技 術 論 文

一部電離した気体中の衝撃波を横切る荷電粒子のふるまい*

神 元 五 郎**・西 田 迪 雄**・吉 田 一 彬***

The Behaviour of the Charged Particles Across a Shock Wave in a Partially Ionized Gas

Goro KAMIMOTO, Michio NISHIDA and Kazuakira YOSHIDA

Abstract

The electron temperature and the ion density across the normal shock wave in the nonequilibrium, weakly ionized argon were measured by means of the LANGMUIR probe technique at Mach numbers of 4.17, 4.39 and 4.88. The electron temperature distribution across the shock in a nonequilibrium weakly ionized gas was calculated using the NAVIER-STOKES equation and it was found that the existence of the broad thermal layer of the elevated electron temperature was determined by Mach number and the degree of the nonequilibrium. Calculations were in fairly good agreement with experimental results, excepting the case where the degree of the nonequilibrium was great.

Considering the decay of the free-stream ion density, the ion density distribution across the shock was calculated using the MOTT-SMITH's solution for the neutral shock, and it was shown that the ion density decrease due to chemical reaction, diffusion, etc. in the free stream had great influence on it. These calculations agreed well with the experimental results, especially in the density ratio, and these agreements confirmed the above influence.

1. 緒 言

種々の気体の衝撃波の構造が、いくつかの測定法で調べられてきた。最も初期の測定は、自由分子探針法^{1),2)}および光学反射法³⁾でおこなわれた。これら二方法による結果は、理論と比較されており、弱い衝撃波 ($M < 2$) に対して測定された衝撃厚みは、NAVIER-STOKES 理論で予言される値に、良く一致している。しかし、マッハ数 2 以上では、実験と NAVIER-STOKES 理論の両方から求めた衝撃厚みは、明らかに異なって、

おり、密度厚さは、NAVIER-STOKES 理論から求めた値より 50% 大きい。一方、高いマッハ数では測定した厚み⁴⁾は、MOTT-SMITH⁵⁾や MUCKENFUSS^{6),7)}らの理論と良く一致している。最近では、電子銃を用いて、衝撃波の構造が調べられており、理論と良く一致することが報告されている⁸⁾⁻¹¹⁾。

しかし、すべてこれらは、中性粒子気体における測定であり、衝撃波による電離、あるいは、電離気体中の衝撃波の構造については考えていない。しかし、電離気体についての研究は、宇宙物理、あるいは再突入問題にとって重要であり、特に再突入問題、およびそれに関する実験室内実験では、一部電離した非平衡流を考えるのが実際的である。最近では電離気体についての研究が、活発におこなわれているが、電離気体における衝撃波の構造についての実験的研究は、まだおこなわれていない。

このような観点から、われわれは、一部電離した非平衡流の衝撃波の構造を、マッハ数 4.17, 4.39, および 4.88 の場合について、ラングミュア・プローブを用いて実験的に研究した。現在の実験におけるわれわれの主な目的は、一部電離した気体中の衝撃波を横切る荷電粒子のふるまいを知ることである。

さて、電離気体における衝撃波についての理論的研究は、多く報告されている¹²⁾⁻¹⁹⁾。JUKES¹²⁾, SHAFRANOV¹³⁾ および JAFFRIN and PROBST¹⁴⁾は、NAVIER-STOKES 方程式を用いて、完全電離気体における衝撃波の構造を調べ、衝撃波面の前方に、電子温度が、徐々に上昇する比較的広い領域を見出ししている。TIDMAN¹⁵⁾, GREENBERG and TREVE¹⁶⁾, および COMISAR¹⁷⁾は、イオンは、MOTT-SMITH 分布に従い、電子は、局所マクスウェル分布をすると考える FOKKER-PLANCK 方程式を用いて衝撃波について研究したが、電子の熱伝導率を無視したため、電離気体における衝撃波の本質的構造については、明らかにしていない。

* 昭和 42 年 4 月 7 日 第 15 回航空学会年会において講演、昭和 42 年 6 月 5 日原稿受理

** 京都大学工学部航空工学教室

*** 三菱重工業株式会社

上述の研究は、すべて完全電離気体の場合であり、一部電離した気体の衝撃波の研究は、JAFFRIN¹⁸⁾ および GREWAL and TALBOT¹⁹⁾ らが行なっているのみである。これら二つの研究では、衝撃波を横切って、凍結流、および準電荷中性が仮定されている。JAFFRIN¹⁸⁾ は、原子、イオン、および電子に対して、NAVIER-STOKES 方程式を用いて、衝撃波の構造を調べた。GREWAL and TALBOT¹⁹⁾ は、荷電粒子に対して、MOTT-SMITH 解が適用できると考えて、電子温度分布だけを求めた。また、かれらは、非平衡の場合にまで言及しているが、自由流の電子温度が、イオン（または原子）温度に比べ、非常に高い場合については、取り扱っていない。われわれは、このような場合にまで、計算を拡張して、電子温度分布を求めた。

上述の文献では、化学反応（再結合または電離）は、凍結流の仮定の下に、省略されている。しかし、現在の実験条件では、これらの効果、特に再結合、または拡散などによるイオン（または電子）密度の減少を考える必要があり、われわれは、原子衝撃を横切るイオン密度分布を、これらの効果を考慮して、理論的に求め、実験と比較した。

