に打勝つには不足である”と test pilot はいっている。

B 機 揚力性能は $C_{L \max}$ から緩かに減少する型である。風洞の気流試験結果は図に示す通りで平均しての失速の進行状況はかなりよい型である。実機の失速試験の失速状況も propeller の slip stream の影響下にある部分を除けば風洞試験と全く同様であって、失速に際しても roll はほとんど感ぜられず良好であった。しかしこの機体は loop の途中でしばしば autorotation を起して loop のやりにくい機体であった。尤もこれは power の小さいことにもよると思う。急旋回の途中で昇降舵を引いて行くと急に上翼が完全失速し autorotation を起して水平に戻る。左右何れの旋回でも常に水平に復帰し極く僅かの操作で水平に set し得る。

これらのことに関し風洞試験で思い当たることは失速に脈流のあったことである。Wake survey でも明瞭に認められた。水平尾翼の片舷中央でピトーを上下に移動して wake の強さを計ったが $\alpha C_{L \max} - 1^\circ$ および $\alpha C_{L \max} + 1^\circ$ では形および強さの全然異った wake の定

常的な型があった。ところが $C_{L \max}$ の迎角においては manometer が大きくゆれて測れない。そこで動揺の上下限を測ってみると丁度の二つの wake の形が現われ、この二つの型が交互に現れているものと結論せられた。模型に気流系をつけて気流状況を観察してみると失速の平均の形は前記の様にかなりよい型であるけれども気流系がちらつく部分があり、脈流の存在を示していた。もっとも不安定の度は軽微なものと思えられた。しかしこのような不安定なものがあると機体の横滑りその他によって両舷に非対称な失速が起り易いことが予想せられ、これが autorotation の原因となるのではないかと考えられる。

なお風洞試験で気流試験を行う際に偏角 0 の試験の外に模型を偏揺吊りとして、偏揺角 0 の場合の最大揚力角附近に autorotation に set して偏揺角を連続的に変えて行くと、失速の非対称性がよく認められる。この結果での傾向を推察し得るのではないかと考えられる。また目下筆者の処で試作中の偏揺天秤が完成すれば、これを定量的に議論出来るのではなからうかと期待している。(運輸技術研究所航空部 荒木浩)

外 圧 に 因 る 球 形 殻 の 挫 屈*

(第 3 報 部分球形殻の挫屈機構)

植 村 益 次**

The Buckling of Spherical Shells by External Pressure (3rd. Report: Buckling Mechanism of Spherical Shell Segments)

Masuji UEMURA

Abstract

The buckling of spherical shells by the external pressure known as the so-called "Durchschlag" phenomenon was investigated in this paper. Especially the spherical shell segment is practically important as a pressure switch for automatic control besides as a part of structures. In the first chapter, some buckling processes were considered from the view point of static energy taking into account the energy barrier. In the second chapter, the depression of the buckling load observed in experiments was explained theoretically by introducing an initial deflection as a cause of jumping over the energy barrier.

は し が き

外圧に因る球形殻の挫屈は、所謂“飛越”(Durchschlag)現象を呈する典型的問題である。本報で特に部分球形殻を取り上げたのは、実際に構造物として用

いられるのは殆んど部分球形殻であるばかりでなく、その挫屈機構が自動制御の圧力スイッチ等に利用さ

* 昭和 28 年 9 月 10 日 第 3 回応用力学連合講演会にて講演、昭和 29 年 2 月 15 日原稿受理

** 東京大学理工学研究所

れ、近時着目されているからである。しかし飛越現象は定量的には明確にされていないので、設計資料に欠け実験に頼る他なかった現状である。本報では、第1章で部分球形殻の挫屈をエネルギー的考察により、各種の挫屈条件について静的平衡の立場から論じた。またその際第2報³⁾で指摘したように、今まで等閑視されていたエネルギー障壁等に関連し、挫屈過程についても考慮し、挫屈の可能性を検討した。つぎに第2章では、エネルギー障壁の飛越は実際には試験中の動的攪乱、材料の不均一性あるいは初期撓みなど何らかの原因に基づくものである、その一例として初期撓みを導入して挫屈値等の低下を説明した。

1. 挫屈のエネルギー的考察

第1報³⁾においては、有限変位理論による平衡方程式によって球形殻の挫屈をできるだけ合理的に解析し、平衡曲線を求めたが、挫屈後の平衡安定状態を決定できなかった。ここでは Tsien¹⁾ も行つた方法すなわち挫屈前後の全ポテンシャルエネルギーを等置するという方法の他、第2報と同じくエネルギー的考察により各種の見地から挫屈条件を検討する。

1.1 全ポテンシャルエネルギー 第1図のように部分球形殻が外圧 p によって撓んだ状態での全ポテンシャルエネルギー W を考える。

$$W = U_1 + U_2 + T \quad (1)$$

ただし U_1 : 殻の伸張による歪エネルギー

$$= \frac{\pi t a^2 \beta^2}{E} \int_0^1 (\sigma_1^2 - 2\nu \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) s ds \quad (2)$$

