最適制御理論による自動飛行制御装置のシンセシス*

中 川 憲 治**・室 津 義 定**・金 定 史 憲***

Synthesis of Automatic Flight Control Systems Using Optimal Control Theory

Kenji NAKAGAWA, Yoshisada MUROTSU and Fuminori KANESADA

Abstract

This paper proposes the method of synthesizing linear flight control systems by applying optimal control theory associated with quadratic performance index. For this problem, the method of utilizing the root-square-locus technique has been developed by RYNASKI and others. In the present method, instead, the synthesis is done by evaluating quantitatively the performance of the transient responses with the aid of digital and analog computers. The design procedure is illustrated on an attitude-control system for the conventional aircraft and an automatic stabilization equipment for the VTOL aircraft. A comparison is made of the results obtained by classical root-locus method, the root-square-locus method and the present method. Thus, it is shown that the present method yields an excellent control system design.

1. ま え が き

線形定係数の自動制御系の最適構成に関する古典理論として代表的なものには、根軌跡法、ボード線図、ナイキスト線図等がある。これらは、いずれも、先に制御方式を仮定しておいて、望ましい応答が得られるように、試行錯誤的に調整可能なゲイン定数を決めるものである。しかし、(1) 望ましい応答に対する判定基準が明確に設定されていないので、判定があいまいである、(2) 仮定した方式が最適の構成であるという保証がない、(3) 多くのフィード・バック回路を持つ系や多変数制御系については計算が困難である、という欠点を持っている。

以上のような古典理論の欠点を補うために発展したのが最適制御理論であって、制御系の動作性能を定量的に判定する基準として評価関数を設定し、この評価関数を最大または最小にする最適制御系を求めるものである。このような最適制御理論を用いると、(1) 評

価の基準が明確である、(2) 制御方式およびそのゲイン定数の値は評価関数から解析的に誘導されるので、古典理論のように最適構成を試行錯誤的に模索する必要がない、(3) 多変数制御系に対しても、同一の手法を適用して系統的に設計が可能である、などの利点を持っている。しかし、これを実際の制御系の設計に適用するためにはなお多くの問題が残されている。主要な問題点の1つは、最適制御理論では最初に評価関数を与える必要があるが、一般に設計要求をもちこんだ適切な評価関数の選択が困難であるという点にある。実際、従来の最適制御理論の応用例では、評価関数を天下り的に与えているが、飛行制御装置等では、明確な評価関数を与えられる場合はほとんどなく、過渡応答によって制御系の良否が判定される場合が多いのである。著者は前論文¹⁾で、線形定係数系に対して、評価関数として、状態変数と制御変数に関する2次形式を選んだ場合について、この問題の一つの解決法を示した。すなわち、評価関数に含まれる各変数に対する重み係数の値と、結果として得られる最適系の特性根の値との関係を求め、飛行性基準を考慮して、重み係数の値を決定した。評価関数として2次形式を選んだ理由は、(1) 制御法則が線形となる、(2) 重み係数の数値を与えるとゲイン定数の値がすべて決まる、(3) このゲイン定数を求める計算はリッカチ方程式に帰着し電子計算機で解ける、などの利点があるためである。

この論文では、2次形式の評価関数に基づいて前論文と異なった手法で、さらに具体的な線形フィードバック制御系のシンセシスの方法を提案する。これは、評価関数の重み係数の値を変えると種々の過渡応答特性を持つ最適系が求まることに着目して、最適系の中からさらに過渡応答の最良の系を見いだそうとするものである。この方法の特徴は、(1) 最適制御理論をシンセシスの数学的手段として用いる、(2) 古典的根軌跡法や著者の前論文の手法では、特性根の値から過渡特性を判定するのに対し、計算機を用いて過渡特性を数値的に評価する、(3) 以上の計算はすべて電子計算機によって処理する、ことである。

* 昭和42年4月5日 日本航空学会年会および昭和42年11月16日 日本航空学会飛行機シンポジウムにて講演、昭和43年6月11日原稿受理

** 大阪府立大学工学部航空工学教室

*** 大阪府立大学工学部数理工学教室

応用例として、普通の航空機の縦の姿勢制御装置と、垂直離着陸航空機 (VTOL 機) の横の自動安定装置のシンセシスの問題を取り扱い、この手法を説明する。

2. 過渡特性の数値評価による方法

2.1 最適制御理論による定式 以下においては、線形定係数系について最適制御理論によって得られた結果²⁾を用いる。要約するとつぎのようである。

線形定係数系の運動方程式は、状態ベクトルを用いてつぎのように書ける。

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) \quad (2.1)$$

ここに、 $\mathbf{x}$: $n \times 1$ 状態ベクトル、 $\mathbf{u}$: $m \times 1$ 制御ベクトル、 $\mathbf{A}$: $n \times n$ 係数マトリックス、 $\mathbf{B}$: $n \times m$ 係数マトリックス、である。2次形式の評価関数は、

$$I = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{R}\mathbf{u}) d\tau \quad (2.2)$$

ここに $\mathbf{Q}$: $n \times n$ 対称な非負重み係数マトリックス、 $\mathbf{R}$: $m \times m$ 対称で正定な重み係数マトリックス、

