論文

Corrugated Diaphragm の弾性特性について*

赤 坂 隆**

On the Elastic Properties of the Corrugated Diaphragm

Takashi AKASAKA

Abstract

The elastic properties of the corrugated diaphragm loaded by an uniformly distributed pressure or a concentrated force were analysed here by assuming it as a circular anisotropic elastic thin plate. The calculated results concerning to the load v.s. max. deflection curve and also to the stress distribution, coincide with the corresponding experimental results very well.

緒 言

半径方向に波型をもつ薄肉円盤は圧力計器として広く用いられている。¹⁾²⁾ 波型 (corrugation) をつけることによって盤の撓み特性曲線は著しく線型化されるので計器として有用になったものであろう。この corrugation effect は平らな薄肉円盤の撓み特性と比較すれば明白になる。すなわち第1図において、一様

第1図 Corrugated diaphragm と flat diaphragm との撓み特性比較図

pressure; p による円盤中央部の撓み w_0 は微小撓み (linear theory) では corrugation によって小さく、したがって計器感度はむしろ平盤に比較して悪くなるが、大変位になると逆に平盤の方が二次的 tension の発生に伴って剛性が急激に増加するのに対し, corru-

gated diaphragm の方は、それによる剛性増加率が小さく、したがって比較的 linear な特性を示すので撓み剛性の逆転が起る。さて、この問題は厳密には薄肉回転殻理論によるべきもので、以前から toroidal shell の一般荷重に対する変形と強度については K. Stange³⁾ の解析があり、また最近はベロー・ブルドン管の問題と関連して E. Reißner⁴⁾, R. A. Clark^{5),6)} の漸近展開法による boundary layer theory が生れた。しかし corrugated diaphragm 全体の剛性および強度の解析にはこの方法の extension は相当の数学的困難を伴うのでまだなされていないようである。著者はこの diaphragm を巨視的に半径方向と円周方向とで直交異方性をもつ円盤として解析を行い、一様分布荷重および中心部位の集中荷重の2場合について実用的な撓み剛性および局部応力の評価式を得た。また大変位の場合の non-linear 弾性特性についてエネルギー法による近似解析を行い、これによって corrugation effect を定量的に把握することができた。さらに解析との比較のため、数種の燐青銅製大型モデルについて確かめの実験を行い、両荷重場合の撓みおよび歪を測定した。一致は良好である。

1. 記号

E = ヤング率

ν = ポアソン比

E_r, E_θ = 等価ヤング率 (それぞれ半径および周方向)

ν_r, ν_θ = 等価ポアソン比

h = 板厚

* 昭和39年2月19日 日本航空学会第16回講演会において講演。昭和39年4月1日原稿受理。

** 中央大学工学部

$H_r = E_r h / (1 - \nu_{\theta} \nu_r)$; 等価伸長剛性 (半径方向)

$H_{\theta} = E_{\theta} h / (1 - \nu_{\theta} \nu_r)$; 等価伸長剛性 (周方向)

$\epsilon_r, \epsilon_{\theta}, e_r, e_{\theta}$ = 中立面伸び歪 (それぞれ異方性, 等方性板の)

$N_r, N_{\theta}, n_r, n_{\theta}$ = 膜力 (同上)

$\kappa_r, \kappa_{\theta}$ = 曲率変化

Q_r = 剪断力

M_r, M_{θ} = 曲げモーメント

D_r, D_{θ} = 等価曲げ剛性

μ_r, μ_{θ} = 等価ポアソン比 (曲げに対する)

r = 半径座標

a = 半径

e = 中央補強部の半径

$a_0 = a - e$

l = 波型 $\frac{1}{2}$ ピッチ

$2b$ = 波型の高さ

$\lambda = \pi b / l$

p = 圧力

P = 集中荷重

$\alpha = D_{\theta} / D_r$

$\zeta = H_r / H_{\theta}$

u = 半径方向変位

w = 垂直変位 (撓み)

β, C_0, C_1, C_2 = 未定常数

W = 外力の為す仕事

V_A = 面内歪エネルギー

V_B = 曲げ歪エネルギー

$\xi = r/a, \quad \eta = e/a$

$x = (r-e)/a_0, \quad y = e/a_0$

$\varphi, \phi, f, g_i (i=1, 2, 3, \dots)$ = 函数記号

$\sigma_r, \sigma_{\theta}$ = 応力, z 垂直座標 (波型函数)

s = 波型に沿う曲線座標

$\tan \Lambda = \frac{dz}{dr}$

z_f = diaphragm 上下面の z 座標

I_{θ} = 波型半ピッチの中立軸周断面二次モーメント.

