風速分布をあたえて翼列翼型をもとめること*

(軸流回転機の研究 第 13 報)

大 塚 新 太 郎**

Method of Designing Latticed Wing Profile with Prescribed Velocity Distribution

(The 13th Report of Study of Axial-flow Turbo-machine)

Shintarō ŌTSUKA

Abstract

A method of designing latticed wing profile with prescribed velocity distribution along wing surface (not chordwise direction) is explained. Latticed wing with small pitch-chord ratio, large camber and large thickness can be treated with fair easiness. The full paper in English will be published in "The Report of Transportation Technical Research Institute" in near future.

ま え が き

翼型のまわりの風速分布の問題を取扱う場合、翼型と円との写像関係をもとにすることが多い。この写像は単葉翼の場合には比較的容易で、過去においてもいろいろの方法が案出されている。ところが翼列の場合、特にピッチが小で反りや厚みが大きい場合には、単葉翼と同様の取扱い方をしようとすると、いろいろの面倒な事情が生じて来る。その第一は簡単な写像函数が見つからないということであり、第二は、翼面上で適当な間隔でとった点が円周上で二ヶ所に密集してしまうということである。

風速分布があたえられて、翼列翼型をもとめる問題においては上述の二つの面倒な事柄の他に、風速分布のあたえ方そのものにも問題があるようである。単葉翼で普通行われているように翼弦にそっての風速分布をあたえることは、翼がうすく、反りも小さい場合には大した不都合はないであろうが、翼列の場合のように反りも厚みも大きいときには果して妥当であるかどうかあやしい。それは翼面の長さ、翼弦の長さ、とが甚だしく異なるからである。そこで風速分布はどうしても翼面に沿っての値をあたえる必要が出て来るわけである。このあたえ方は本論においてのべるように、求むる翼型の厳密解が得られるという点で大変好都合であるが、一方風速分布のあたえ方が悪いと翼型が閉曲

線にならないといういやな点をもっている。この対策を考えなければいけないわけである。

考え方の大要

翼列の翼面にそっての風速分布があたえられているときには、これを翼面にそって積分することにより翼面上のポテンシャルがもとめられる。一方 Z 面 (第 1 図) の円を考えると円周上のポテンシャルは簡単に

第 1 図

計算できる。この両ポテンシャルが 1 対 1 の対応をしているとすれば Z 面 (第 1 図) の翼型は Z 面の円に写像できたわけで、ポテンシャルの同一の点が対応点となる。

つぎに $\log(d\zeta/dz)$ なる函数を考えると、

$$\log(d\zeta/dz) = \log(ds/d\theta) + i\{\theta - \theta - (\pi/2)\}$$

ただし s : 翼面に沿っての長さ

θ : 円周上の点の中心角

θ : 翼面の傾角

s と θ の関係は上述のように既にもとまっているか

* 1954 年 2 月 18 日 航空学会 第 11 回講演会において講演。昭和 29 年 3 月 1 日原稿受理。

** 正員 運輸技術研究所。

$$\zeta = \frac{a}{2\pi} \log \frac{Z+m}{Z-m} + c_0' + \frac{c_1'}{Z} + \frac{c_2'}{Z^2} + \dots \quad (10)$$

$$c_1' = c_1 + \frac{a}{\pi} \frac{1}{m} \quad (11)$$

“考え方の大要”の項でのべたように $\log(d\zeta/dZ)$ を作るため微分をとると

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dZ} &= -\frac{am}{\pi} \frac{1}{Z^2-m^2} - \frac{c_1'}{Z^2} - \frac{2c_2'}{Z^3} - \dots \\ &= \frac{am}{\pi} \frac{1}{Z^2-m^2} \left\{ -1 - \frac{\pi}{am} (Z^2-m^2) \left(\frac{c_1'}{Z^2} + \frac{2c_2'}{Z^3} + \dots \right) \right\} \\ &= \frac{am}{\pi} \frac{1}{Z^2-m^2} \left\{ -1 - \frac{\pi}{am} c_1' + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{Z^2-m^2} c_0'' \left\{ 1 + \frac{c_1''}{Z} + \frac{c_2''}{Z^2} + \dots \right\} \\ c_0'' &= -\frac{a}{\pi} m - c_1' \quad (12) \end{aligned}$$

$$\log \frac{d\zeta}{dZ} = -\log(Z^2-m^2) + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \frac{c_2}{Z^2} + \dots \quad (13)$$

$$c_0 = \log c_0'' \quad (14)$$

大体の翼型をきめること

さて“考え方の大要”でのべたように

$$\log(d\zeta/dZ) = \log(ds/d\theta) + i\{\theta - \theta - (\pi/2)\}$$

であって、 $ds/d\theta$ が既知であるとして θ をもとめることができるわけであるが、実際問題として $ds/d\theta$ は決して素直な函数ではない。それゆえ計算の困難をさけるために第0次近似の翼型をもとめ、求むる翼型と、この差を追求して行くという方針で進むことにする。こうすれば上述のような $ds/d\theta$ の値の大きな変動のための不愉快な点はなくなってくる。