である。(2.1) 式の系で、 I を最小にする制御 (最適制御) $\mathbf{u}^*$ は、

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (2.3)$$

で与えられる。ここに $\mathbf{K}$ は $n \times n$ 対称マトリックスであって、つぎの $P(t)$ に関するリッカチ方程式の定常解である。

$$-\dot{P} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} \quad (2.4)$$

すなわち、

$$\mathbf{K} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) \quad (2.5)$$

したがって、系の状態方程式と評価関数の重み係数マトリックス $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ が与えられると、最適制御 $\mathbf{u}^*$ (2.3) のゲイン係数は (2.4) 式を解いて得られる。

2.2 シンセシスの手順 以上述べたように状態変数と制御変数の重み係数マトリックスの要素の値が与えられると、最適制御法則 $\mathbf{u}^*$ のゲイン係数が決まり、この最適系の過渡応答が求められる。しかし、重み係数の値を変更すればゲイン係数の値が異なり過渡応答もまた変わってくる。すなわち、重み係数のそれぞれの値に対して最適系が得られるが、それらの過渡応答は異なったものである。そこで、種々の重み係数に対する最適系の中からさらに過渡応答が最も望ましいものを採用する。このときアナログ計算機によって過渡応答の特性を数値的に評価する方法をとる。その順序はつぎのようである。

(1) 状態変数の中から評価すべき変数を選び、評価関数を定める。

(2) デジタル計算機またはアナログ計算機により、重み係数を系統的に変えてリッカチ方程式を解き、各重み係数の値に対して、ゲイン定数の最適値を求める。

(3) アナログ計算機により、各場合の過渡応答を求めて、設計の基準となる量、たとえば、最大操作量の値や、出力の偏差の2乗積分値等の数値を計算し、重み係数に対してプロットする。

(4) 以上の数値から定量的に判定して、適当な重み係数の値を選ぶと、最適のゲイン定数が決定される。

3. 航空機の姿勢制御装置のシンセシス

航空機に自動的に一定の水平直線飛行をさせる縦の姿勢制御装置のシンセシスを考える。数値例として、BLAKELOCK の教科書³⁾に述べてある4発ジェット輸送機の巡航時の姿勢制御装置をとることにする。この場合の短周期近似の運動方程式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{mU}{s_q} \dot{\alpha} - c_{za}\alpha - \frac{mU}{s_q} \dot{\theta} + \frac{mg \sin \theta_0}{s_q} \theta &= c_{z\delta_e} \delta_e \\ -\frac{c}{2U} c_{m\dot{\alpha}} \dot{\alpha} - c_{ma}\alpha + \frac{I_y}{s_{qc}} \dot{\theta} - \frac{c}{2U} c_{mq} \dot{\theta} &= c_{m\delta_e} \delta_e \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここに、 α : 迎え角偏差、 θ_0 : 基準の姿勢角、 θ : 姿勢角偏差、 δ_e : 昇降舵操舵角、

である。上式に、 $\theta_0=0$ および機体の空力特性値を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} 13.78\dot{\alpha} + 4.46\alpha - 13.78\dot{\theta} &= -0.246\delta_e \\ 0.0558\dot{\alpha} + 0.619\alpha + 0.514\dot{\theta} + 0.192\ddot{\theta} &= -0.710\delta_e \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

となる。昇降舵サーボは近似的に

$$\delta_e = -10\dot{\delta}_e - 10\delta_e \quad (3.3)$$

で与えられる。ここに δ_e はサーボへの入力であって、従来用いられてきたような、姿勢角と姿勢角速度をフィードバックする方式では、

$$\delta_e = -K_\theta \theta - K_\dot{\theta} \dot{\theta} \quad (3.4)$$

と書ける。

従来は、制御方式をこのように仮定した上で古典理論を適用し、ゲイン定数 K_θ , $K_\dot{\theta}$ の最適値を求めた。この制御系のブロック線図を第1図に示す。

以下では、2で述べたシンセシスの手法を適用する。

(3.2) および (3.3) 式において状態変数を、 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \dot{\alpha}$, 制御変数を δ_e にとると状態方程式はつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.481 & 1.17 & -1.38 \\ 0 & 1 & -0.324 & -0.018 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

第1図 従来の姿勢制御装置 (BLAKELOCK)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \delta_e \quad (3.5)$$

この例では、姿勢角の制御を考えているので、評価すべき出力変数としては、姿勢角 θ だけを選ぶことにする。このとき、評価関数は次式で表わされる。

$$I = \int_0^\infty (\gamma_{11} x_1^2 + \delta_e^2) d\tau \quad (3.6)$$

最適制御法則は、従来用いられてきた (3.4) 式と異なり、

$$\begin{aligned} \delta_e &= -K_\theta \theta - K_\dot{\theta} \dot{\theta} - K_\alpha \alpha - K_\delta \delta_e \\ &\triangleq 10(K_{41} x_1 + K_{42} x_2 + K_{43} x_3 + K_{44} x_4) \end{aligned} \quad (3.7)$$

