論 文

転輪を後方に傾斜したる水平儀の旋回誤差*

武 田 晋 一 郎**

On a Simple Method of Turn Error Compensation of Gyro Horizon

Shin'ichiro TAKEDA

Abstract

A simple method of turn error compensation of gyro horizon which consist of inclining the top of the spin axis of the gyro 3 degrees toward the direction of flight is proposed. A theoretical calculation of turn error compensation is carried out and the result is verified by the experiment. This method is very simple, but the effect is very large as it has been very widely used in the gyro horizons made in U. S. A.

目 次

1. 緒 言
2. 転輪を後方に傾斜して旋回誤差を軽減し得る理由
3. 旋回誤差の計算
4. 方向変換誤差
5. 旋回誤差の実験
6. 結 言

1. 緒 言

転輪を応用したる人工水平儀の旋回誤差の防止法あるいは軽減法については従来にも種々の研究と考案があるが、著者は現在広く使用せられているスベリ式人工水平儀の旋回誤差の軽減法のきわめて簡単な一案として、転輪をある角度だけ後方に傾斜せしめる方法を得て若干の理論的考察と実験とを行った。この方法は勿論完全なる旋回誤差の防止法ではないので常に旋回誤差を0にすることは不可能であるが、最も頻繁に使用せられる旋回速度の附近で旋回誤差を実用上において小さくし得る点を特徴とするものである。スベリ式水平儀について考察と実験とを行ったのであるが、この方法は他の水平儀にも応用可能な場合が多いと思われる。

2. 転輪を後方に傾斜して旋回誤差を軽減し得る理由

転輪の回転軸が鉛直であれば、飛行機が旋回しても何等の変化は起らぬが、転輪の回転軸が第1図に示すように鉛直を外れた位置 P_0 にあると、旋回によって鉛直点 O を中心とした円運動を行う。一方において、旋回飛行による遠心力のため左右傾斜振子弁が作動し、転輪は旋回の外側へ振動し始める。 P_0 点において円運動の振動速度と振子弁による振動速度とを等しくすれば、水平儀は旋回の影響を全然受けないのである。

しかし、振子弁による振動速度 ω_0 は一定であるが、

第1図 転輪を後方に傾斜して旋回誤差を軽減し得る原理図

* 昭和 29 年 12 月 13 日原稿受理。本稿は戦時中の研究であるが戦後の現在米国において広く同様の方法を採用している。

** 法政大学工学部

円運動の振動速度は旋回角速度 ω と後傾角 x_0 の積に比例するので、旋回誤差が発生しないのは一定の旋回速度 $\omega_0 = \epsilon_0/x_0$ に限るのである。この一定の旋回速度 ω_0 を飛行機の最も頻繁に使用する旋回速度に取っておけば、実用上の旋回誤差はきわめて小さくなると考えられるのである。

水平儀は転輪に後傾角 x_0 を与えたとときちょうど鉛直を指示する如く、水平指示桿を x_0 だけ上に曲げをおくと同時に制動筒の前後傾斜振子弁が後方に第2図に示すとおり x_0 だけ傾いて取付く状態にしておくのである。

第2図 水平儀の転輪に後傾角 $x_0 = 3^\circ$ を与えてある図

振子弁による振動速度と旋回による振動速度とが平衡する点は第1図の x 軸になければならぬことは、振子弁による振動速度が y 軸に平行で、旋回による振動速度が鉛直点 O を中心とする円の切線に平行なることより明瞭である。転輪が前傾すると、両振動速度は互に助け合うので平衡しないが、後傾すれば左旋回でも右旋回でも平衡するのである。

3. 旋回誤差の計算

転輪の回転軸を x_0 だけ後傾した水平儀の旋回誤差を計算する。転輪系の重心は完全に支持せられている

第3図 噴気モーメントの特性

ものとす。噴気モーメントは、噴口全開角をきわめて小と仮定して、振子弁傾角に対して第3図の如きものとする。これに対する振動角速度を ϵ_1 および ϵ_2 とする。

鉛直復帰運動は後傾角 x_0 が小であるから、普通の水平儀と全く同様である。

旋回飛行中の水平儀の運動方程式は転輪が x_0 なる後傾角を有する状態を鉛直状態 ($x = 0, y = 0$) とすれば、飛行機に固定した座標系 (x, y) において

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= +\omega y \mp \epsilon_1 \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega(x + x_0) + \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