(9) 式より $c_n = a_n + ib_n$ として、

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= \frac{a}{2\pi} \log \frac{m^2+1+2m \cos \theta}{m^2+1-2m \cos \theta} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta \\ &\quad + b_n \sin n\theta) + i \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) \end{aligned}$$

あるいは、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{t} &= \frac{1}{2\pi} \frac{a}{t} \log \mu^2 + \theta \\ \frac{\eta}{t} &= \psi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ \psi &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

t は翼弦長であるが或る値にきめればよいのであって、正しい値と異っていてもかまわない。 ψ は θ の共軛フーリエ級数であって、

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \oint \theta(\theta') \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (16)$$

である。今 ξ と μ (又は θ) の関係がわかれば η は (16) を用いてもとめることができる。(この実際の計算方法については後述) ξ と θ の関係が近似値であれば η の値も近似値であるが、この ξ と η の示す翼型は Z 面の円との写像関係が明な翼型である、この翼型を基礎翼型と名づけ $-$ をつけて諸量を表す。 ξ と θ との関係の近似値は翼型および流線と等ポテンシャル線を勘で画いてみてもとめることができよう。

基礎翼型の (13) 式に相当する式は

$$\log \frac{d\bar{\zeta}}{dZ} = -\log(Z^2-m^2) + \bar{c}_0 + \frac{\bar{c}_1}{Z} + \frac{\bar{c}_2}{Z^2} + \dots \quad (17)$$

(13)–(17) を作れば

$$\log \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{\zeta}} = \Delta c_0 + \frac{\Delta c_1}{Z} + \frac{\Delta c_2}{Z^2} + \dots \quad (18)$$

そして

$$\log(d\bar{\zeta}/d\bar{s}) = \log(ds/d\bar{s}) + i(\bar{\theta} - \bar{\theta}) \quad (19)$$

であるから、(18)、(19) より $\Delta c_n = \Delta A_n + i\Delta B_n$ として

$$\log(ds/d\bar{s}) = \Delta A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta A_n \cos n\theta + \Delta B_n \sin n\theta) \quad (20)$$

$$\bar{\theta} - \bar{\theta} = \Delta B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta B_n \cos n\theta - \Delta A_n \sin n\theta) \quad (21)$$

両式の $\sum$ は共軛フーリエ級数であるから

$$\bar{\theta} - \bar{\theta} = \Delta B_0 + \frac{1}{2\pi} \oint \log \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (22)$$

求むる翼型の翼面の長さ s と θ の対応は分っている。また基礎翼型と θ の対応も勿論わかっているから $\log(ds/d\bar{s})$ は θ の函数として分っている。したがって ΔB_0 なる常数が分ったとすれば、 $\bar{\theta}$ がもとまるから、翼型は

$$\left. \begin{aligned} \xi/t &= \int \cos \theta \cdot d(s/t) \\ \eta/t &= \int \sin \theta \cdot d(s/t) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

によりもとめることができる。しかしこの出来上った翼型は一般に閉曲線にならない。これは始めの風速分布のあたえ方が悪かったためであって、これを修正しなければならない。

ただし前述のように ΔB_0 がわかっていない。この値が変ると翼の形はかわらず姿勢が回転する。この値は小さいから、かりに0として閉曲線への修正を行ってよいであろう。これは次の項を見ればはっきりすると思うけれど要するに翼型の姿勢は本質的には閉曲線になるならないということには関係ないからである。

翼型が閉曲線にならないことの修正

前述のように翼型が閉曲線にならなかった場合に

は、始めの風速分布を修正しなければならない。一般に翼の上面は重要であるから下面のみを修正するという方針で行くことにする。そして修正にあたっては、修正された結果の風速分布がどうなるかは勿論問題ではあるが、これが下面のみであり、また、その修正量が特別に大でなければ、この修正された結果の風速分布はさして考慮する必要はないのではなからうか……こう考えて、方針としてはまずとにかく翼型を閉曲線にすること、そして結果の風速分布はあらかじめ予想はしないということにした。