で与えられる。この系の構成は第2図のようになる。ここに、ゲイン定数 $K_{41}, \dots, K_{44}$ は、対称マトリックス P に関するつぎのリッカチ方程式の定常解、 $K_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ で与えられる：

$$\begin{aligned} \dot{P}_{11} &= -10^2 P_{14}^2 + \gamma_{11} \\ \dot{P}_{12} &= P_{11} - 0.481 P_{12} + P_{13} - 10^2 P_{14} P_{24} \\ \dot{P}_{13} &= -1.17 P_{12} - 0.324 P_{13} - 10^2 P_{14} P_{34} \\ \dot{P}_{14} &= -1.38 P_{12} - 0.018 P_{13} - 10 P_{14} \\ &\quad - 10^2 P_{14} P_{44} \\ \dot{P}_{22} &= 2 P_{12} - 0.962 P_{22} + 2 P_{23} - 10^2 P_{24}^2 \\ \dot{P}_{23} &= -1.17 P_{22} + P_{13} - 0.805 P_{23} + P_{33} \\ &\quad - 10^2 P_{24} P_{34} \\ \dot{P}_{24} &= -1.38 P_{22} + P_{14} - 0.018 P_{23} \\ &\quad - 10.481 P_{24} + P_{34} - 10^2 P_{24} P_{44} \\ \dot{P}_{33} &= -2.34 P_{23} - 0.648 P_{33} - 10^2 P_{34}^2 \\ \dot{P}_{34} &= -1.38 P_{23} - 1.17 P_{24} - 0.018 P_{33} \\ &\quad - 10.324 P_{34} - 10^2 P_{34} P_{44} \\ \dot{P}_{44} &= -2.76 P_{24} - 0.036 P_{34} - 20 P_{44} - 10^2 P_{44}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

デジタル計算機を用いて、 $t=0$ における初期値 $P_{11} = -P_{44} = 0$ から出発して上の連立方程式を解き、 $t \rightarrow \infty$ における定常解を求める。このさい、重み係数 γ_{11} を系統的に変化させて計算を行ない、各場合に対するゲイン定数 $K_{41}, \dots, K_{44}$ を求めておく。つぎにこ

第2図 最適制御理論による姿勢制御装置

第3図 重み係数と過渡応答特性の関係

のようにして求めたゲイン定数の値に対する過渡応答をアナログ計算機によって求める。このさい、これらの過渡応答を評価する特性値を計算する。この例では、評価関数の値 I 、姿勢角偏差の2乗積分値 $\int_0^\infty \theta^2 d\tau$ 、制御信号の2乗積分値 $\int_0^\infty \delta_e^2 d\tau$ および操作量の最大値 $|\delta_e|_{\max}$ を計算した。これらの数値を重み係数 γ_{11} に対してプロットしたものが第3図である。自動飛行制御装置では、通常許される最大操作量(オーソリティ)が決めている。したがって、この場合は評価基準として、 $\int_0^\infty \theta^2 d\tau$ と $|\delta_e|_{\max}$ をとるのが妥当であろう。この2つの曲線から、操作量の制御値と過渡応答との関係が明瞭となり、操作量の制限値が与えられると、その制限内で最良の過渡応答特性を持つ系が得られる。第3図から、重み係数 γ_{11} を5以上にとっても、操作量が増すだけで、 θ の応答はほとんど改善されないことがわかる(第4図(a), (b)参照)。そこで γ_{11} の適当な値として、 $q_{11}=5$ に選ぶことにしよう。このとき最適制御法則は、前に行なったゲイン定数の計算結果から、

$$\begin{aligned} \delta_e &= -2.236\theta - 1.282\dot{\theta} + 0.7852\alpha \\ &\quad + 0.1623\delta_e \end{aligned} \quad (3.9)$$

で与えられる。

第4図 姿勢制御系の過渡応答

4. 従来の手法との比較

前節に述べたシンセシスによる結果を、従来用いられてきた根軌跡法、および最適制御理論に基づくが重み係数の決定に根軌跡を用いて得られた結果と比較、検討する。

4.1 根軌跡法による結果との比較 先に述べた(3.4)式で与えられるような従来の形式の制御系に対し、BLAKELOCK は、古典的な根軌跡法を用いてゲイン定数の値を決定している³⁾。彼の手法を簡単に説明しよう。ゲイン定数は K_θ , $K_{\dot{\theta}}$ の2個あるので根軌跡は複雑になる。そこでまず $K_\theta=0$ において第1図の内側ループだけを考えると根軌跡は第5図(a)となる。この図から合理的に $K_{\dot{\theta}}$ の値を決めることはできないが、 $K_{\dot{\theta}}$ の値を1.19と1.98の2種類としてみる。つぎに $K_{\dot{\theta}}$ をこれらの値に固定して全体の系の根軌跡を描くと、 $K_{\dot{\theta}}$ の2つの値に対してそれぞれ第5図(b), (c)のようになる。ここで振動項のみに着目してその減衰比が $\zeta=0.6$ となるように K_θ を選ぶと、上に示した $K_{\dot{\theta}}$ の2つの値に対してそれぞれ $K_\theta=1.41$, 3.30を得る。以上の結果に基づいて、適当な制御法則として、彼はつぎの2通りのものを与えている。

$$\left. \begin{aligned} \delta_c &= -1.41\theta - 1.19\dot{\theta} \\ \delta_c &= -3.30\theta - 1.98\dot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここで、 $\zeta=0.6$ に選んだ理由は述べてないが、零点を含まない2次系の振動的な応答については、一般に $\zeta=0.4\sim 0.8$ が適当とされているので、これを拡張解釈して、同様な値を選んだのであろう。また、はじめに $K_\theta=0$ とおいた理由や、つぎに $K_{\dot{\theta}}$ の値を2種類とった理由については根拠がないようである。