U_2 : 殻の曲げによる歪エネルギー

$$= \frac{\pi E t^3 a^2 \beta^3}{12(1-\nu^2)} \int_0^1 (\kappa_1^2 + 2\nu \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2) s ds \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{E\delta}{6a} \left[\left\{ \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} - 3s^2 + s^4 \right\} - \frac{\delta}{a\beta^2} \left\{ \frac{5-3\nu}{1-\nu} - 6s^2 + 4s^4 - s^6 \right\} \right] \\ \sigma_2 &= -\frac{E\delta}{6a} \left[\left\{ \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} - 9s^2 + 5s^4 \right\} - \frac{\delta}{a\beta^2} \left\{ \frac{5-3\nu}{1-\nu} - 18s^2 + 20s^4 - 7s^6 \right\} \right] \\ \kappa_1 &= \frac{1}{a\beta^2} \frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{4\delta}{a^2 \beta^2} (1-3s^2) \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{a\beta^2} \frac{dw}{ds} \Big|_s = \frac{4\delta}{a^2 \beta^2} (1-s^2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を用いて W を計算する。無次元量 W' にして表わすと、

$$W' = \frac{W a}{\pi E t^4} = U' + T' \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} U' &= \frac{(U_1 + U_2) a}{\pi E t^4} = \left\{ \frac{8}{9(1-\nu^2)\alpha} + \frac{(7-2\nu)\alpha}{45(1-\nu)} \right\} y^2 - \frac{3-\nu}{9(1-\nu)} y^3 + \frac{23-9\nu}{126(1-\nu)\alpha} y^4 \\ T' &= \frac{T a}{\pi E t^4} = -\frac{2}{3} \alpha x y \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

である。ここで

$$\alpha = \frac{a\beta^2}{t}, \quad x = \frac{pa^2}{2Et^2}, \quad y = \frac{\delta}{t} \quad (10)$$

第1図

T : 外力のポテンシャルエネルギー

$$= 2\pi p a^3 \beta^2 \int_0^1 w s ds \quad (4)$$

ここで a : 球形殻の半径, t : 球形殻の板厚
 2β : 部分球形殻の中心角, E : ヤング係数
 ν : ポアソン比
 p : 球形殻の単位表面積に働く外圧力
 σ_1, σ_2 : 径線, 緯線方向の殻内引張応力
 κ_1, κ_2 : 緯線, 径線周りの曲率変化
 w : 外圧による撓み/半径 a
 $s = \theta/\beta$

つぎに第2報と全く同様の計算を行って W を求める。すなわちつぎの境界条件

$$\left. \begin{aligned} s=0; \quad w &= -\delta/a, \quad dw/ds=0 \\ s=1; \quad w &= dw/ds=0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を満足する適当な撓形 w として

$$w = -\frac{\delta}{a} (1-2s^2+s^4) \quad (6)$$

を仮定し、第1報³⁾で求められた平衡方程式による解

今外圧のなした仕事を A とすると

$$A = -2\pi\alpha^3\beta^3 \int_0^1 \left(\int_0^w p dw \right) s ds \quad (11)$$

であるので, (6) および (10) を用いて無次元数で示すと,

$$A' = \frac{Aa}{\pi Et^4} = \frac{2}{3} \alpha \int_0^y x dy \quad (12)$$

である。しかるに平衡状態では

$$U' = A' \quad (13)$$

であるので, エネルギー障壁についての考察を容易にするため, 全ポテンシャルエネルギーは, 平衡状態では

$$W' = \frac{2}{3} \alpha \left\{ \int_0^y x dy - x \int_0^y dy \right\} \quad (14)$$

と書き表わすこともできる。

1.2. 平衡方程式 平衡方程式は全ポテンシャルエネルギー最小の条件すなわち $dW'/dy=0$ から導かれる。すなわち (8), (9) 両式から

$$x = \frac{23-9\nu}{21(1-\nu)\alpha^2} y^3 - \frac{3-\nu}{2(1-\nu)\alpha} y^2 + \left\{ \frac{8}{3(1-\nu^3)\alpha^2} + \frac{7-2\nu}{15(1-\nu)} \right\} y \quad (15)$$

で示されるが, この式は第1報で, 殻面に直角方向の平衡条件式を Galerkin 法によって積分して得られたものと全く一致する。この平衡方程式を α をパラメーターにし, $\nu = \frac{1}{3}$ の場合について第2図に示す。曲線群の包絡線を求めると

第 2 図

$$x_{env} = \frac{\{896(7-2\nu) - (1+\nu)(259-146\nu+27\nu^2)y^2\}y}{240(1-\nu)\{56+(1+\nu)(23-9\nu)y^2\}} \quad (16)$$

である。第1報では完全球形殻の場合に拡張し, この包絡線の最大値は, 局部的に始めから撓む場合の上限挫屈値を示すものとして取り上げた。しかし固定の境界条件から考えても, 勿論差程厳密な意味のあるものではないと思われる。 $\nu = \frac{1}{3}$ の場合, 包絡線の最大値 $x_{env,max}$ は

$$x_{env,max} = 0.4185; \quad y_{e,m} = 1.229, \quad \alpha_{e,m} = 4.197 \quad (17)$$