である。 $\omega > 0$ を左旋回とし、複号は $x > 0$ するとき上を、 $x < 0$ するとき下をとるものとす。

旋回誤差防止条件は旋回角速度 ω_0 において成立し、

$$\epsilon_2 = \omega_0 x_0 \quad (2)$$

である。(2)を(1)に代入し、変数分離を行うと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= \omega(\omega_0 - \omega)x_0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y &= \pm \omega \epsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。

第4図 旋回飛行中の水平儀の運動

ϵ_1 は $x = 0$ ならば 0 , $x > 0$ ならば $+\epsilon_1$, $x < 0$ ならば $-\epsilon_1$ になる不連続函数であるから、転輪の運動もこれがため特異なる点がある。すなわち、 $|\omega y| \leq |\epsilon_1|$ なる間ははじめに $x = 0$ であると水平儀は y 軸を離れることはできない。したがって旋回開始直後は水平儀は y 軸上を進むのである。この場合の運動は

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= (\omega_0 - \omega)x_0, \quad y = (\omega_0 - \omega)x_0 t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

である。旋回誤差は時間 t に対して計算するよりも、旋回角 $\phi = \omega t$ に対して計算する方が合理的である。飛行機を速度を v とし、バンク角 $\phi = \tan^{-1}(v\omega/g)$ と旋回角 ϕ とで誤差を表わすこととする。旋回速度

ω_0 に対応するバンク角を φ_0 とすれば, $\varphi_0 = \tan^{-1}(\omega_0/g)$ であるから, (4) の左右傾斜誤差 y は

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \left(\frac{\tan \varphi_0}{\tan \varphi} - 1 \right) x_0 \phi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる. 旋回角 ϕ に比例して y は増加する. $\omega \leq \sqrt{\epsilon_1 g/v}$ なるときは, 水平儀は見掛けの鉛直方向 ($x=0, y=\varphi$) まで傾斜するとその位置に停止する.

$\omega > \sqrt{\epsilon_1 g/v}$ なるときは, y の値が $y_1 = \pm \epsilon_1/\omega$ なる値に達すると水平儀は y 軸を離れて

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} x_0 \\ y_1 &= \pm \frac{\epsilon_1}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

なる (x_1, y_1) を中心とする円運動を行う. 水平儀が y 軸を離れるまでの旋回角を ϕ_1 とすれば, その後の旋回誤差の経過を旋回角にて表せば,

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \{1 - \cos(\phi - \phi_1)\} \\ y &= y_1 + x_1 \sin(\phi - \phi_1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる.

旋回誤差 x および y の経過は (5) あるいは (5) と (6) とを接続したものととなる. 見掛けの鉛直方向に停留する場合の限界旋回角を ϕ_c とすれば,

$$\phi_c = \frac{\varphi}{x_0} \cdot \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_0 - \tan \varphi} \quad (8)$$

であり, (5) と (6) との接続の限界旋回角 ϕ_1 は,

$$\phi_1 = \frac{\epsilon_1}{x_0} \cdot \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_0 - \tan \varphi} \quad (9)$$

である.

$x_0 = 3^\circ$ とする水平儀を考える. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}\pi/(60 \times$

第1表 旋回誤差の平衡点および限界角

バンク角 φ (度)	旋回角速度 ω (ラジアン/秒)	x_1 (度)	y_1 (度)	限界角速度 ω_c あるいは ϕ_1 (度)
2	0.00342	—	—	4.38
4	0.00685	—	—	19.8
6	0.0103	—	—	51.1
10	0.0173	2.78	5.78	119
12.5	0.0217	1.69	4.61	176
15	0.0262	0.81	3.82	273
17.5	0.0309	0.23	3.24	794
20	0.0356	-0.19	-2.81	814
25	0.0457	-0.81	-2.19	154
30	0.0556	-1.23	-1.77	82.4
35	0.0686	-1.54	-1.46	54.3
40	0.0822	-1.79	-1.22	39.3
45	0.0989	-1.98	-1.02	29.6
50	0.1168	-2.15	-0.86	23.0
60	0.1697	-2.41	-0.60	14.3
70	0.2695	-2.63	-0.37	8.1

15) = 0.001745 とすると, 旋回誤差防止条件 $\omega_0 x_0 = \epsilon_2$ を満足する旋回角速度は $\omega_0 = 0.0333$ となる. これは 1 旋回時間が 188 sec で, 約 3 min で 1 旋回の速さである. このように決定した水平儀について旋回誤差の数値計算を行う.