2. 理論解析

2.1 衝撃波を横切る電子温度分布 第1章で述べたように、一部電離した気体の衝撃波の構造は、JAFFRIN¹⁸⁾、および GREWAL and TALBOT¹⁹⁾ らによって研究された。かれらは、衝撃波の上流に、電子とイオン（または原子）との間に、熱平衡がある場合を取り扱い、衝撃波の前方に、電子温度が上昇する広い熱層領域の存在することを見出した。特に、GREWAL and TALBOT は、また、電子温度が、自由流のイオン—原子温度と異なる場合を取り扱った。しかし、かれらは、完全電離気体の場合の電子の輸送係数を用いており、緩和効果による電子温度の降下が、衝撃による圧縮加熱効果による上昇と釣り合い、電子温度勾配が、衝撃波の前方でゼロになる場合で、しかも、衝撃波上流の電子温度が、衝撃波下流の原子温度より低い場合のみを取り扱っている。

われわれは、電子温度が、衝撃波下流の原子温度より高い場合についても研究し、衝撃波を横切る電子温度の分布形を見つけた。簡単のため、つぎの仮定を置く。

(1) 凍結流：化学反応（電離および再結合）は起こらない。

(2) 準電荷中性：電荷の分離は起こらない。この条件は、デバイ長が平均自由行程より短いときに満足され、ほとんどのプラズマに対して、この仮定は成り

立つ。

(3) 外部からの電磁場はない。

(4) 気体は一部電離している：電離度は、1 に比べて非常に小さい。したがって、原子気体は、電子気体の影響を受けない。

(5) 電子と原子との質量比 $\varepsilon^2 = m_e/m_a$ は非常に小さく、オーダー ε および ε^2 の項は1 に比べて無視できる。

2.1.1 基礎方程式 気体は $-\infty$ から $+\infty$ まで、 z 軸に沿って流れ、 $z=0$ は原子衝撃の中心とする。化学反応、輻射、外部からの電磁場の影響のない場合の一次元定常流の電子のエネルギー方程式は、つぎのように書かれる¹⁸⁾⁻²⁰⁾。

$$\frac{3}{2} n_e u_e k \frac{dT_e}{dz} + n_e k T_e \frac{du_e}{dz} - \frac{d}{dz} \left(\kappa_e \frac{dT_e}{dz} \right) = R_{ea} + R_{ei} \quad (1)$$

ここで、 n , T , u は、それぞれ数密度、温度、および速度を、 k はボルツマン定数、 κ_e は電子の熱伝導率を表わす。また、 R_{jk} は、 k —粒子から j —粒子への弾性衝突による単位体積当たりのエネルギー移動速度を表わし、添字 i, e および a は、それぞれ、イオン、電子、原子を意味する。(1)式において、粘性項、および非弾性衝突によるエネルギー交換の項は、仮定(1)および(5)に基づき、省略されている。

電子の熱伝導率、およびエネルギー移動速度はつぎのように書かれる¹⁸⁾。

$$\begin{aligned} \kappa_e &= 75 \left(\frac{\pi k T_e}{m_e} \right)^{1/2} k \left[64 Q_{ee} (1 + \sqrt{2}) \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ 1 + \frac{n_a Q_{ea}}{(1 + \sqrt{2}) n_e Q_{ee}} \right\} \right]^{-1} \quad (2) \\ R_{ea} + R_{ei} &= -8 \sqrt{2} n_e \left(\frac{m_e k T_e}{\pi} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \frac{k(T_e - T_a)}{m_a} (n_a Q_{ea} + n_e Q_{ei}) \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 m は粒子質量、 Q_{jk} は j —粒子と k —粒子に対する衝突断面積である。仮定(2), (5) および z 方向の電流がゼロであるという条件から、 $u_a = u_i = u_e$ 、および $T_a = T_i$ である。

$n_a Q_{ea}/n_e Q_{ei} \ll 1$ の場合を考える。これは、電子—イオン衝突が、電子—原子衝突より支配的になる場合で、われわれの実験条件がこの場合にあてはまる。すなわち、

$$\frac{n_a Q_{ea}}{n_e Q_{ei}} = O(10^{-2}) \ll 1$$

このような場合には、(2), (3) 式はつぎのようになる。

$$\kappa_e = 75 \left(\frac{\pi k T_e}{m_e} \right)^{1/2} k \{ 64 (1 + \sqrt{2}) Q_{ee} \}^{-1}$$

(2')

$$R_{ee} + R_{ei} = -8\sqrt{2} n_e^2 \left(\frac{m_e k T_e}{\pi} \right)^{1/2}$$

$$\times \frac{(T_e - T_a) k Q_{ei}}{m_a} \quad (3')$$

ここで, Q_{ei} , Q_{ee} はクーロン断面積で, つぎのように書かれる²¹⁾.

$$Q_{ei} = Q_{ee} = \frac{\pi e^4 \log_e A_e}{2(kT_e)^2} \quad (4)$$

ただし, A_e は次式で表される²²⁾.

$$A_e = \frac{3}{2} \left(\frac{k^3 T_e^3}{\pi n_e} \right)^{1/2} \frac{1}{e^3}$$

$\log_e A_e$ は温度, 密度の変化に対して鈍感であるので, (4)式では一定と考える.

