	P_e ton	$P_{t,s}$ ton	$P_{t,y}$ ton
Ta ₁ の 2	376.0	16.3	16.2	16.6	16.0	16.0	16.0	15.0
Ta ₂ の 2	376.4	15.5	15.4	15.8	15.0	15.5	15.1	13.6
Ta ₃ の 1	376.8	15.2	15.1	15.4	14.0	15.1	14.3	12.4
Tb ₁ の 1	472.4	19.0	18.9	19.3	18.5	18.3	19.2	18.0
Tb ₂ の 2	484.2	17.3	17.2	17.6	17.0	16.5	18.6	16.2
Tb ₃ の 1	472.0	15.0	14.9	15.2	14.0	14.0	15.9	14.2
Tc ₁ の 3	333.7	11.5	11.4	11.7	11.0	10.5	13.2	11.7
Tc ₂ の 2	333.3	11.2	11.1	11.3	10.5	10.0	11.5	10.2

の折れ曲がる点等によって決めた座屈荷重である。

また座屈値を縦軸に、 $(p_{cr})_{elastic}/E$ を横軸にとってプロットした図を第11図に、 l/b を横軸にとってプロットした図を第12図に示す。

第11図 実験値と理論値との比較

第12図 p_{cr} の l/b による変化

5.2 諸理論との比較 広く知られているように、変形理論に基づいた座屈理論¹⁾は良く実験と合うが、流理論に基づいた PRAGER²⁾, PEARSON³⁾らの理論は実験とかけはなれた値を示す。流理論に基づいたものでも、初期不整を考慮に入れた山本の理論⁵⁾は比較的良く合うようである。

(1) GERARD の提案式

$$\frac{(p_{cr})_{plastic}}{(p_{cr})_{elastic}} = \frac{E_s}{E} \quad (30)$$

(2) STOWELL の理論

$$(p_{cr})_{plastic} = \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left[\frac{\pi^2}{9} (E_s + 3E_t) \left(\frac{b}{l}\right)^2 + \frac{E_s}{3} \right] \quad (31)$$

(3) 山本の理論

$$\frac{(p_{cr})_{plastic}}{(p_{cr})_{elastic}} = \frac{E_t}{E} \quad (32)$$

または

$$\frac{(p_{cr})_{plastic}}{(p_{cr})_{elastic}} = \frac{4}{(\sqrt{E/E_t} + 1)^2} \quad (33)$$

ここで STOWELL の理論は塑性変形が十分進んでいるとき、または荷重辺が支持に近い場合は GERARD の式と一致する。(30), (32), (33) による計算値を第11図に実線で示す。

6. 結 言

以上の実験を終わってつぎのことがらが明らかになった。

(1) 従来弾性座屈のみにしか用いられなかった DONNELL の方法, SOUTHWELL の方法が塑性座屈の場合でも有効であることが分かった。細かい注意としては、上記いずれの方法も撓みが反転する場合には使えない。また最初から曲げのはげしく入る場合や、座屈後の部分等では実験点は直線からはずれる。

(2) 理論としては、よく言われるように塑性変形理論によるものがよく実験と合うようである。ただし流理論でも山本による理論は良好な結果を得た。

(3) 実験にあたっては、歪みの一様性に十分気をつけながら実験を行わないと良い結果が得られない。今後は、フランジの背面に外板をはるなど、構造物としての実験が望ましい。

参考文献

- 1) STOWELL, E.: A Unified theory of Plastic Buckling of Columns and Plates, NACA, T.N. 1556, (1948/4).
- 2) HANDELMAN, G., PRAGER, W.: Plastic Buckling of a Rectangular Plates under Edge Thrusts, NACA, T.N. 1530, (1948/8).
- 3) PEARSON, C.: Bifurcation Criterion and Plastic Buckling of Plates and Columns, J. Aero. Sci., Vol. 17, No. 7, (1950/7), p. 417.
- 4) 藤田譲, 吉田宏一: 平板の塑性座屈値決定の為の一方法, 座屈委員会報告, 昭40年, 4月.
- 5) YAMAMOTO, Y.: A General Theory of Plastic Buckling of Plates, 造船協会論文集, 96号, 昭30年, 2月.