計算結果は第1表および第5図, 第6図, 第7図の如くである. 第1表は飛行機を $v = 100 \text{ m/sec} = 360 \text{ km/h}$ と考えたときのバンク角 φ に対する円運動の中心 (x_1, y_1) および限界角 ϕ_c および ϕ_1 を示したものである. 水平儀の運動が見掛け鉛直点に終る最大のバンク角は 7.6° である.

第5図は円運動の中心 (x_1, y_1) の位置のバンク角による変化を示したもので, 右旋回の場合はこの図を x 軸に対して対称に反転したものとなる. バンク角 18.8° は旋回誤差防止条件がちょうど成立するバンク角であるが, このバンク角において (x_1, y_1) は y 軸上 $+3^\circ \sim -3^\circ$ の範囲に属することが第5図に見られる. 座標 (x_1, y_1) は円運動の中心であると同時に旋回飛行中の平衡点である. バンク角 18.8° のときの平衡点は $(x=0, y=0)$ と考えて差支えないのである.

旋回飛行は実際上の考慮より常に 180° 以下の旋回角にて終了すると仮定し, 旋回誤差の計算は第6図お

第5図 旋回飛行中の水平儀の平衡点 (円運動の中心座標) の軌跡 (左旋回の場合)

第6図 転輪後傾水平儀の左右傾斜誤差

第7図 転輪後傾水平儀の前後傾斜誤差

よび第7図に示すように旋回角 180° までに止めてある。

第6図は左右傾斜誤差を、第7図は前後傾斜誤差を(5)および(7)式に従って計算した結果を示したものである。

第8図および第9図は転輪の傾斜が無い普通の水平儀の旋回誤差の計算結果である。これと第6図および第7図と対照比較すれば、転輪後傾の旋回誤差減少効果が明瞭である。

- (1) 最大誤差は 11.5° より 8.2° に減少している。
- (2) 前後傾斜誤差は、普通のものでは旋回角が 1 rad = 57.3° より出現し始めるが、転輪後傾のもの

第8図 普通水平儀の左右傾斜誤差

第9図 普通水平儀の前後傾斜誤差

ではバンク角 30° までは甚だしく遅れているので前後傾斜誤差は起らぬと同様である。

(3) バンク角は 15°~30° の範囲に実用上限定せられると考えると、旋回誤差は第 6~9 図において帯状に示した部分に属するものである。転輪後傾のものは帯状域は誤差零の軸を中央にしているが、普通のは誤差零の軸の上方に著しく偏っている。したがって全般的に見て旋回誤差は転輪後傾によつて 1/4 程度に減少するといふことができる。

(4) 左右傾斜実用最大誤差は普通のもの 7.7° より 3° に減少している。

(5) 前後傾斜実用最大誤差は普通のもの 5.8° より 1.5° に減少している。

概観していえば、誤差を正負に平等に分配し、最も頻繁なる旋回の誤差を 0 とすることにより旋回誤差を軽減した格好になっている。

鉛直復帰性能を全然犠牲とすることなしに誤差をかなり満足すべき程度に減少し得ることは本方法の利点である。

振子弁特性を変更して旋回誤差を軽減する方法¹⁾はかなりの効果が認められるのであるが、クランプ装置を併用するに非ざれば鉛直復帰時間が長大となり不便を感じる欠点がある。

4. 方向変換誤差

転輪が鉛直より偏っている水平儀は遠心力を伴わずに急に方向を変換すると誤差が生ず。この誤差は転輪後傾角 x_0 に比例し、方向変換角 ψ に関して次の式に従って変化する。

$$\begin{cases} x = x_0 (\cos \psi - 1) \\ y = -x_0 \sin \psi \end{cases} \quad (10)$$

第2表 方向変換誤差

方向変換角 ψ (度)	前後傾斜誤差 x (度)	左右傾斜誤差 y (度)	
		左 旋 回	右 旋 回
0	0	0	0
30	-0.4	+1.5	-1.5
60	-1.5	+2.6	-2.6
90	-3.0	+3.0	-3.0
120	-4.5	+2.6	-2.6
150	-5.6	+1.5	-1.5
180	-6.0	0	0

方向変換角 ψ は左旋回を正とする。 $x_0 = 3^\circ$ として計算すると第2表の如くである。30° 程度の急方向変

1) たとえば、スベリ会社特許第 142140 号の如き方法で、大傾角時の噴気モーメントによる振動速度を小傾角のときの 1/2~1/3 程度にするものである。

換の誤差は小であるから、実用上の差支えは皆無といえる。

5. 旋回誤差の実験

現用スベリ式水平儀を改造して、転輪を後傾したる水平儀を試作して、旋回誤差の実験値を求めた。改造はきわめて容易かつ簡単で、第2図に示す通り水平指示桿の横木と前後傾斜振子弁を彎曲もしくは前斜せしめるのみである。