さて, つぎの無次元量でもって, (1)式を無次元化する.

$$\left. \begin{aligned} T_e' &= \frac{T_e}{T_{e0}}, \quad T_i' = \frac{T_i}{T_{e0}} \left(= \frac{T_a}{T_{e0}} = T_a' \right) \\ u_e' &= \frac{u_e}{u_1}, \quad z_s = \frac{z}{\delta}, \quad Q_{ei}' = \frac{Q_{ei}}{Q_{ei0}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで, 添字 0 は, 衝撃波の上流側の基準量を, また 1 は衝撃波の無限上流の量を表す. また δ は, 熱層の厚さのオーダーをもつ基準長さである. (5)式の無次元量でもって, (1)式を書き直すと

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{dT_e'}{dz_s} + \frac{T_e'}{u_e'} \frac{du_e'}{dz_s} - \frac{75}{64(1+\sqrt{2})} \\ & \times \left\{ \frac{6\pi}{5(\alpha + T_{i0}')} \right\}^{1/2} \frac{l_{ee0}}{\varepsilon M_1 \delta} \frac{d}{dz_s} \left(\frac{T_e'^{1/2}}{Q_{ee}'} \frac{dT_e'}{dz_s} \right) \\ & = -8 \left\{ \frac{3}{5\pi(\alpha + T_{i0}')} \right\}^{1/2} \frac{\varepsilon \delta}{M_1} \\ & \times \frac{T_e'^{1/2} Q_{ei}'}{l_{ei0} u_e'^2} (T_e' - T_i') \end{aligned} \quad (6)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{n_i}{n_a + n_i}, \quad T_{i0}' = \frac{T_{i0}}{T_{e0}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{275} \text{ (アルゴン)} \\ l_{ei0} &= l_{ee0} = \frac{1}{\sqrt{2} n_{e0} Q_{ee0}} \\ M_1^2 &= \frac{m_a u_1^2}{(5/3) k T_{e0} (\alpha + T_{i0}')} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(6)式は電子の熱伝導項が $l_{ee0}/\varepsilon M_1 \delta$ のオーダーであることを示しており, それゆえ, δ は $O(l_{ee0}/\varepsilon M_1)$ である.

$\delta = l_{ee0}/\varepsilon M_1$ を(6)式に代入して, α および ε のオーダーの項を省略すると, (6)式はつぎのようになる.

$$\frac{3}{2} \frac{dT_e'}{dz_s} - \frac{75}{64(1+\sqrt{2})} \left(\frac{6\pi}{5T_{i0}'} \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{d}{dz_s} \left(\frac{T_e'^{1/2}}{Q_{ee}'} \frac{dT_e'}{dz_s} \right) \\ & = -8 \left(\frac{3}{5\pi T_{i0}'} \right)^{1/2} \frac{T_e'^{1/2}}{M_1^2} \frac{T_e' - T_{m'}}{u_m'^2} Q_{ei}' \end{aligned} \quad (8)$$

ただし, 原子衝撃波を不連続と考えると, 衝撃波の上流, 下流では, 前述の $u_a = u_e$ の条件より, 電子の速度勾配は消え, (6)式左辺第2項は省略される. ここで, m は衝撃波の無限上流 ($m=1$), および無限下流 ($m=2$) の原子の量を指す. (4)式によって, Q_{ee}' はつぎのように書かれる.

$$Q_{ee}' = \frac{1}{T_e'^2} \quad (9)$$

(9)式を(8)式に代入すると,

$$\begin{aligned} & K_* T_e'^{1/2} \frac{d^2 T_e'}{dz_s^2} + \frac{5}{2} K_* T_e'^{1/2} \left(\frac{dT_e'}{dz_s} \right)^2 \\ & - \frac{3}{2} \frac{dT_e'}{dz_s} = \frac{L_*}{M_1^2 u_m'^2} \frac{T_e' - T_{m'}}{T_e'^{3/2}} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで

$$\begin{aligned} K_* &= \frac{75}{64(1+\sqrt{2})} \left(\frac{6\pi}{5T_{i0}'} \right)^{1/2}, \\ L_* &= 8 \left(\frac{3}{5\pi T_{i0}'} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

(10)式の境界条件は,

$z_s = z_0$ で

$$T_e' = 1, \quad \frac{dT_e'}{dz_s} = \left(\frac{dT_e'}{dz_s} \right)_{z_0}$$

$z_s = +\infty$ で

$$T_e' = T_2', \quad \frac{dT_e'}{dz_s} = 0$$

2.1.2 数値解法 解を求めるためつぎのように置く.

$$Z = \frac{dT_e'}{dz_s} \quad (12)$$

したがって(10)式はつぎのように書かれる.

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dz_s} &= \frac{\frac{3}{2} Z T_e'^{3/2} - \frac{5}{2} K_* T_e'^{3/2} Z^2 + \frac{L_*}{M_1^2 u_m'^2} *}{K_* T_e'^{1/4}} \\ & \quad * \frac{(T_e' - T_{m'})}{1} \end{aligned} \quad (13)$$

(12), (13) 式より独立変数 z_s を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dT_e'} &= \frac{3}{2} \frac{1}{K_* T_e'^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{Z}{T_e'} \\ & \quad + \frac{L_*}{K_* M_1^2 u_m'^2 T_e'^{1/4}} \frac{T_e' - T_{m'}}{Z} \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式は, 衝撃波の無限下流で特異点を持っている. それゆえ, 特異点近傍で線形化をおこなう必要がある. $z = +\infty$ の近傍で解はつぎの形になると仮定する.

$$T_e' = T_2' + a, \quad \frac{dT_e'}{dz_s} = b \quad (15)$$

ここで, a, b は1に比べて非常に小さい。(15)式を(10)式に代入して, a, b の第2次の項を省略すると, 次式が得られる.

$$\frac{d^2 T_e'}{dz_*^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{K_* T_e'^{5/2}} \frac{dT_e'}{dz_*} - \frac{1}{M_1^2 u_2'^2 K_* T_e'^4} (T_e' - T_2') = 0 \quad (16)$$

さて,

$$T_e' - T_2' = A e^{kz_*} \quad (17)$$

と置いて(16)式に代入すると,

$$\bar{k}^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{K_* T_2'^{5/2}} \bar{k} - \frac{1}{M_1^2 u_2'^2 K_* T_2'^4} = 0 \quad (18)$$