である。

さて部分球形殻では $\alpha =$ 一定の値で撓み, α がある値 α_n [(21) 式参照] より大きい場合には, ある外圧で挫屈し, 飛越現象を呈する。この場合の平衡曲線は, 第3図のように極大値 (A_1 点) および極小値 (I_1 点) を有する。これら極値での撓み y_{a1} , y_{i1} は

$$y_{a1} = \frac{7(3-\nu)\alpha \pm \sqrt{7D/15}}{2(23-9\nu)} \quad (18)$$

ただし

$$D \equiv (301-194\nu+33\nu^2)\alpha^2 - \frac{160(23-9\nu)}{1+\nu} \quad (19)$$

であり, また外圧の大きさ x_a , x_i は

$$x_a = \frac{21(3-\nu)\{80(23-9\nu)+(7-\nu)(1-\nu^3)\alpha^2\} \alpha \pm (1+\nu)\sqrt{7D^3/15}}{180(1-\nu^3)(23-9\nu)^2\alpha^2} \quad (20)$$

で表わされる。(18), (20) 両式から, $D > 0$ すなわち

$$\alpha^2 > \frac{160(23-9\nu)}{(1+\nu)(301-194\nu+33\nu^2)} = \alpha^2 \quad (21)$$

は, このような飛越現象がおこる条件であり, $\alpha < \alpha_n$ では, 撓みは外圧と共に連続的に増加する,

第 3 図

つぎに平衡状態の安定・不安定を考える。第3図で

0~ A_1 間: 安定, $d^2W'/dy^2 > 0$

A_1 ~ I_1 間: 不安定, $d^2W'/dy^2 < 0$

I_1 ~ D 間: 安定, $d^2W'/dy^2 > 0$

であり, したがって I_2A_1 上の点から I_1A_2 上の点に飛移するが, A_1I_1 上を通る時にエネルギー障壁を飛越する訳である。

1.3. 挫屈荷重とエネルギー障壁 以上の解析結果を基にして挫屈荷重を論じ、またエネルギー障壁を考慮して挫屈行程をも考察する。飛越現象を呈する球形殻のような殻体の挫屈値は、外圧負荷方法あるいは加圧装置の剛性等によって影響されるものである。

たとえば外圧の負荷に dead weight が使用されるか、あるいは加圧媒体の容積が極めて大きい場合には、挫屈行程中の外圧の大きさは殆んど不変で、 $x = \text{一定}$ 、すなわち $P \rightarrow Q$ (第3図) の挫屈行程が考えられる。しかし一方加圧装置として変位一定で負荷して行く時には、もし加圧媒体の容積が小さいと挫屈に伴って圧力が低下し、 $P \rightarrow R$ (第3図) の挫屈行程が考えられる。完全球形殻の時には、一様圧縮も伴っているの、媒体が液体のように非圧縮性の場合も外圧の減少があるが、周辺固定の部分球形殻の時には、媒体の圧縮性を考慮しないと外圧の減少が見られない。その際気体の断熱変化などの考察は解析を面倒にするので、一応外圧が一定で挫屈する場合を主として考えることにする。

第4図

(1) エネルギー障壁 $x = \text{一定}$ で挫屈する場合の W' を第4図に示す。①点から挫屈し、③点に到着くものとする。②点を飛越する際にエネルギー障壁 $\Delta W'$ に相当するエネルギーの供給を必要とする。 $\Delta W'$ は (14) 式から

$$\begin{aligned} \Delta W' &= W'_{y=y_2} - W'_{y=y_1} \\ &= \frac{2}{3} \alpha \left\{ \int_{y_1}^{y_2} x dy - x \int_{y_1}^{y_2} dy \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

であり、第4図の斜線部面積に対応している。

第5図

(2) 挫屈荷重 挫屈荷重としてつぎのような代表的な場合が考えられる。

(i) 上限挫屈荷重 (x_a) 負荷途中のあらゆる擾乱を注意深く避けることができ、平衡曲線の極大点 A_1 迄外圧を増加できたとすると、 $A_1 \sim I_1$ 間是不安定領域であって、 $x = x_a$ で $A_1 \rightarrow A_2$ に飛移しない訳に行かない。この場合には第5(b)図からわかるように、エネルギー障壁は0であるばかりでなく、 $\Delta W'_{\max}$ が過剰エネルギーとなり、挫屈後に殻体の減衰機構で消滅させられる迄振動を伴い、やがて平衡安定状態の A_2 点に落ち着くことになる。その後は $A_2 D$ 線に沿って外圧とともに撓みが増す。

つぎに外圧を減少して行くと、 A_2 点を素通りし、極小点 I_1 で $x = x_i$ で飛移し、 I_2 点に戻る。この場合は $A_1 \rightarrow A_2$ の時と全く同じ様相を呈する。

このようにエネルギーの供給がなく、理想的な状態で試験が行われると、第6(a)図に示すように、往路 $O I_2 A_1 A_2 D$ 、復路 $D A_2 I_1 I_2 O$ の経路をたどり、 x_a, x_i はそれぞれ上昇および下降の時の挫屈荷重である。このような現象は既に東大生研池田教授の実験によって示されている。このような飛越現象を行い、往路と復路の挫屈値に相異があり、すべて弾性的に自動的に作用することは、圧力スイッチあるいはこれに關聯し、諸量の自動制御に用いられる所以でもある。そして圧力差はパラメーター α あるいは初期撓みを導入すれば勿論調整が可能である。