第10図 (バンク角=10°)

第11図 (バンク角=15°)

第12図 (バンク角=20°)

実験結果は第10~17図のとおりである。バンク角が約20°の場合に旋回誤差が0になるようになってい。バンク角20~35°の範囲における旋回誤差は計算の示すとおりと合致し、きわめて小さい値となつてい。

第13図 (バンク角=30°)

第14図 (バンク角=35°)

第15図 (バンク角=50°)

第16図 (バンク角=60°)

第17図 (バンク角=70°)

6. 結 言

現用スベリ式水平儀において転輪をきわめて小さい
ある角度だけ後方に傾斜せしめて使用すると、飛行機

の主要旋回速度に対して旋回誤差を0あるいはきわめて小さくすることが可能であることを推論し、現用水平儀を改造してこの方式の水平儀を試作し、その旋回誤差を実験的に求め、この推論の正しきことを実験した。

水平儀の旋回誤差を小さくするこの方式は最も簡単で実行も容易なることが特徴である。しかも、振子弁特性を変更して旋回誤差を小さくする方法に比して、鉛直復帰時間が小さく高空における復帰性能の劣化のないことは一層有効なる方式と信ぜられるのである。

この方法は戦後米国においてほとんどすべての水平儀(空気式および電気式)において採用されていることが判明した。ここに附言しておく。

(昭和29年12月12日)

◆ 書

弾性学の基礎的諸問題 *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*: N. I. Muskhelishvili, 3rd Edit., Moscow, U.S.S.R., 1949. 英訳, J. R. M. Radok. P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland, 1953. 704頁, 66図。

本書の第1版は原著者 Muskhelishvili が1932年ごろソヴェットのレニングラード大学、大学院等において講義した所を纏め1933年に出版したものであるが、その後17年を経て1949年に内容を一新し増補して第3版を出版した。そして1953年にそれをJ. R. M. Radok (オランダ) が英訳出版したのが本書である。本書は7篇25章よりなり、第1篇では弾性学の基礎方程式を述べ、第2篇において平面応力論に入り、著者の最も得意としかつ本書の特徴である所の解の複素変数表示を行って応力および変位の公式を導きかつ等角写像論を述べている。第3編では円板等に対する級数解法を述べ、第4篇ではCauchyの複素積分を導入して、その基本的性質と境界値問題への適用法を述べ、第5篇においてそれらを二次元単純連結領域の基礎的問題に適用してFredholmの積分方程式に導き、弾性解の存在定理を証明している。そして円に写像し得る多数の問題に対する解、たとえば各種の荷重を受ける円板や回転板、楕円孔を有する板の引張や楕円孔に挿入物を有する板、半無限板などに対する具体的な解を導き、本書の特徴をいかに発揮している。また第6篇には境界値問題の線型関連問題、いわゆるRiemann-Hilbert問題の応用による簡明な解法

◆ 評

を述べここでも多種の応用を示している。最後の第7篇はSaint-Venantの振りや曲げ、引張などの理論を述べた補足的な部分で、本書としてはむしろ特徴のない部分であるが、著者独特の写像による新しい断面のものや、合成棒の問題などが解かれている。

要するに本書はその大部分がいわゆるMuskhelishvili流の2次元弾性理論の解説であって、著者独特のきわめて独創的な特徴を全篇に盛った所の近來稀な名著で、これは全く著者の天才的才能と永年の苦心研究の結晶というか、著者の深い学識を背景に生まれたものであると思う。2次元弾性問題は古来Airyの応力函数を用いて解くのが正攻法とされたが、その後横田成年、小野鑑正氏らの複素函数を用いる解法が提出され、またM. Bricasの解法なども現われた。しかしMuskhelishviliの解法が1933年に発表されてから(Z. A. M. M. Bd, 13, 1933, S. 264)この新しい解法に世界の注目が集るようになり、多くの新しい解を生むに至った。前記の各解法は勿論互に深い関係があることは同様な函数論的解法であるGoursat-Kolosoff流の応力函数を用いればよく分ることであるが、とにかくMuskhelishviliやGoursat流の函数論に基礎を置く合理的な解の探索法は一步この方面の進歩した水準を行くものとして、今後も陰に陽にこの分野の研究に応用されることは疑いない。本書はMuskhelishviliの解法の真髄を解りよく解説した良書で、斯学専門家的好参考書となるものと考えられる。(鶴戸口英善)