(18)式より, 必要な根は, 負根だけであるから,

$$\bar{k} = \frac{\frac{3}{2K_* T_2'^{5/2}} - \left(\frac{9}{4K_* T_2'^5} + \frac{4}{M_1^2 u_2'^2 K_* T_2'^4} \right)^{1/2}}{1} \quad (19)$$

(12), (17)式より,

$$Z = A \bar{k} e^{kz_*} = \bar{k} (T_e' - T_2') \quad (20)$$

それゆえ, $z_* = +\infty$ において, (14)式はつぎの形になる.

$$\left(\frac{dZ}{dT_e'} \right)_{z_* \rightarrow +\infty} = \frac{3}{2} \frac{1}{K_* T_2'^{5/2}} + \frac{L_*}{K_* M_1^2 u_2'^2 T_2'^4} \frac{1}{\bar{k}} \quad (21)$$

T_e', Z , および dZ/dT_e' の下流の値から, (14)式の下流側の積分がおこなわれる.

衝撃波の上流で $T_e' > T_1'$ が保たれており, 電子温度のゼロ勾配の点が存在する場合には, 上流側の境界条件はつぎのようになる. すなわち, $z_* = z_{*0}$ で,

$$T_e' = 1, \quad \frac{dT_e'}{dz_*} = 0$$

この点から(13)式の積分を始め, $Z = Z(T_e')$ および $T_e' = T_e'(z_*)$ の関係が衝撃波の上流側で求まる. 衝撃波の厚みは熱層よりずっと小さいので, 衝撃波内の電子温度は, 一定値 T_{*0}' をとると考える. (6)式を $z_* = -\infty$ から, $z_* = +\infty$ まで積分すると,

$$Z_{-\infty} - Z_{+\infty} = \frac{1}{K_* T_{*0}'^{3/2}} \log_* \frac{1}{u_2'} \quad (22)$$

衝撃波内の電子温度 T_{*0}' は, (14)式を, 上流側, および下流側で積分し, (22)式を用いて求める. また, z_{*0} は, (8)式を上流側から T_{*0}' まで積分して求められる.

計算例として, $M = 4.5$ の場合の積分曲線と電子温度分布を第1~4図に示す. 第1(a)図の積分曲線

(a) 積分曲線

(b) 電子温度分布

第1図 積分曲線と電子温度分布

1-3 は, 上流側の境界条件でもって求められた結果を示し, 曲線2-4 は, 下流側の積分曲線である. 3-5 は, 2-4 の各点に対して, (22)式を計算して得られた曲線で, 求める積分曲線は, 1-3-4-2 となり, 点1, 3, 4, 2 は, z_* が z_{*0} , $-\infty$, $+\infty$ に対応している. また, 不連続点3-4があるのは, 原子衝撃の不連続に起因する. さて, 第1(a)図より, $z_* = 0$ における T_e' の値, および ± 0 における dT_e'/dz_* の値が求まるから, これらを境界条件として, $z_* = 0$ より, 上流, および下流側へ, (13)式を積分すればよい. このようにして求めた解を第1(b)図に示す. 第1, 2, 3図の場合は, いずれも緩和効果と衝撃による圧縮加熱効果が, 衝撃波の上流で釣り合い, 電子温度勾配がゼロになる点が存在する. 第1図の場合は, 衝撃圧縮による温度上昇が, 衝撃波下流の原子温度に達するには不十分な場合で, 衝撃波下流で, 電子温度は原子温度より低くなり, 緩和効果により原子温度に近づく. GREWAL and TALBOT¹⁹⁾ は, この場合のみを, また, JAFFRIN¹⁸⁾ は, 衝撃波上流で, 電子と原子の温度が等しい場合のみを取り扱っている. 第2図の場合は, 衝撃波上流の電子温度が衝撃波下流の原子温度より低く, 圧縮加熱により上昇した電子温度が, 衝撃波下流の原子温度より高くなった場合で, 原子衝撃の位置で極大値を取り,

第2図 積分曲線と電子温度分布

第3図 積分曲線と電子温度分布

その後は原子温度に近づく。第3図の場合は、衝撃波上流の電子温度が、衝撃波下流の原子温度より高い場合である。

さて、衝撃波上流の電子温度が、原子温度よりずっと高い場合には、圧縮加熱効果が緩和による冷却効果

第4図 積分曲線と電子温度分布

と釣り合う点が現われない。この場合には、電子温度勾配は、衝撃波上流でゼロとならず、 $dT_e'/dz_s < 0$ となる。したがって、 $z_s = z_{s1}$ において、 T_e' および dT_e'/dz_s の値が既知ならば、(13) 式を積分することができる。これらの値は、積分曲線より求めることができる。第4図に、この場合の代表的結果を示す。

2.2 衝撃波を横切るイオン密度分布 前節では、凍結流モデルに対して、電子温度分布を求めた。しかし、現在の実験では、衝撃波上流のイオン密度は、再結合、拡散などの効果により減少していることが見い出されている。それゆえ、イオン（または電子）は、衝撃波を横切る場合、原子とは異なる挙動をすると考えられる。われわれは、現在の実験におけるイオン（または電子）密度の減少に対する一般的な表式を見つけ、中性粒子衝撃に対する MOTT-SMITH 解を用いて、原子衝撃を横切るイオン密度分布を求めた。

電子、イオン、原子は、同じ平均流速を持ち (2.1 の仮定 (2) 参照)、その一樣流速は一定であると考え、 $1/n_i$ と z/u_1 との関係を実験的に見出して、衝撃波上流における再結合、拡散などによるイオン密度の減少速度を調べた。イオン密度の分布は、電子温度分布が、衝撃波を横切っても、ほとんど一定であることが、実験的に確かめられたので、飽和イオン電流の分布で近似された。この結果の一例を第5図に示す。