さて彼の与えた制御法則が適当であるかどうかを検討するために、制御法則(4.1)式に対する過渡応答を、

第5図 従来の制御系の根軌跡 (BLAKELOCK)

著者の得た最適系 (3.9) 式に対する過渡応答と比較しよう。アナログ計算機で求めたこれらの応答をそれぞれ、第4図 (d), (e) および (a) に示す。応答 (d), (e) は、従来の根軌跡を用いて、 $\zeta=0.6$ となるように設計された制御系の応答である。しかし、予想したような $\zeta=0.6$ に対する応答とはかなり異なっていることがわかる。この理由を調べるために、(d) の $K\theta=1.19$, $K\theta=1.41$ の場合のステップ入力に対する過渡応答を計算すると、第6図に示すような4つのモードの重ね合わせとなっていることがわかる。ここで支配的な項は θ_2 であって、予想したような2次の振動モード θ_4 でない。このことは、振動モードだけの根軌跡に注目して $\zeta=0.6$ と定めても無意味であることを示している。

一般に根軌跡による設計法は、過渡応答を支配する振動項の ζ や ω_n に着目して所望の過渡特性を得ようとするものであるが、この考えは妥当でない場合が多い。というのは、応答が多くのモードの重ね合わせであるときは、単純に1つの振動モードの ζ や ω_n だけでは、系の過渡特性を判定できないからである。このように、根軌跡だけに頼る手法は、(1) 多くのフィードバックを持つ系や多変数制御系では根軌跡が非常に複雑になるばかりでなく、(2) 根軌跡が求まっても、それから適当なゲイン定数の値を選択することが困難であることがわかる。

4.2 重み係数の決定に根軌跡を利用した方法と比較 2で提案したような、過渡応答特性の数値評価によって重み係数を決定する方法のほかに、さきに著者¹⁾ および RYNASKI ら^{4), 5)} は、重み係数と最適系の特性根とのような関係を求め、望ましい特性根の値から、逆に重み係数を決めることを試みた。重み係数と最適系の特性根との関係はつぎの特性方程式で与えられる⁴⁾。

$$\Delta(s)\Delta(-s) = |\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'(-\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}|$$

第6図 従来の系の過渡応答の解析

$$\times \mathbf{Q}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}| = 0 \quad (4.2)$$

さきに述べた (3.5) 式の系に対して、(3.6) 式の評価関数を選んだ場合は、

$$1 + 1.876 \times 10^2 \gamma_{11} \frac{(s+0.306)}{-s^2(s+10)(-s+10)} \times \frac{(-s+0.306)}{(s^2+0.805s+1.325)(s^2-0.805s+1.325)} = 0 \quad (4.3)$$

となる。この式から、重み係数 γ_{11} をパラメータにして根軌跡を描くと、虚軸に関して対称で原点に対して放射状の、いわゆる BUTTERWORTH 型となる。このうち右半平面の軌跡は随伴系のものであるからこれを省略して、左半平面だけを描くと第7図となる。第7図を見ると、振動根は $\zeta=0.5$ に漸近していて、 γ_{11} の値によって ζ の値はあまり変わらない。したがって、この場合は ζ を設計基準として γ_{11} を選定することはできない。結局この手法も、根軌跡を用いて所望の過渡応答特性を得ようとするものであるから、本質的に古典的根軌跡法と同じ欠点を持っているといえる。すなわち、著者の前論文のように、仕様として ζ と ω_n の最適値が与えられている場合は別であるが、一般に ζ や ω_n だけから過渡応答を推定することは困難である。このような手法は、最適制御理論という有力な手法を用いながら、重要な点であいまいな従来の判定基準に頼っているわけで、古典理論への逆行であるということができよう。

4.3 最適制御系の構成法に関するノート ここでは、最適制御系の制御法則の構成について付け加えておこう。最適制御法則は、すべての状態変数の一次結合の形で与えられる。したがって、従来のように制御

第7図 重み係数をパラメータにした最適系の根軌跡

法則を与えた場合に比べて一般に複雑になる。しかし実際には、これらすべての変数を検出するセンサがなかったり、系をもっと簡単にしたいことが多い。この点から、最適制御系は現実的ではないという意見もある。この問題を解決する方法としては、つぎの2つが考えられる。すなわち、

(1) 系が線形であるときは、各変数は伝達関数で関係づけられている。したがって、検出しにくい変数や検出不可能な変数は、すでに検出されている変数から、伝達関数を挿入することによって知ることができる。すなわち、すべての変数を検出する必要はない。