下面の修正には、下面の ds/ds を修正してゆけばよい。これはあてずっぽうではなかなか思うように行かないから、そこで

$$d\zeta = d\zeta_0 \log \frac{Z+m^{-1}}{Z-m^{-1}} = d\zeta_0 (\log \mu - i\lambda) \quad (24)$$

ただし³⁾

$$\cos \lambda = \frac{\mu + \mu^{-1}}{\mu_m + \mu_m^{-1}}$$

$d\zeta_0$ はある値として、 $d\zeta$ をくに加えることによって、前・後縁の相対位置をかえることができる。下面のみにこの $d\zeta$ を加えれば $d\zeta_0$ のえらび方によって閉曲線でない翼型は見かけ上閉曲線の翼型にすることができる。この見かけの翼型について ds/ds をもとめ (21) ~ (23) の計算を行うと再び閉曲線でない翼型が得られるがこの後縁のくいちがいは前より小さくなるであろう。これをくりかえして閉曲線の翼型を得ることができるであろう。

(24) 式の m は Z 面の m と同一でよいわけだが、これは必ずしも正しく同一である必要はなく、後述“Poisson の積分”の項の m を用いてもよい。これは (24) 式は修正量を出すための便宜的のものであるからである。

(22) 式における常数の決定

(11), (12), (14) より

$$c_0 = \log(-L - c_1) \quad (25)$$

$$L = \frac{a}{\pi} \left(m + \frac{1}{m} \right)$$

あるいは

$$\frac{L}{t} = \frac{2}{\pi} \frac{a}{t} \frac{\mu_m^2 + 1}{\mu_m^2 - 1} \quad (26)$$

同様に基礎翼型については

$$\bar{c}_0 = \log(-L - \bar{c}_1) \quad (27)$$

となる。ゆえに

$$d\zeta_0 = c_0 - \bar{c}_0 = \log \frac{L + c_1}{L + \bar{c}_1} + \frac{d\bar{c}_1}{L + \bar{c}_1} \quad (28)$$

実数部・虚数部にわけると

$$\begin{aligned} dA_0 &= da_1 \frac{L + \bar{a}_1}{(L + a_1)^2 + \bar{b}_1^2} \\ &\quad + db_1 \frac{\bar{b}_1}{(L + a_1)^2 + \bar{b}_1^2} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} dB_0 &= db_1 \frac{L + \bar{a}_1}{(L + a_1)^2 + \bar{b}_1^2} \\ &\quad - da_1 \frac{\bar{b}_1}{(L + a_1)^2 + \bar{b}_1^2} \end{aligned} \quad (30)$$

しかして、(15), (15') より

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1 &= t \frac{1}{\pi} \oint \bar{\vartheta}(\theta) \cos \theta \cdot d\theta \\ \bar{b}_1 &= t \frac{1}{\pi} \oint \bar{\vartheta}(\theta) \sin \theta \cdot d\theta \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

また

$$\left. \begin{aligned} da_1 &= t \frac{1}{\pi} \oint \frac{d\xi}{t} \cos \theta \cdot d\theta \\ db_1 &= t \frac{1}{\pi} \oint \frac{d\xi}{t} \sin \theta \cdot d\theta \end{aligned} \right\} d\xi = \xi - \bar{\xi} \quad (32)$$

dB_0 をもとめるには、まずこれを仮定して (22), (23) により ξ, η をもとめ、(31), (32), (30) によって dB_0 を計算する。これを始めの値と終りの値が一致するまでくりかえす。

(31), (32) 式の実際の計算法は後述する。

Poisson の積分等について

(16), (22) の積分の計算は θ が不等間隔であるので不便であるから変数をかえて等間隔にするのが便利である。 θ の間隔は翼列のピッチによって適当な値があるから、これを満足するようにする必要がある。そこでつぎのようにしてみた。これは必ずしもこの通りにする必要はないが、他に名案もないのでこうしたものである。要は積分変数を θ から ϑ にかえ、 ϑ を等間隔にしたとき θ が適当になるよう考えたものであって、 ϑ に写像の意味は何もないことを一言のべておく。

くいちがい角のない平板の翼列では

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{t} &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{m^2 + 1 + 2m \cos \theta}{m^2 + 1 - 2m \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{a}{t} \tanh^{-1} \left(\frac{2m}{m^2 + 1} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

$\xi = \pm 1/2$ が翼端であるとして、 $\xi = 1/2, \theta = 0$ を考えると、

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \frac{a}{t} \tanh^{-1} \frac{2m}{m^2 + 1}$$