挫屈後の撓み y_{a2} , y_{i2} は

$$\begin{aligned} y_{a2} &= y_{a1} \pm \frac{3\sqrt{7D/15}}{2(23-9\nu)} \\ &= \frac{7(3-\nu)\alpha \pm 2\sqrt{7D/15}}{2(23-9\nu)} \end{aligned} \quad (23)$$

である。平衡曲線は3次方程式であり、 A_1I_1 線の中点 E_2 に関して対称であって、面積 (A) と面積 (B) [第6(a)図] とは等しい。過剰エネルギー $\Delta W_{\max}$ は

$$\begin{aligned} \Delta W_{\max} &= \frac{2}{3}\alpha \left\{ \int_{y_{a1}}^{y_{a2}} x dy - x \int_{y_{a1}}^{y_{a2}} dy \right\} \\ &= -\frac{2}{3}\alpha \left\{ \int_{y_{i1}}^{y_{i2}} x dy - x \int_{y_{i1}}^{y_{i2}} dy \right\} \\ &= \frac{7\{(301-194\nu+33\nu^2)(1+\nu)\alpha^2-160(23-9\nu)\}^2}{2400(1-\nu)(1+\nu)^2(23-9\nu)^3\alpha} \end{aligned} \quad (24)$$

上限挫屈荷重 x_a は次式を満足する $\alpha=\alpha_0$ で最小値をとる。すなわち (20) 式より

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{(301-194\nu+33\nu^2)\alpha_0^2-160(23-9\nu)}{1+\nu}} \\ &= \frac{3\sqrt{105}(3-\nu)\alpha_0\{80(23-9\nu)-(7-\nu)(1-\nu^2)\alpha_0^2\}}{(1+\nu)(301-194\nu+33\nu^2)\alpha_0^2+320(23-9\nu)} \end{aligned} \quad (25)$$

である。 $\nu=\frac{1}{2}$ の場合には

$$x_{a-\min}=0.4185; \quad \alpha=4.197, \quad y_{a1}=1.229 \quad (26)$$

であるが、これは平衡曲線の包絡線 (16) 式の最大値 (17) 式と一致している。

第6図

(ii) 下限挫屈荷重 (x_e) 外圧一定の状態では挫屈する場合、挫屈前後の全ポテンシャルを等しいと考える

ことは合理的であろう。勿論この場合 ($x=x_e$) には第5図からわかるように外部からのエネルギーの供給を必要とするが、このようなエネルギーの供給が実際には不可避とすれば、もし $x < x_e$ で挫屈した場合再び元の状態に復元する可能性もある訳で、 x_e は挫屈後安定であるための最低の下限挫屈荷重を意味すると考えてよい。このような考察は先に Tsien¹⁾ もまた行ったのであるが、第2報で完全球形殻についてこの観点から挫屈荷重を求めたところ、実験結果ときわめて良く一致した結果が得られたのである。さてこの場合には

$$W_{y=y_{e1}} = W_{y=y_{e3}} \quad (27)$$

であるから、(14) 式より

$$\int_{y_{e1}}^{y_{e3}} x dy = x_e \int_{y_{e1}}^{y_{e3}} dy \quad (28)$$

であり、第6(b)図において面積 (A) と面積 (B) とが等しいことを示す。 E_2 点が対称点であることから

$$y_{e2} = (y_{e1} + y_{e3})/2 \quad (29)$$

であり、また $d^2x/dy^2=0$ から

$$y_{e2} = 7(3-\nu)\alpha/2(23-9\nu) \quad (30)$$

が得られ、また下限挫屈荷重 x_e は

$$\begin{aligned} x_e &= (x_a + x_i)/2 \\ &= \frac{7(3-\nu)\{80(23-9\nu)+(7-\nu)(1-\nu^2)\alpha^2\}}{60(1-\nu^2)(23-9\nu)^2\alpha} \end{aligned} \quad (31)$$

である。また挫屈前後の撓み y_{e1} , y_{e3} は

$$y_{e1} = \frac{7(3-\nu)\alpha \pm \sqrt{7D/5}}{2(23-9\nu)} \quad (32)$$

である。 x_e は $\alpha=\alpha_e$ すなわち

$$\alpha_e^2 = 80(23-9\nu)/(1-\nu^2)(7-\nu) \quad (33)$$

の時に最小値を取り、その値は

$$x_{e-\min} = \frac{14(3-\nu)\sqrt{7-\nu}}{(23-9\nu)\sqrt{15(23-9\nu)(1-\nu^2)}} \quad (34)$$

である。 $\nu=\frac{1}{2}$ の場合には

$$x_{e-\min}=0.1704; \quad \alpha=\sqrt{270}\approx 16.43, \quad y_{e1}=0.2789 \quad (35)$$

である。またこの場合のエネルギー障壁の大きさ ΔW_e は

$$\Delta W_e = \Delta W_{\max}/3 \quad (36)$$

である。

以上の他、もし外部から単に一時的であり、また一方的なエネルギーが供給されるならば、 $x_e > x \geq x_i$ の間でも挫屈が可能であるが、挫屈値としては論外であろう。以上各種の値を総合し、第7図に $\nu=\frac{1}{2}$ の場合の挫屈値を示す。したがって $\alpha \geq \sqrt{10}$ では、負荷条件如何によって $x_e \leq x \leq x_a$ の外圧の下で挫屈すると考えるのが至当であろう。