第5図 衝撃波を横切る飽和イオン電流(流量: 0.141 g/s, $M=4.39$) 第6図 $1/n_i - z/u_1$ 関係

これより $1/n_i$ を z/u_1 に対して図示すると、第6図のようになり、これよりつぎの表式を得る。

$$\frac{1}{n_i} = \eta \frac{z}{u_1} + \text{const.} \quad (23)$$

ここで、 n_i はイオン密度、 u_1 は衝撃波上流の速度、 η はイオン密度減少係数である。(23)式を z/u_1 について微分すると、

$$\frac{d(n_i u_1)}{dz} = -\eta n_i^2 \quad (24)$$

(24)式は、再結合(二体衝突)を考慮した連続式と同じ形である。つぎに、衝撃波内でも、 $u_a = u_i = u_e \equiv u(z)$

の関係が成り立ち、イオン密度の変化はつぎの式で表わされると考える。

$$\frac{d\{n_i u(z)\}}{dz} = -\eta n_i^2 \quad (25)$$

ここで、 η は衝撃波の存在に関係なく、自由流の値を取るとする。一部電離した気体では、原子の流れは、荷電粒子の影響を受けないと考えられるから、一次元定常流の連続式より、

$$\frac{d\{n_a u(z)\}}{dz} = 0 \quad (26)$$

ここで n_a は原子密度である。(25)、(26)式より

$$\frac{dn_i}{dz} - \frac{n_i}{n_a} \frac{dn_a}{dz} = -\frac{\eta n_a}{n_{a0} u_0} n_i^2 \quad (27)$$

添字0は衝撃波の上流側の基準量を表わす。基準量をあたえる点としては、イオン密度の減少が、衝撃波による圧縮効果によるイオン密度の増加と釣り合う点を選ばれた。しかし、イオン密度の減少速度が、衝撃圧縮による増加より大きいときには、このような点は現れない。以下の解析では、そのような点が存在する場合に限定される。

(27)式の解は、次式で表わされる。

$$n_i = \frac{n_a}{\int_{z_0}^z \frac{\eta n_a^2}{n_{a0} n_{i0} u_0} dz + C} \quad (28)$$

ここで C は積分常数で、 $z=z_0$ における境界条件

$$n_a = n_{a0}, \quad n_i = n_{i0}, \quad \frac{dn_i}{dz} = 0 \quad (29)$$

から決められ、 $C = n_{a0}/n_{i0}$ である。

つぎの無次元量を導入する。

$$\nu_i = \frac{n_i}{n_{i0}}, \quad \nu_a = \frac{n_a}{n_{a0}}, \quad \xi = \frac{z}{L} \quad (30)$$

ここで、 n_{i0} 、 n_{a0} は $z=z_0$ におけるイオンおよび原子の密度であり、 L は原子衝撃の最大傾斜厚さである。

(30)式を(28)式に代入すると、

$$\nu_i = \frac{\nu_a'}{\frac{\eta n_{i0} L}{u_0} \int_{\xi_0}^{\xi} \nu_a'^2 d\xi + 1} \quad (31)$$

MOTT-SMITH 解は、

$$\nu_a = 1 + \frac{3\beta}{1 + e^{-4\xi}} \quad (32)$$

ここで、

$$\nu_a = \frac{n_a}{n_a(-\infty)}, \quad \beta = \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2 + 3}$$

ν_a と ν_a' , および u_0 と u_1 との関係は,

$$\nu_a' = \frac{\nu_a}{\nu_{a_0}}, \quad u_0 = \frac{u_1}{\nu_{a_0}} \quad (33)$$

ここで ν_{a_0} は $\xi = \xi_0$ における ν_a の値である。(32), (33) 式より,

$$\nu_i = \frac{\nu_a}{\frac{\eta n_{i_0} L}{u_1} \int_{\xi_0}^{\xi} \nu_a^2 d\xi + \nu_{a_0}} \quad (34)$$

(32) 式を (34) 式に用いることにより, イオン密度分布が求まる。さて, ξ_0 の値はつぎのようにして決まる。すなわち, (27), (29) 式より,

$$\frac{1}{n_{a_0}} \left(\frac{dn_a}{d\xi} \right)_0 = \frac{\eta n_{i_0}}{u_0} \quad (35)$$

(30), (32), (33) 式を上式に用いると,

$$(e^{-4\xi_0})^2 + 2 \left(1 + 3\beta - \frac{6u_1\beta}{\eta n_{i_0} L} \right) e^{-4\xi_0} + (1 + 3\beta)^2 = 0 \quad (36)$$

ξ_0 は負であるから, 1 より大きい根が存在する場合のみ, ξ_0 の値が求まる。

3. 実験方法および実験装置

実験は, 京都大学プラズマ・ジェット風洞でおこなわれ, 作動気体としてアルゴンを用いた。プラズマ・トーチで一部電離したアルゴンは, ノズル・スロート径 13.7 mm, ノズル出口径 50 mm のノズルを通り,

第7図 ショック・ホルダー

測定室に噴出し, そこでショック・ホルダーによって, 衝撃波が作られた。この風洞については, 本誌13巻143号に詳細に報告されている。使用したノズルの設計マッハ数は, 5.56 に対し, 実験で得られた値は, 4.17~4.88 である。また, ショック・ホルダーは荷電粒子に影響を及ぼさないよう, パイレックス・ガラスで作られた。ショック・ホルダーは, 第7, 8図に示すように, 直径の異なる二種類を作り, その形状の影響を調べたが, 後述するように, その影響はなかった。