あるいは

$$\frac{2m}{m^2 + 1} = \tanh K \quad \text{ただし} \quad K = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{a} \quad (33)$$

$$\therefore \frac{\xi}{t} = \frac{1}{\pi} \tanh^{-1} (\tanh hK \cdot \cos \theta) \quad (34)$$

K については第 10 報³⁾ (30) 式より

$$\frac{2m}{m^2+1} = \frac{\mu_m^2-1}{\mu_m^2+1}$$

であるから (33) に代入して $K = \log \mu_m$ (35)

つぎに単葉平板翼では $\frac{\xi}{t} = \frac{1}{2} \cos \vartheta$ (36)

ただし ϑ は平板を円に写像したときの中心角
このとき ϑ を等間隔にすれば ξ/t の配置は大体理想的
と考えられる。そこで (34)=(36) とおいて

$$\tanh(K \cos \vartheta) = \tanh K \cdot \cos \vartheta$$

これより計算の結果

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sinh \{2K \sin^2 (\vartheta/2)\}}{\sinh K \cdot \cosh (K \cos \vartheta)} \quad (37)$$

$$d\theta = \frac{K}{\tanh K} \frac{1}{\cosh^2(K \cos \vartheta)} \frac{\sin \vartheta}{\sin \theta} d\vartheta \quad (38)$$

Poisson の積分を

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \oint \vartheta(\theta') \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (39)$$

あるいは

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \oint \{\vartheta(\theta') - \vartheta(\theta)\} \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (39')$$

として, (38) を代入すると

$$\Psi(\theta) = \oint \{\vartheta(\vartheta') - \vartheta(\vartheta)\} \cot \frac{\theta' - \theta}{2} \cdot \Lambda(\vartheta') d\vartheta' \quad (40)$$

$$\Lambda(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{d\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \frac{K}{\tanh K} \frac{1}{\cosh^2(K \cos \vartheta)} \frac{\sin \vartheta}{\sin \theta} \quad (40')$$

(40) の被積分関数は通常異常な点をもたないから, 梯形則で積分できる。この点に関しては普通の Poisson の積分と大した違いはない。

ここで K の値のとり方が問題になるが, これを (35) から計算することが考えられる。この場合本項にあらわれて来る m は Z 面の m と等しいわけであるが, K は要するに翼面上の点の間隔に関係するのであってそう厳密を要するものではないから, 結局 K は (35) からの値に近似の適当な値をとればよいわけである。 K の値としては 2~8 位の間に 10 段階ぐらいあればよいであろう。そして (40) 式の数値積分用の係数表を作っておけばよい。

つぎに (31), (32) 式については

$$\frac{1}{\pi} \oint \vartheta \cos \theta \cdot d\theta = \frac{1}{\pi} \oint \vartheta \cos \theta \frac{d\theta}{d\vartheta} d\vartheta$$

であるから, $d\theta/d\vartheta$ は (40') より得られ, 結局上式は簡単に数値積分できる。

$$\frac{1}{\pi} \oint \vartheta \sin \theta \cdot d\theta$$

についても同様である。

計算例

計算例としてまず翼型と風速分布がわかっているも

のを採用し, この風速分布から翼型を出してみた。翼型は Weinig の翼型⁴⁾でこの風速分布は白倉氏の計算された値⁵⁾を用いた。第 1 図はこの翼列の大体の形である。風速分布を第 3 図に示す。 $r_1=15$, $r_2=-55^\circ 10'$

第 3 図

とした。計算の結果 $\mu_m=9.30$ である。幸にして白倉氏の風速分布は適正なものであったらしく, 出来上った翼型は第 4 図のように閉曲線となり, もとの Weinig

第 4 図

の翼型ともよく一致しているようである。

これだけでは閉曲線にならないときの修正の様子がわからないので $ds/d\vartheta$ を勝手にとって第 5 図 No. 0

第 5 図

のような閉曲線でない翼型を得た。これに前述の修正を行ってみると, 図中 1, 2, 3 は修正の回数を示すが, このように 3 回程度で計算誤差程度になってしまっているようである。

文 献

- 1) 池田芳郎: 等角写像とその方法 (単行本) 144 頁。
- 2) 大塚: 軸流回転機の研究第 3 報 航研彙報 246 号。
- 3) 大塚: 軸流回転機の研究第 10 報 理工研報告 4 卷 12 号。
- 4) 大塚: 軸流回転機の研究第 8 報 理工研報告 4 卷 12 号。
- 5) 白倉: 任意変型直線翼列の一理論 (第 1 報) 機械学会論文集 18 卷 69 号。