(3) エネルギーが供給された時のある特殊な挫

第7図

第8図

あって、外部からエネルギーの供給を受け挫屈する場合に、つぎの三つの代表的な場合が考えられる。

まず (1) 前節で議論したように外圧の増加を伴わず、 $B_1 \rightarrow B_3$ に飛移して挫屈する場合で、所要エネルギーはエネルギー障壁である面積 ④ に相当する。つぎに (2) 供給されたエネルギーが外圧の増加のみに消費されるとすると、 $B_1 \rightarrow A_1$ に上昇した後に、エネルギー障壁を飛越する必要もなく、 $A_1 \rightarrow A_2$ に挫屈する場合で、所要エネルギーは面積 ③ に相当する。最後に (3) 供給されたエネルギーの一部は外圧の増加に消費され、 $B_1 \rightarrow C_1$ に上昇した後、残余のエネルギーでエネルギー障壁を飛越して、 $C_1 \rightarrow C_3$ に挫屈する場合で、所要エネルギー $\Delta W'_n$ は

$$\begin{aligned} \Delta W'_n &= \frac{2}{3} \alpha \left[\int_{y_{b1}}^{y_{c2}} x dy + \int_{y_{c1}}^{y_{c2}} x dy - x_c \int_{y_{c1}}^{y_{c2}} dy \right] \\ &= \frac{2}{3} \alpha \left[\int_{y_{b1}}^{y_{c2}} x dy - x_c \int_{y_{c1}}^{y_{c2}} dy \right] \end{aligned} \quad (37)$$

であって、面積 ③ に相当する。今 y_{b1} をパラメーターとして $\Delta W'_n$ を第9図に示す。 $\Delta W'_n$ は $\nu = \frac{1}{3}$

屈行程 前節 (2) では挫屈前後の外圧の大きさが不変の場合を考えた。しかし挫屈値は負荷条件や負荷方法によるものであって、時には外部から供給されるエネルギーが単にエネルギー障壁を飛越すのに使用されるばかりでなく、その一部が外圧の増加に使用される場合も考えられる。今挫屈前に B_1 点 (第8図) に

の場合には

$$\begin{aligned} & \left[-9,000 y_{c2}^4 + 16,800 \alpha y_{c2}^3 - 525(17\alpha^2 + 54) y_{c2}^2 \right. \\ & \quad + \left(\frac{2,009}{2} \alpha^2 + 24,255 \right) \alpha y_{c2} + 882 \left(\frac{19}{90} \alpha^2 + 1 \right) \\ & \quad \times \left(\frac{\alpha^2}{3} - 15 \right) \left. \right] / \sqrt{14 \left(\frac{\alpha^2}{3} - 15 \right) + 70 \alpha y_{c2} - 75 y_{c2}^3} \\ & \quad + 1,500 y_{c2}^3 - 2,100 \alpha y_{c2}^2 + 14(61\alpha^3 + 90) y_{c2} \\ & \quad - 441 \alpha \left(\frac{19}{90} \alpha^2 + 1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

を満足する y_{c2} で、 $\Delta W'_n$ は最小となる。 y_{c1} は次式によつて y_{c2} から求められる。

$$y_{c1} = \frac{-5(y_{c2} - 7\alpha) - \sqrt{14 \left(\frac{\alpha^2}{3} - 15 \right) + 70 \alpha y_{c2} - 75 y_{c2}^3}}{10} \quad (39)$$

第9図

今外部から供給されるエネルギーを $\Delta W'_g$ とする。 y_{b1} が (39) 式で与えられる y_{c1} より小さい場合には、 $\Delta W'_g$ が $\Delta W'_{nmin}$ に等しくなった時に $x_0 \rightarrow x_c$ 迄外圧が増加した後挫屈することが、エネルギーの観点から最も可能性が大きい。このような x_c の値も第7図に合せ記入してある。 x_c もまた最小値をもち

$$x_{cmin} \approx 0.349; \quad \alpha \approx 4.30 \quad (40)$$

である。しかし y_{b1} が (39) 式で与えられる y_{c1} よりも既に大きい場合には、 $\Delta W'_g$ が (37) 式で与えられる $\Delta W'_n$ より大きくなると、その儘 x_0 で挫屈することが最も可能性が大きい。勿論 $B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow C_3$ のような理想的な行程は、解析の便宜のために示したもので、実際には更に複雑な行程に従うであろう。しかしこのような所要エネルギーが最小という挫屈値 x_c が存在することは興味あることで、今後複雑な挫屈条件を考え

る場合、考慮すべきであろうことを暗示している。

2 初期撓みを有する場合の挫屈

第1章では何らの欠陥もない完全な部分球形殻の挫屈をエネルギーの考察により、平衡安定状態から論じたものである。したがって w_0 以下の外圧で挫屈する場合のエネルギー障壁は、初期歪、初期応力あるいは外部からの攪乱的エネルギーあるいは材料の不均一性等によって等置されたものであるという概念に基づくものであった。そこで第2章では、その内から初期撓みを有する場合を一例として取り上げ、平衡方程式から厳密に考察し、エネルギー障壁を飛越す必要もなく実験値が理論値と比較してとかく低下する事実を説明したいと思う。