(2) 最適系のフィードバック量のうち、ゲインが小さく、応答に影響の少ないものがあれば、これを省略して制御系を簡単化することもできる。

以下において、同じ計算例についてこのような構成法を考えてみよう。最適制御系のブロック線図第2図よりわかるように、この系の構成には、迎え角 α を検出する必要がある。しかし現在では、精度の良い迎え角センサを得ることはかなり困難である。そこで、上に述べた(1)の方法を考える。(2.5)式をラプラス変換して、 δ_e を消去して α と θ の関係を求めると、

$$\frac{\alpha}{\theta} = 0.0125 \frac{s+77.75}{s+0.306} \quad (4.4)$$

となる。すなわち、レート・ジャイロで $\dot{\theta}$ を検出すると、 α は(4.4)式の伝達関数の回路を挿入することによって得ることができる。このようにすれば迎え角のセンサを使わなくて最適制御系を構成することができる。

つぎに、(2)の方法を考える。(3.9)式なる最適制御法則のうち、 α と δ_e のフィードバックを省略すると、制御法則は、

$$\delta_e = -2.236\theta - 1.282\dot{\theta} \quad (4.5)$$

となる。このときの応答は、第4図(c)のようになる。これを最適制御系の応答第4図(a)比べると、 θ の応答特性が劣っているので、この単純化は適当であるとはいえない。しかし、根軌跡法によって得られた系の第4図(d), (e)に比べるとすぐれている。

なお、 δ_e のフィードバックの代わりに、サーボの時定数を変更することによって、同じ効果を得ることができる。

5. VTOL 機の自動安定装置のシンセシス

VTOL の横運動に対する自動安定装置のシンセシスを考える。一般に、横方向の運動については、横揺れ運動の制御と片揺れ運動の制御が考えられる。このような、2つの入力をもつ多変数制御系を、古典的根軌跡法のような従来の線形制御理論によって扱くと、

手順が非常に複雑になり、シンセシスが困難になる。

2で与えた著者らの手法を適用すると、このような制御系に対しても、1入力の場合と同様の手順によって、系統的なシンセシスが可能である。

5.1 VTOL 機の運動方程式 ホバリングおよび低速飛行中の VTOL 機の横の運動方程式は、微小運動の範囲では、つぎのような線形微分方程式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} L_v \dot{v} + L_p \dot{\phi} - I_x \ddot{\phi} &= -L_{\delta_R} \delta_R \\ Y_v \dot{v} - m \dot{v} + mg \dot{\phi} &= 0 \\ N_v \dot{v} + N_r \dot{\phi} - I_z \ddot{\phi} &= -N_{\delta_Y} \delta_Y \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

ここに、 v : 横すべり速度、 ϕ : 横揺れ角、 ψ : 偏揺れ角、 I_x : 重心まわりの機体の横揺れ慣性モーメント、 I_z : 重心まわりの機体の偏揺れ慣性モーメント、 m : 機体の質量、 L_{δ_R} , N_{δ_Y} : 横揺れおよび偏揺れモーメントに対する操縦感度、 L_v , L_p , Y_v , N_v , N_r : 空力微係数、 g : 重力加速度、 δ_R : 横揺れ制御の操縦桿変位、 δ_Y : 偏揺れ制御のペダル変位、 $\dot{\cdot}$: 時間に関する微分

である。

状態変数として、 $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, $x_3 = v$, $x_4 = \dot{v}$ をとれば、(5.1)式はつぎの状態方程式で書きかえられる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_R \\ \delta_Y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここに、 $a_{12} = L_p/I_x$, $a_{22} = L_p/I_x$, $a_{23} = L_v/I_x$, $a_{31} = g$,

$$a_{34} = Y_v/m, \quad a_{43} = N_v/I_z, \quad a_{44} = N_r/I_z,$$

$$b_{21} = L_{\delta_R}/I_x, \quad b_{42} = N_{\delta_Y}/I_z$$

である。

5.2 自動安定装置のシンセシス 横揺れおよび偏揺れ制御のための操作量のオーソリティを考慮して、出力の偏差の2乗積分値を最小にする制御法則を得るために、評価関数をつぎのように選ぶ。

$$I = \int_0^\infty (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 + \beta \delta_Y^2 + \delta_R^2) d\tau \quad (5.3)$$

この評価関数の中に、方位保持のための ψ を含めなかったのは、これを加えるとかえって運航上不都合を生じると考えられるからである⁶⁾。

(5.2)式で記述される制御系において、評価関数(5.3)式を最小にするような最適制御法則は、次式で与えられる。

第8図 VTOLの横の自動安定装置

$$\left. \begin{aligned} \delta_R &= -b_{21}(K_{21}x_1 + K_{22}x_2 + K_{23}x_3 + K_{24}x_4) \\ \delta_Y &= -\frac{b_{42}}{\beta}(K_{41}x_1 + K_{42}x_2 + K_{43}x_3 + K_{44}x_4) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