このショック・ホルダーの下流出口面付近に, 流量調節用の円錐状プラグを置き, ショック・ホルダーとプラグとの距離を適当に調節することにより, 垂直衝撃波を作った。衝撃波の写真を第9図に示す。プラグをショック・ホルダーに密着させると, 鈍頭物体の場合のような衝撃波になり, また, プラグを取り除くと, 衝撃波は吸いこまれるのがわかる。現在の実験では,

第8図 ショック・ホルダー

第9図 ショック・ホルダーによる衝撃波の生成 (Δ はショック・ホルダーとプラグ間距離を示す)

ショック・ホルダーとプラグ間距離3mmの場合が適当であると考えた。このように、ショック・ホルダーで衝撃波を作る方法は、SHERMAN¹⁾, TALBOT and SHERMAN²⁾, ROBBEN and TALBOT¹¹⁾, MARRONE²³⁾, および ROTHE²⁴⁾ らが、すでに用いて衝撃波の構造についての実験をおこなっている。しかし、かれらの実験は、いずれも中性粒子に対するものである。

このように作った衝撃波を横切って、ラングミュア・プローブにより、電子温度、飽和イオン電流を測定した。直径0.5mmの白金線から作った平面単探針を用い、探針捕集面を流れに平行に置き、イオン捕集におよぼす、流れの影響を取り除いた²⁵⁾。また探針の直径は、原子間の平均自由行程に比べ、小さいか、または同程度であり、かつ、捕集面が流れに平行であるため、斜め衝撃波しか生じない。したがって、衝撃波によるイオン捕集への影響は、非常に小さいと考えられる。探針電流、探針電位は、X-Yレコーダ上に記録し、探針特性から電子温度を求めた。また、飽和イオン電流は、電子温度、イオン密度の関数であるが²⁵⁾、実験結果より、衝撃波を横切って電子温度は一定であることが知られているので、飽和イオン電流の分布をもって、イオン密度分布におきかえた。

なお、現在の実験条件を第1表に示す。

4. 実験結果と理論結果との比較

4.1 電子温度 電子温度は、流れの各点で、X-Yレコーダー上に記録された探針特性より求められた。電子温度測定において、電子の熱速度分布は、衝撃波内でも局所マクスウェル分布をしていると考えた。現在の実験条件では、電子の挙動は、電子-電子、および電子-イオン衝突によって決められ、電子の質

第1表 実験条件
(表中 1 S. C. F. H. = 0.0141 g/s)

ノズル・スロート径 (mm)	13.7	13.7	13.7
流量 (S. C. F. H.)	5	10	15
マッハ数	4.17	4.39	4.88
レイノルズ数 (1/cm)	38	83	86
岐点圧力 (mmHg)	4.82	8.55	12.57
岐点温度 (°K)	2,510	2,100	2,500
電子温度 (°K)	3,000	3,400	3,300
原子-イオン温度 (°K)	370	280	280
T_{a0}/T_{e0}	0.12	0.082	0.085
電子密度 (1/cm ³)	3.7×10^{12}	4.0×10^{12}	5.9×10^{12}
原子密度 (1/cm ³)	1.06×10^{15}	1.95×10^{15}	1.82×10^{15}
電離度	3.5×10^{-3}	2.1×10^{-3}	3.2×10^{-3}
衝撃厚さ, L (mm)	7.0	3.6	4.0
δ (cm)	3.8	3.8	2.7

量はイオン質量よりずっと小さいので (アルゴンの場合 $m_e/m_i = 1.3 \times 10^{-5}$)、電子はイオンより高い熱速度を持っている。それゆえ、電子は、イオンが自己粒子間で熱的平衡に達したり、電子-イオン間で熱的平衡に達する以上にはやく、自己粒子間で熱的平衡に達する。電子-電子、イオン-イオン、イオン-電子が熱的平衡に達する時間の比は、 $1 : \sqrt{m_i/m_e} : m_i/m_e$ である。このように、衝撃波内でさえ、電子の熱速度が、マクスウェル分布をしていると考えることは適当である。

第10~12図は、衝撃波前後の電子温度分布の実験と理論との比較を示している。これらの図で $z_s = 0$ は、ショック・ホルダーの入り口面に取られた。原子衝撃の実際の中心は、この入り口面より、わずかに前方にある。しかし、熱層は2.1節で述べたように、かなり広がっている。たとえば、理論曲線の原点が、ショック・ホルダーの入り口面と一致させられているとしても、大きな誤差はなく、電子温度分布を知るのに不

第10図 電子温度分布

第11図 電子温度分布

第12図 電子温度分布

都合はない。

第10, 12図は、 $M=4.17$ 、および4.88の場合で、理論的には、圧縮加熱効果と、緩和効果が釣り合い、電子温度勾配がゼロになる点が存在する。これらの場合には、われわれの計算によると、衝撃波上流の電子温度はほとんど一定で、その結果は、実験結果と良く一致している。

第11図 ($M=4.39$) は、衝撃波上流の電子温度が原子温度に比べ非常に高い場合で、衝撃波の前方に、電子温度勾配がゼロになる点は存在しない。したがって、衝撃波上流の任意の点における電子温度とその勾配の値が、計算をおこなう場合に、必要になってく

る。しかし、探針測定では、電子温度勾配が求まるほどの精度はないので、原子衝撃で計算した値を用いて、計算をおこなった。計算結果は、電子温度がゆっくりと減少していくのを示している。しかるに測定した結果は、ほとんど一定である。

4.2 イオン密度 第5図に衝撃を横切る飽和イオン電流の代表的実験例を示した。これより飽和イオン電流は、衝撃波の上流では減少し、その後は、衝撃波の影響で増加していることが認められる。前述のように、この飽和イオン電流よりイオン密度分布を決め、イオン密度の減少速度よりイオン密度減少係数を求め、(34)式に従って、計算結果を求めた。第13~15