2.1. 平衡方程式 半径 a の初期撓みのない部分球形殻が外圧 p によって対称変形をする場合の経線、緯線方向の応力およびモーメントの釣合の平衡方程式は、有限変形後のベクトルの考察によりそれぞれ次式で示される。

$$\frac{dT_1}{d\theta} \sqrt{\frac{\hat{G}}{E}} + (T_1 - T_2) \frac{d\sqrt{\frac{\hat{G}}{E}}}{d\theta} - T_{13} \sqrt{\frac{\hat{G}}{E}} L = 0 \quad (41. a)$$

$$\frac{d(T_{13} \sqrt{\frac{\hat{G}}{E}})}{d\theta} + T_1 \sqrt{\frac{\hat{G}}{E}} L + T_2 \sqrt{\frac{\hat{E}}{\hat{G}}} N - p \sqrt{\frac{\hat{E}}{\hat{G}}} G = 0 \quad (41. b)$$

$$\frac{dG_1}{d\theta} \sqrt{\frac{\hat{G}}{E}} + (G_1 + G_2) \frac{d\sqrt{\frac{\hat{G}}{E}}}{d\theta} - T_{13} \sqrt{\frac{\hat{E}}{\hat{G}}} G = 0 \quad (41. c)$$

ここで

$$T_1(T_2) = \sigma_1 t(\sigma_2 t)$$

T_{13} ; 変形後の殻面に直角方向の真剪断力

$G_1(G_2)$; 変形後の緯線(経線)周りの真モーメント

$\hat{E}, \hat{G}$ は微分幾何学における第1種の基礎量で、球形殻の場合、第1報²⁾で述べた order の算定から、1 次の order の量で、それぞれ次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{E} &= a^2 [1 + 2(w + u_0) + w_0^2] \\ \hat{G} &= a^2 \sin^2 \theta [1 + 2(w + u \cot \theta)] \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

w, u は経線、緯線方向の変位成分を半径 a で割って無次元量にしたものである。また L, N は同じく第2種の基礎量で、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} L &= -a(1 - w_{0\theta}) \\ N &= -a \sin^2 \theta (1 - w_0 \cot \theta) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

以上は完全球形殻からの変形を元にして導いたものであるが、初期撓みのある場合を考慮し、外圧を受けない前の変形状態を総べて suffix “0” をつけて示すと、歪成分および曲率変化成分は、有限歪にも一般的に成り立つテンソル成分をとれば

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{\hat{E} - \hat{E}_0}{2\hat{E}_0} = (w + u_0 + \frac{1}{2}w_0^2) - (w_0 + u_{0\theta} + \frac{1}{2}w_{0\theta}^2) \\ e_2 &= \frac{\hat{G} - \hat{G}_0}{2\hat{G}_0} = (w + u \cot \theta) - (w_0 + u_0 \cot \theta) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\hat{E}}{\hat{E}_0} \left(\frac{L}{\hat{E}} - \frac{L_0}{\hat{E}_0} \right) = (w_{0\theta} - w_{0\theta 0})/a \\ \kappa_2 &= \frac{\hat{G}}{\hat{G}_0} \left(\frac{N}{\hat{G}} - \frac{N_0}{\hat{G}_0} \right) = (w_0 \cot \theta - w_{0\theta} \cot \theta)/a \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

で示される。したがって初期撓み後に外圧によって変形した量を、suffix “1” をつけて示すと

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 + w_1 \\ u &= u_0 + u_1 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

であるから、結局歪成分および曲率変化成分はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= w_1 + u_{1\theta} + (w_{1\theta}^2 + 2w_{1\theta} \cdot w_{0\theta})/2 \\ e_2 &= w_1 + u_1 \cot \theta \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= w_{1\theta\theta}/a \\ \kappa_2 &= w_{1\theta} \cdot \cot \theta/a \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

で示することができる。

つぎに応力およびモーメントは、Hooke の法則により

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= Et(e_1 + \nu e_2)/(1 - \nu^2) \\ T_2 &= Et(e_2 + \nu e_1)/(1 - \nu^2) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

および

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= -Et^3(\kappa_1 + \nu \kappa_2)/12(1 - \nu^2) \\ G_2 &= Et^3(\kappa_2 + \nu \kappa_1)/12(1 - \nu^2) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

で与えられる。(47), (49) 両式から u_1 を消去すれば、適合条件式として

$$\begin{aligned} (T_{20} - \nu T_{10}) \tan \theta - T_1(1 + \nu \sec^2 \theta) + T_2(\nu + \sec^2 \theta) \\ = Et \{ w_{1\theta} \tan \theta - (w_{1\theta}^2 + 2w_{1\theta} \cdot w_{0\theta})/2 \} \end{aligned} \quad (51)$$