この系のブロック線図は第8図となる。ここで、 $K_{21} \sim K_{24}$, $K_{41} \sim K_{44}$ は、それぞれ、つぎのリッカチ方程式の $P_{12} \sim P_{24}$, $P_{14} \sim P_{44}$ の定常解で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_{11} &= 2a_{31}P_{13} - b_{21}^2P_{12}^2 - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{14}^2 + \alpha_1 \\ \dot{P}_{12} &= a_{12}P_{11} + a_{22}P_{12} + a_{31}P_{23} - b_{21}^2P_{12}P_{22} \\ &\quad - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{14}P_{24} \\ \dot{P}_{13} &= a_{23}P_{12} + a_{33}P_{13} + a_{43}P_{14} + a_{31}P_{33} \\ &\quad - b_{21}^2P_{12}P_{23} - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{14}P_{34} \\ \dot{P}_{14} &= a_{44}P_{14} + a_{31}P_{34} - b_{21}^2P_{12}P_{24} \\ &\quad - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{14}P_{44} \\ \dot{P}_{22} &= 2a_{12}P_{12} + 2a_{22}P_{22} - b_{21}^2P_{22}^2 \\ &\quad - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{24}^2 + \alpha_2 \\ \dot{P}_{23} &= a_{23}P_{22} + (a_{22} + a_{33})P_{23} + a_{43}P_{24} \\ &\quad + a_{12}P_{13} - b_{21}^2P_{22}P_{23} - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{24}P_{34} \\ \dot{P}_{24} &= (a_{22} + a_{44})P_{24} + a_{12}P_{14} - b_{21}^2P_{22}P_{24} \\ &\quad - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{24}P_{44} \\ \dot{P}_{33} &= 2a_{23}P_{23} + 2a_{33}P_{33} + 2a_{43}P_{34} \\ &\quad - b_{21}^2P_{23}^2 - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{34}^2 + \alpha_3 \\ \dot{P}_{34} &= (a_{33} + a_{44})P_{34} + a_{23}P_{24} + a_{43}P_{44} \\ &\quad - b_{21}^2P_{23}P_{24} - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{34}P_{44} \\ \dot{P}_{44} &= 2a_{44}P_{44} - b_{21}^2P_{24}^2 - \frac{b_{42}^2}{\beta}P_{44}^2 + \alpha_4 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

評価関数 (5.3) 式の重み係数の値が与えられると、上式を解いて、(5.4) 式の最適制御法則のゲイン定数が求まる。重み係数の値は、2 に述べた手順に従って決定する。

5.3 数値例 計算に使用する機体の要目はつぎの

とおりである。

機体: Tilt Duct 型 Doak VZ-4,

$$m = 143.5 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}, \quad I_X = 262 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$$

$$I_Z = 476 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2, \quad L_P/I_X \triangleq a_{22} = -0.455 \text{ 1/sec}$$

$$L_v/I_X \triangleq a_{23} = -0.07349 \text{ 1/sec}, \quad g \triangleq a_{31} = 9.8 \text{ m/sec}^2$$

$$Y_v/m \triangleq a_{33} = -0.2895 \text{ 1/sec}$$

$$N_v/I_Z \triangleq a_{43} = 0.02657 \text{ 1/m} \cdot \text{sec}$$

$$N_Y/I_Z \triangleq a_{44} = -0.655 \text{ 1/sec}$$

$$L_{\delta_R}/I_X \triangleq b_{21} = -10.0 \text{ 1/m} \cdot \text{sec}^2$$

$$N_{\delta_Y}/I_Z \triangleq b_{42} = -10.0 \text{ 1/m} \cdot \text{sec}^2$$

以上の数値を (5.2) 式に代入すると、状態方程式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.455 & -0.07349 & 0 \\ 9.8 & 0 & -0.2895 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02657 & -0.655 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_R \\ \delta_Y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

この制御系に対して、最適制御法則を求めるために評価関数を式 (5.3) とする。しかし、この論文の手法では、重み係数をパラメータと考えているので、なるべく簡単な評価関数を選んだ方が計算量が少なくてすむ。したがって、(5.3) 式のうち、さらに真に評価すべき状態変数のみを残し、評価関数を簡単にするのが得策である。この例では、横揺れおよび偏揺れ運動に対する過渡応答を評価するには ϕ および ψ を選ぶのが適当であろうと考えられる。そこで、 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ において、つぎのような評価関数を用いることにする。

$$I = \int_t^\infty (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_4 x_4^2 + \beta \delta_Y^2 + \delta_R^2) d\tau \quad (5.7)$$

そこで、重み係数 α_1 , α_4 , β の値を系統的に変化させて、リッカチ方程式 (5.5) 式を解けば、各場合についてゲイン定数 $K_{21} \sim K_{24}$, $K_{41} \sim K_{44}$ が求められる。つぎに、このようにして求めたゲイン定数の値に対する過渡応答と、過渡応答を評価するための特性値をアナログ計算機によって求める。VTOL 機の横の自動安定装置の設計では、横揺れ角に攪乱をうけたときの過渡応答特性と、横風の影響によって横すべり速度を持ったときの過渡応答特性が重要な意味を持つので⁸⁾ これらの過渡応答を求める。横揺れ運動の過渡特性を判定する特性値として $\int_0^\infty \phi^2 d\tau$ と $|\delta_R|_{\max}$ を計算し、偏揺れ運動の過渡特性を判定する特性値として $\int_0^\infty \psi^2 d\tau$ と $|\delta_X|_{\max}$ を計算する。このとき横揺れ運動と偏揺れ運動の速成が小さい場合には、これらの2つの過渡応