第13図 イオン密度分布 (Δはショック・ホルダーとプラグ間距離を示す)

第14図 イオン密度分布 (Δはショック・ホルダーとプラグ間距離を示す)

図に実験結果と計算結果との比較を示す。いずれの結果も、衝撃波の上流で、イオン密度が、再結合、拡散などによって減少し、衝撃波に近づく、と、圧縮効果によって増加している。したがって、衝撃波の上流でイオン密度が最小値を取る点が存在する。この位置は、現在の実験ではほとんど各マッハ数に対して変わらず、ショック・ホルダーの入り口面から上流へ約 12 mm の点であった。また、第9図に示すように衝撃波の写真撮影から、このイオン密度が最小になる位置は、流れの発光が最も弱くなる位置に対応している。この発光量が最小になる位置を GREWAL and TALBOT⁸⁾ は、“ダーク・スペース”と呼び、つぎのような説明をしている。すなわち衝撃波前方で電子温度が上昇するにたがって再結合放射が弱まり、発光量が少なくなる。一方衝撃波に近づく、と圧縮効果により荷電粒子密度が

増加し、単位体積当たりの再結合量が多くなって発光量は増加する。これら二つの効果が釣り合う点が、ダーク・スペースである。しかし、前章の結果のように、緩和効果が圧縮加熱効果より大きい場合には、電子温度勾配は常に負で、発光量は衝撃波に近づくにつれて増加し、ダーク・スペースは現われないことになり、GREWAL and TALBOT の説明に疑問が残る。われわれは、これについて、今後詳細に研究していく予定でいる。

さて、中性粒子の場合、ランキン・ウゴニオ関係に従えば、現在のマッハ数 $M=4.17, 4.39, 4.88$ に対して衝撃波前後の密度比は 3.41, 3.46, 3.55 である。しかるにイオン密度は、衝撃波上流最小値から、1.7, 2.5, 2.5 倍にまでしか増加せず、この値は、計算結果と良く一致している。また、ショック・ホルダーの

第15図 イオン密度分布 (Δはショック・ホルダーとプラグ間距離を示す)

形状を変えて実験をおこなったが、結果に大きい相違は生じなかった。

なお、イオン密度減少係数は、 $M=4.17$ の場合には $8.4 \times 10^{-9} \text{ cm}^3/\text{s}$, $M=4.39$ に対して、 $5.0 \times 10^{-9} \text{ cm}^3/\text{s}$, $M=4.88$ に対して、 $3.0 \times 10^{-9} \text{ cm}^3/\text{s}$ であり、これらの値は、低密度アルゴン・プラズマで測定された再結合係数 $4 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{s}$ より、低くなっている。

5. 結 論

一部電離したアルゴンの非平衡気流における衝撃波を横切って、ラングミュア・プローブ法によって、電子温度とイオン密度の分布を求めた。一方、NAVIER-STOKES 方程式を用いて、衝撃波を横切る電子温度分布を計算し、電子温度が増加する広い熱層が存在することを見出した。これはマッハ数と、イオン、電子の温度比 T_i/T_e で決められる。しかし、現在の実験では計算から予想されるような熱層の存在を、実験的に確かめることは、電子温度の結果に散らばりがあるため、不可能であった。一方、非平衡度の高い場合を除くと、衝撃波上流では、電子温度の計算結果は、流れ方向に、ほとんど一定で、この結果は、実験結果と、かなり一致している。しかし衝撃波の下流ではあまり一致せず、この原因としては、この領域では、粒子間衝突が、衝撃波上流より多くなるにもかかわらず、非弾性衝突効果を計算に含めなかったからである。しかし、非弾性衝突によるエネルギー交換の機構については、アルゴンの場合、十分に解明されていないので、これらの効果を見逃さざるをえなかった。もしそのような効果が既知ならば、実験と計算の一致は、さらに良くなると考えられる。

一方、衝撃波上流のイオン密度の減少を考慮して、

衝撃波を横切るイオン密度分布が、中性粒子気体に対して求められている MOTT-SMITH 解を用いて計算され、再結合、拡散などによるイオン密度減少の効果が、衝撃波を横切るイオン密度分布に大きい影響を及ぼしていることが見い出された。計算と実験の結果は良く一致し、特に衝撃波前後の密度比については、良い一致が得られた。これらの一致は、上述の影響が無視できないことを示している。もしイオン減少係数 η が理論的に見い出され、 η が衝撃波前後で変化することを考慮して計算をおこなうことができれば、さらに良い一致が得られると考えられる。

文 献

- 1) F.S. SHERMAN; A Low-Density Wind-Tunnel Study of Shock-Wave Structure, NACA TN 3298 (1958)
- 2) L. TALBOT and F.S. SHERMAN; Structure of Weak Shock Waves in a Monatomic Gas, NASA Memo D-14-58 W (1959)
- 3) M. LINZER and D.F. HORNG; Structure of Shock Fronts in Argon and Nitrogen, Phys. Fluids Vol. 6, p. 1661 (1963)
- 4) P. GLANSDORFF; Solution of the Boltzmann Equation for Strong Shock Waves by the Two-Fluid Model, Phys. Fluids Vol. 5, p. 371 (1962)
- 5) H.M. MOTT-SMITH; The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave, Phys. Rev. Vol. 82, p. 885 (1952)
- 6) C. MUCKENFUSS; Bimodal Model for Shock Wave Structure, Phys. Fluids Vol. 3, p. 320 (1960)
- 7) C. MUCKENFUSS; Some Aspects of Shock Structure According to the Bimodal Model, Phys. Fluids Vol. 5, p. 1352 (1962)
- 8) M. CAMAC; Argon Shock Structure, in Rarefield Gas Dynamics (J.H. deLEEW ed.) Vol. I, Academic Press, New York, p. 240 (1965)
- 9) F. SCHULTZ-GRUNOW and A. FROHN; Density Distribution in Shock Waves Traveling in Rarefied Monatomic Gases, in Rarefied Gas Dynamics (J.H. deLEEW ed.) Vol. I, Academic Press, New York, p. 250 (1965)
- 10) D.A. RUSSEL; Electron-Beam Measurements of Shock-Wave Thickness, in Rarefield Gas Dynamics (J.H. deLEEW ed.)