が得られるので、結局解析に必要な諸式としては、(41), (51) 両式を合せ、つぎの4式を得る。なお第1報で論じた order の算定を基礎とし、また三角関数も展開して一次の項のみをとり、独立変数 s を導入すれば、結局

$$T_1 s + (T_1 - T_2) = 0 \quad (52 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} T_1 \left\{ 1 - \frac{(w_0'' + w_1'')}{\beta_2} \right\} + T_2 \left\{ 1 - \frac{(w_0' + w_1')}{\beta^2 s} \right\} + p a \\ - \frac{1}{\beta} \left(T_{12}' + \frac{T_{13}}{s} \right) = 0 \end{aligned} \quad (52 \cdot b)$$

$$T_{13} + Et^3(w_1''' s^2 + w_1'' s - w_1')/12(1 - \nu^2)a^2 \beta^2 s^2 = 0 \quad (52 \cdot c)$$

$$(T_2' - \nu T_1')s - (1 + \nu)(T_1 - T_2) = Et\{w_1's - (w_1'^2 + 2w_1'w_0')/2\beta^2\} \quad (52 \cdot d)$$

を得る。ここで “'” は s に関する微分を意味する。

2.2. 平衡方程式の解 第1報と同じ手法で (52) 式を解く。すなわち境界条件 (5) 式を満足する w_1 とし、(6) 式と同じ撓形をとる。まず (52 \cdot c) 式から T_{13} が求められる

$$T_{13} = 8Et\delta s/3(1 - \nu^2)\alpha^3\beta^3 \quad (53)$$

(52 \cdot a) 式から T_1, T_2 は応力函数 ϕ を用いて

$$T_1 = \phi/s, \quad T_2 = d\phi/ds \quad (54)$$

とおくことができるので、(52 \cdot d) 式は

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\frac{d}{ds}(s\phi)\right\} = Et\left\{w_1' - \frac{1}{2\beta^2s}(w_1'^2 + 2w_1'w_0')\right\} \quad (52 \cdot d')$$

となる。ここで適当な初期撓み w_0 を用うれば、 ϕ が積分によって求められる。本文は解析の簡単のため、 w_0 として (6) 式と同形の撓形

$$w_0 = -\frac{\delta_0}{\alpha}(1 - 2s^2 + s^4) \quad (55)$$

を一例として用うれば、

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\phi}{s} = -\frac{Et^2y}{6a}\left[(-3s^2 + s^4) + \frac{(y+2y_0)}{\alpha}\right. \\ &\quad \left.\times (6s^2 - 4s^4 + s^6) + c\right] \\ T_2 &= \frac{d\phi}{ds} = -\frac{Et^2y}{6a}\left[(-9s^2 + 5s^4) + \frac{(y+2y_0)}{\alpha}\right. \\ &\quad \left.\times (18s^2 - 20s^4 + 7s^6) + c\right] \end{aligned} \quad (56)$$

ただし c : 積分常数, $y_0 = \delta_0/t$

が求められる。また一方 (47), (49) 両式から

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Et}{1 - \nu^2}\left\{(1 + \nu)(w_0 + w_1) + \frac{(w_1'^2 + 2w_1'w_0')}{2\beta^2}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{\beta}\left(u_1' + \nu\frac{u_1}{s}\right)\right\} \\ T_2 &= \frac{Et}{1 - \nu^2}\left\{(1 + \nu)(w_0 + w_1) + \frac{\nu(w_1'^2 + 2w_1'w_0')}{2\beta^2}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{\beta}\left(\frac{u_1}{s} + \nu u_1'\right)\right\} \end{aligned} \quad (57)$$

であるから、(56), (57) 両式を比較して

$$s = 0, 1; \quad u_1 = 0 \quad (58)$$

の境界条件を満足する u_1 がつぎのように決定される。

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{y\beta t}{6a}\left[(1 + \nu)(-2s + 3s^3 - s^5) - \frac{(y+2y_0)}{\alpha}\right. \\ &\quad \left.\times \left\{(5-3\nu)s - 6(3-\nu)s^3 + 4(5-\nu)s^5\right.\right. \\ &\quad \left.\left.- (7-\nu)s^7\right\}\right] \end{aligned} \quad (59)$$

そこで、(56) 式中の積分常数 c を決定すれば、結局応

力成分として

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{Et^2y}{6a}\left[\left\{\frac{2(2-\nu)}{1-\nu} - 3s^2 + s^4\right\} - \frac{(y+2y_0)}{\alpha}\right. \\ &\quad \left.\times \left\{\frac{5-3\nu}{1-\nu} - 6s^2 + 4s^4 - s^6\right\}\right] \\ T_2 &= -\frac{Et^2y}{6a}\left[\left\{\frac{2(2-\nu)}{1-\nu} - 9s^2 + 5s^4\right\} - \frac{(y+2y_0)}{\alpha}\right. \\ &\quad \left.\times \left\{\frac{5-3\nu}{1-\nu} - 18s^2 + 20s^4 - 7s^6\right\}\right] \end{aligned} \quad (60)$$

が求められる。最後に以上求められた諸量を (52 \cdot b) 式に代入し、各辺に w_1sds を乗じ、0 から 1 迄積分する。これはポテンシャルエネルギー最小の条件に相当するものであるが、Galerkin 法とも称せられる

$$\int_0^1 [(52 \cdot b)] w_1sds = 0 \quad (61)$$

によって、結局圧力対撓の平衡式として

$$\begin{aligned} x &= \left\{\frac{7-2\nu}{15(1-\nu)} - \frac{2(3-\nu)}{3(1-\nu)}\frac{y_0}{\alpha} + \frac{2(23-9\nu)}{21(1-\nu)}\frac{y_0^2}{\alpha^2}\right\}y \\ &\quad + \left\{\frac{23-9\nu}{7(1-\nu)}\frac{y_0}{\alpha} - \frac{3-\nu}{2(1-\nu)}\right\}\frac{y^2}{\alpha} + \frac{(23-9\nu)}{21(1-\nu)}\frac{y^3}{\alpha^2} \\ &\quad + \frac{8y}{3(1-\nu)\alpha^2} \end{aligned} \quad (62)$$