答特性を別々に評価することができる。いま (5.7) 式の評価関数を書きかえるとつぎようになる。

$$I = \int_0^\infty (\alpha_1 x_1^2 + \delta_R^2) d\tau + \beta \int_0^\infty \left(\frac{\alpha_4}{\beta} x_4^2 + \delta_Y^2 \right) d\tau \quad (5.8)$$

上式第1項は横揺れ角制御のための評価関数、第2項は偏揺れ角制御のための評価関数となり、 β は両者の関の連成に関係する重み係数とみなすことができる。したがって、連成が小さいときは、第1項と第2項を分離して考えることができ、 β の値には依存しない。すなわち、系の特性は、横揺れ運動に対しては α_1 、偏揺れ運動に対しては α_4/β の値によってきまる。

実際、この例で横揺れ角に攪乱をうけたときの過渡応答に対する特性値をアナログ計算機で求めると、偏揺れ運動の特性を表わす $\int_0^\infty \phi^2 d\tau$ および $|\delta_Y|_{\max}$ はきわめて小さく、偏揺れ運動にはほとんど影響しないことがわかった。したがって、このときは横揺れ運動の過渡特性のみに注目することができる。そこで、 $\int_0^\infty \phi^2 d\tau$ と $|\delta_R|_{\max}$ の値を重み係数 α_1 に対してプロットすると第9図のようになる。ここで、先に述べたように、 $\int_0^\infty \phi^2 d\tau$ および $|\delta_R|_{\max}$ に対する α_4 , β の影響は小さいので、これを無視している。つぎに、横すべり速度を持ったときの過渡応答に対する特性値を求める。このときは、横揺れ運動に対する連成が小さいのでこれを省略し、偏揺れ運動の過渡特性のみに注目する。 $\int_0^\infty \phi^2 d\tau$ および $|\delta_Y|_{\max}$ の値を α_4/β に対してプロットすると、第10図のようになる。第9図および第10図からそれぞれ、重み係数 α_1 と横揺れ運動の過渡応答特性、 α_4/β と偏揺れ運動の過渡応答特性との関係が明瞭となり、操作量のオーソリティを考慮して望ましい過渡応答特性をもつように重み係数を決定する

第9図 重み係数と横揺れ運動の過渡応答特性 ($\phi_0 = 2.5 \text{ deg}$)

第10図 重み係数と偏揺れ運動の過渡特性 ($v_0 = 5 \text{ m/sec}$)

ことができる。ここで β は、さきに述べたように、横揺れ角制御と偏揺れ角制御との間の重み係数とみなすことができるので、この例のように両者の連成が小さいときには問題にならない。連成が強いときは、 β をパラメータとして第9図と同様の図を描けばよい、

第9図および第10図から重み係数の適当な値として $\alpha_1 = 1$, $\alpha_4/\beta = 0.125$ ($\alpha_4 = 0.5$, $\beta = 4$) と選ぶと、最適制御法則は、

$$\left. \begin{aligned} \delta_R &= 1.001\phi + 4.042 \cdot 10^{-1}\dot{\phi} \\ &\quad - 6.004 \cdot 10^{-3}v + 2.016 \cdot 10^{-3}\dot{v} \\ \delta_Y &= 4.078 \cdot 10^{-3}\phi + 5.040 \cdot 10^{-4}\dot{\phi} \\ &\quad + 2.011 \cdot 10^{-3}v + 2.940 \cdot 10^{-1}\dot{v} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

となる。ここに、各変数の単位は、 ϕ [rad], $\dot{\phi}$, $\dot{\phi}$ [rad/sec], v [m/sec], δ_R, δ_Y [m] である。 ϕ [deg], $\dot{\phi}$, $\dot{\phi}$ [deg/sec], v [m/sec], δ_R, δ_Y [cm] に単位を変換すれば、

$$\left. \begin{aligned} \delta_R &= 1.747\phi + 0.7054\dot{\phi} \\ &\quad - 0.6004v + 0.003518\dot{v} \\ \delta_Y &= \dot{\phi} \cdot 0.007116\phi + 0.0008796\dot{\phi} \\ &\quad + 0.2011v + 0.5131\dot{v} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

となる。

このときの過渡応答を第11図、第12図に示す。第11図は横揺れ角 ϕ に攪乱をうけたときの過渡応答を示し、第12図は横すべり速度を持ったときの過渡応答を示す。両図において、(a) は自動安定装置を持たない元の VTOL 機の応答を示す。(b) は今求めた最適制御系の応答である。(c) は最適制御法則のうち、フィードバック・ゲインの小さい項を省略して、

$$\left. \begin{aligned} \delta_R &= 1.747\phi + 0.7054\dot{\phi} - 0.6004v \\ \delta_Y &= 0.2011v + 0.5131\dot{v} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

の形に簡単化した制御法則をもつ近似最適系の応答である。(d) は偏揺れ制御 δ_Y を省略したときの応答である。図をみると、この近似最適系の応答 (c) は最適系

第11図 VTOLの横運動の過渡応答 ($\phi_0 = 2.5$ deg)