- Vol. I, Academic Press, New York, p. 265 (1965)
- 11) F. ROBBEN and L. TALBOT; Measurement of Shock Wave Thickness by the Electron Beam Fluorescence Method, Phys. Fluids Vol. 9, p. 633 (1966)
 - 12) J.D. JUKES; The Structure of a Shock Wave in a Fully Ionized Gas, Jour. Fluid Mech. Vol. 3, p. 275 (1957)
 - 13) V.D. SHAFRANOV; The Structure of Shock Waves in a Plasma, Soviet Phys. JETP Vol. 5, p. 1183 (1957)
 - 14) M.Y. JAFFRIN and R.F. PROBSTEN; Structure of a Plasma Shock Wave, Phys. Fluids Vol. 7, p. 1658 (1964)
 - 15) D.A. TIDMAN; Structure of a Shock Wave in Fully Ionized Hydrogen, Phys. Rev. Vol. 111, p. 1439 (1958)
 - 16) O.W. GREENBERG and Y.H. TREVE; Shock Wave and Solitary Wave Structure in a Plasma, Phys. Fluids Vol. 3, p. 769 (1960)
 - 17) G.G. COMISAR; Structure of Strong Plasma Shock Waves in a Transverse Magnetic Field, Phys. Fluids Vol. 5, p. 1590 (1962)
 - 18) M.Y. JAFFRIN; Shock Structure in a Partially Ionized Gas, Phys. Fluids Vol. 8, p. 606 (1965)
 - 19) M.S. GREWAL and L. TALBOT; Shock-wave Structure in a Partially Ionized Gas, Jour. Fluid Mech. Vol. 16, p. 573 (1963)
 - 20) J.P. APPLETON and K.N.C. BRAY; The Conservation Equation for a Non-Equilibrium Plasma, Jour. Fluid Mech. Vol. 20, p. 659 (1964)
 - 21) S. CHAPMAN and T.G. COWLING; The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press, New York p. 100 (1952)
 - 22) L. SPITZER; Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, Inc., New York p. 72 (1956)
 - 23) P.V. MARRONE; Rotational Temperature and Density Measurements in Underexpanded Jets and Shock Waves Using an Electron Beam Probe, UTIAS REPORT No. 113 (1966)
 - 24) D.E. ROTHE; Electron Beam Studies of Diffusive Separation of Helium-Argon Mixtures in Free Jets and Shock Waves, UTIAS REPORT No. 114 (1966)
 - 25) 神元五郎, 西田道雄; 極超音速プラズマ流におけるラングミューア・プローブ測定. 日本航空学会誌第14巻, 第144号, p. 1 (1966)
 - 26) A. REDFIELD and R.B. HOLT; Electron Removal in Argon Afterglows, Phys. Rev. Vol. 82, p. 874 (1951)

共振振動数の一決定方法*

平 野 陽 一**

A Method for Determining Resonance Frequency

Yoichi HIRANO

Abstract

An experimental method for determining the resonance frequencies of structures is presented in this paper. This method is based on the characteristics of the resonance curve, that the inverse of vibration amplitude, $1/x$, is related to the square of frequency, f^2 , according to the following hyperbolic equation.

$$1/x^2 = A \cdot (f^2)^2 + B \cdot f^2 + C$$

If some experimentally obtained values (x_i, f_i) are fixed, the linear relation holds between $\{(1/x^2) - (1/x_i^2)\} / \{(f^2) - (f_i^2)\}$ and f^2 . When $\{(1/x^2) - (1/x_i^2)\} / \{(f^2) - (f_i^2)\}$ are plotted versus f^2 a straight line can be drawn and the abscissa of the point of the intersection of this line, α , can be obtained. The resonance frequency is now given by

$$f_r = \sqrt{(f_i + \alpha)/2}$$

The values of A, B, C can be determined by this method and the damping ratio γ can be calculated by

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{B}{\sqrt{AC}} \right)^{1/2}$$

Some applications to experimental results reveal the usefulness of this method.

1. 序 論

構造物の共振振動数を実験的に正確に決定する方法を本論文で述べる。この方法は共振曲線の持つ一つの特性をあきらかにしたことにより得られたものである。

共振振動数を実験的に求めるにはいくつかの方法がある。大別して、3つの方法がある。自由振動による方法、強制振動による方法、位相差による方法である。位相差による方法は精度よく固有振動数を求めることが出来るが特殊な装置を必要とする。他の2方法は標準的な装置で測定出来るが、強制振動による場合は正確に共振振動数を求めるのに困難がともなう場合がある。

本論文で述べる方法によれば、構造物を共振近辺で加振して、いくつかの加振振動数に対する応答(例えば変位)を測定することにより共振振動数を正確に決定することが出来る。また、減衰係数比も求めることが出来るし、共振曲線の形状も求めることが可能である(いわゆる曲線のあてはめ)。さらに、簡単な構造物について振動実験をおこない、この方法を適用して本方法が実用上役立つことを示す。

* 昭和42年7月8日, 構造強度に関する講演会で講演, 昭和42年7月12日原稿受理

** 東京大学宇宙航空研究所