が得られる。 $y_0 = 0$ とおけば、勿論 (15) 式と一致する。今 $\nu = \frac{1}{2}$ の場合を一例とし、 $\alpha = 7$ の場合につき、 y_0 をパラメーターとして第 10 図に平衡曲線を示す。

第 10 図

2.3. 平衡曲線の吟味 平衡曲線については第1章で述べたように、(62) 式の最大値 $x_{\max}$ (第 10 図) において、部分球形殻はエネルギー障壁を飛越す必要もなく挫屈する。また挫屈後外圧を減少して行くと、往路とは別の径路を辿り、極小値 $x_{\min}$ (第 10 図) において再び飛越挫屈して復元する。その場合の挫屈値および挫屈時撓は、 $dx/dy = 0$ より、それぞれ

$$x_{\max/\min} = \frac{4725\{7(3-\nu)\alpha - 2(23-9\nu)y_0\}D_1 \pm \sqrt{D_2^3}}{283,500(1-\nu)(23-9\nu)\alpha^2} \quad (63)$$

および

$$y_0 = \frac{15\{7(3-\nu)\alpha - 2(23-9\nu)y_0\} \pm \sqrt{15D_2}}{30(23-9\nu)} \quad (64)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= (7-\nu)(1-\nu)\alpha^2 + 80(23-9\nu)/(1+\nu) \\ D_2 &= 20(23-9\nu)^2 y_0^2 - 140(3-\nu)(23-9\nu)y_0\alpha \\ &\quad + 7[(301-194\nu+33\nu^2)\alpha^2 - 160(23-9\nu)/(1+\nu)] \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

第 11 図

で与えられる。\$x_{max}\$ は初期撓み \$y_0\$ の増大と共に低下するのは勿論であり、今 \$\alpha=5\$ の場合について \$x_{max}\$, \$x_{min}\$ の変化を第 11 図に示す。しかし \$y_0\$ がある量以上になると、飛越捫屈することがなく、撓みは外圧とともに一方的に増大するのみである。その限界の初期撓み量 \$y_{0l}\$ は、\$D_2=0\$ より

$$y_{0l} = \{7(3-\nu)\alpha - \sqrt{280D_1}\}/20(23-9\nu) \quad (66)$$

で与えられるが、その際 \$x_{max}\$ は最小値となり、\$x_{min}\$ と等しく下限捫屈荷重ともいうべき \$x_l\$ の値となる。

$$x_l = \sqrt{70D_1^3}/300(1-\nu)(23-9\nu)^2\alpha^2 \quad (67)$$

またその時の撓み \$y_l\$ は

$$y_l = \sqrt{280D_1}/20(23-9\nu) \quad (68)$$

である。今 \$\nu=\frac{1}{3}\$ の場合につき、\$x_l\$, \$y_l\$, \$y_{0l}\$ を第 12 図に示すが、\$y_0=0\$ の時の \$y_a\$ すなわち \$y_{a1}\$ も合せ記入する。\$x_l\$ はつぎの \$\alpha_m\$

$$\alpha_m^2 = 160(23-9\nu)/(7-\nu)(1-\nu^2) \quad (69)$$

で、最小値 \$x_{l.m}\$

$$x_{l.m} = \sqrt{1050(23-9\nu)/(1+\nu) \times (7-\nu)/50(23-9\nu)^2} \quad (70)$$

となる。

以上の解析によって初期撓みがある場合の捫屈荷重は、可成り低下することが示されたが、これによって

第 12 図

従来球形殻の捫屈実験値が古典的理論値より遙かに下廻っていたことに対する定性的な説明ができると思う。

むすび

本報では部分球形殻の捫屈球形殻の捫屈機構を二つの観点から考察した。しかし実際には、飛越現象を伴う球形殻の捫屈は、厳密には動的効果とか試験機の剛性を考慮して検討する必要があることはいふ迄もない。これらについては後報に譲ることにする。

なお本結果は第一次近似解であるが、撓みが大きくまた立体角が大きい場合には更に近似度を高める必要があるように思う。しかし、本解析方法はベクトルの考察に基づくものであって、逐次的に更に高次解が得られる利点があるので、それによると本結果はそれ程修正される必要もないことが既わかっているので、本報で充分であらう。第二次近似解もいつれ報告したいと思う。

最後に本研究は吉村先生の終始変らぬ御指導・御鞭撻によるものであることに厚く感謝するとともに、倉西・池田・林諸先生の有益な御討論にも感謝の意を表します。また計算の手伝をして下さった田近陽子さんにも御礼申し上げます。

文 献

- 1) H.S. Tsien; Jour of Aero. Sci., 9, 10 (1942/8).
- 2) 吉村・植村; 第 1 報, 東大理工研報告, 3, 11~12 (1949).
- 3) 植村・吉村; 第 2 報, 東大理工研報告, 6, 6 (1952).