の応答(b)とほとんど変わらず、このような単純化は適当であることがわかる。偏揺れ制御 δ_v を行なわないときは、横揺れ運動の過渡応答特性にはあまり影響しない(第11図(d))が、横風をうけたときの偏揺れ角の応答が非常に劣る(第12図(d))。したがって、このような系では δ_v を省略して1変数制御系として考えることはできない。

6. 結 論

この論文では、従来の根軌跡による手法や、根軌跡を利用した最適制御理論による手法に代わるものとして、過渡特性の数値評価に基づく最適制御理論による線形フィードバック制御系のシンセシスの方法を提案した。この手法の適用例として、普通の航空機の姿勢制御装置と、VTOL機の自動安定装置シンセシスを示した。この手法を従来のものと比較するとつぎのようになる。

(1) 従来の根軌跡法では、制御系の構成を仮定して試行錯誤的に最適構成を模索したが、最適制御理論を用いた手法では、評価関数から解析的に最適制御法則が誘導される。

(2) 従来の根軌跡法では、多重ループを含む1変数制御系や多変数制御系をシンセシスするさい、多数個のフィードバック・ゲイン値を決定することは非常に困難である。これに対して、最適制御理論による方法では、これらの値は重み係数の値から一度に決定さ

第12図 VTOLの横運動の過渡応答 ($v_0 = 5$ m/sec)

れる。したがって、多重ループを含む1変数制御系のシンセシスが容易に行なえるばかりでなく、多変数制御系の場合も、同一の手法を適用して系統的なシンセシスが可能である。

(3) 最適制御理論を用いても、根軌跡を併用する方法では、重み係数が2つ以上ある場合のシンセシスがきわめて困難となる。過渡応答特性の数値評価に基づく方法では、計算量が増すだけであって、本質的な困難は生じない。

(4) 従来の根軌跡による手法や、根軌跡を用いた最適制御理論による手法では、 ζ や ω_n で過渡応答を正確に評価することができないので設計の根拠があいまいである。これに対して、過渡特性の数値評価に基づく方法では、過渡応答を定量的に評価することができる。すなわち、制御量の大きさと過渡特性の関係が明らかになり、制御のオーソリティが与えられると、そのオーソリティ内で最良の過渡特性を持つ系を構成することができる。したがって、機械的な計算による系統的なシンセシスが可能となる。

(5) 最適系では、フィードバックする変数の数が多くて、系の構成が複雑になるが、これを単純化する方法も考えられる。古典理論では経験に基づいて簡単な系を仮定してきたが、最適制御理論では、合理的に系を単純化できる。

ここに提案した方法は、最適制御理論を設計計算の手順を与える数学的手段として利用し、最適解の計算

および過渡応答の判定基準となる特性値の計算をすべて電子計算機で処理しようとするもので、一種の computer-aided design であるといえる。ここでは、デジタル計算機とアナログ計算機を併用したが、すべてデジタル計算機のみによって処理することもできる。また、将来ハイブリッド計算機が普及すれば、このような手法は一層有力なものとなるであろう。

計算の一部は東京大学大型計算機センターに依頼した。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 中川, 室津, 金定: 垂直離着陸航空機の最適姿勢制御における評価関数の重み係数選択に関する一考察; 制御工学, Vol. 10 No. 12, pp. 518-525 (1966).
- 2) R. E. KALMAN: Contributions to the Theory of

Optimal Control; Bol. Soc. Mat. Mex., Vol. 5, pp. 102-119 (1960).

- 3) J. H. BLAKELOCK: Automatic Control of Aircraft and Missiles (Book); John Wiley & Sons, Inc. (1965).
- 4) E. G. RYNASKI: Optimal Helicopter Station Keeping; IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-11, No. 3, pp. 346-355 July (1966).
- 5) J. S. TYLER & F. B. TUTEUR: The Use of a Quadratic Performance Index to Design Multivariable Control Systems; IEEE Trans., Vol. AC-9, No. 3, pp. 84-92 Jan. (1966).
- 6) 武田, 堀川, 小川, 森: 航技研フライング・テスト・ベッドの姿勢制御方式の検討; 航技研報告 TR-120 (1966)
- 7) R. H. SMITH: VTOL Control Power Requirement Reappraised; J. Aircraft, Vol. 3, No. 1, Jan.-Feb. (1966).
- 8) 武田, 滝沢: V/STOL 機の飛行性基準; 日本航空学会誌, Vol. 15, No. 157, pp. 58-64 (1967)

表紙写真説明

京都大学工学部航空工学教室では昭和42年3月末超空気力学実験室が開設され、実在気体効果を伴う極超音速空気力学の研究を目的として極超音速ガン・タンネル (大型)、ピストン駆動型衝撃波管および、プラズマ・ジェット風洞 (航空学会誌に既に報告済み) の3つの装置が設置された。詳細は本会誌に掲載されているので省略するが、写真左側は銃尾部より銃身部を経て測定室の方を示しているガン・タンネルであり、これに平行して右側には銃尾部、低圧室、測定部およびダンプ・タンクと連結した上記の衝撃波管である。前者では測定室マッハ数 10, 12, 14, 16 の極超音速流、後者では衝撃マッハ数 26 までの強い衝撃波を得

ることができる。この実験室は宇治市五ヶ庄京大宇治構内にある。