2. 直交異方性円盤の曲げ理論

直交異方性板の弾性法則は,

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D_r (\kappa_r + M_{\theta} \kappa_{\theta}), \\ M_{\theta} &= D_{\theta} (\kappa_{\theta} + \mu_r \kappa_r). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで, 曲率変化 $\kappa_r, \kappa_{\theta}$ は次式にて与えられる.

$$\kappa_r = -\frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \kappa_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (2)$$

また Maxwell-Betti の相反定理から μ_r, μ_{θ} につい

第2図 Corrugated diaphragm の直交異方性

て

$$\mu_r / D_r = \mu_{\theta} / D_{\theta}. \quad (3)$$

微小片についての r 方向曲げモーメント平衡条件は

$$\frac{d}{dr} (r M_r) - M_{\theta} = -Q_r \cdot r. \quad (4)$$

(1), (2) を (4) に代入し (3) を考慮すると w についての次の基礎方程式を得る.

$$\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \alpha \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q_r}{D_r} \quad (5)$$

ただし $\alpha = D_{\theta} / D_r$.

1) 一様 pressure; p をうける場合. 剪断力 Q_r は板面垂直方向の釣合から静定で

$$Q_r = pr/2. \quad (6)$$

したがって, $\sqrt{\alpha} \neq 1, 3$ になるとき (5) の一般解として次式を得る.

$$w = C_1 \frac{r^{\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}+1} - C_2 \frac{r^{-\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}-1} + C_3 + \frac{pr^4}{8(9-\alpha)D_r}. \quad (7)$$

境界条件として考える円盤は外周 ($r=a$) にて固定, かつ内側周縁 ($r=e$) にて中央部剛体部分と剛接されているものとする. すなわち;

$$\left\{ \begin{aligned} r=a \text{ にて, } & w=0, \quad \frac{dw}{dr}=0 \\ r=e \text{ にて, } & \frac{dw}{dr}=0 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

(7) をこれらの境界条件に代入すれば3個の積分常数は容易に決定され, 結局次式を得る.

$$w = \frac{pa^4}{8(9-\alpha)D_r} \left[\left(\frac{3-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+1} - \frac{4}{\sqrt{\alpha}+1} \xi^{-\sqrt{\alpha}+1} + \xi^4 \right) \right]$$

$$-4\phi(\sqrt{\alpha}, \eta) \left(\frac{\xi^{\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}+1} - \frac{2\sqrt{\alpha}}{(\sqrt{\alpha}+1)(\sqrt{\alpha}-1)} + \frac{\xi^{-\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}-1} \right) \quad (9)$$

ただし, $\eta = e/a$, $\xi = r/a$,

$$\phi(\sqrt{\alpha}, \eta) = \frac{-\eta^{\sqrt{\alpha}+3} + \eta^{2\sqrt{\alpha}}}{1 - \eta^{2\sqrt{\alpha}}}.$$

右辺〔〕内第1項は $\eta=0$ なる場合, すなわち中央剛体部のない場合の解で, 第2項はその影響を示す項である。 $w_{\max}$ は $\xi=\eta$ にて起る。(9)式から,

$$w_{\max} = \frac{pa^4}{8(\sqrt{\alpha}+3)(\sqrt{\alpha}+1)D_r} \left[1 - \frac{(\sqrt{\alpha}+3)(\sqrt{\alpha}+1)}{(\sqrt{\alpha}-3)(\sqrt{\alpha}-1)}\eta^4 + \frac{8}{\sqrt{\alpha}-3}\eta^{\sqrt{\alpha}+1} + O(\eta^{\sqrt{\alpha}+3}, \eta^{2\sqrt{\alpha}}) \right]. \quad (10)$$

diaphragm は通常 $\sqrt{\alpha} > 3$, また $\eta < 1$ であるから $\eta^{\sqrt{\alpha}+3}$, $\eta^{2\sqrt{\alpha}}$ の order は無視して差支えない。また $\sqrt{\alpha}$ は板厚が薄くなるにつれて, あるいは corrugation が深くなるにつれて大になるので, そのような場合にはさらに〔〕内第3項をも充分の精度で無視できる。特に $\eta=0$ の場合は

$$w_{\max} = \frac{pa^4}{8(\sqrt{\alpha}+3)(\sqrt{\alpha}+1)D_r}. \quad (10')$$

さらに等方性 ($\alpha=1$) の場合は良く知られた公式を得る。

$$w_{\max} = pa^4/64D \quad (10'')$$

(9)式は $\sqrt{\alpha}=3$ の場合には意味を失う。この場合は一般解として容易に次式を導くことができる。

$$w = C_1 \frac{r^4}{4} - C_2 \frac{r^{-2}}{2} + C_3 + \frac{pr^4}{32D_r} \left(\log r - \frac{1}{4} \right). \quad (11)$$

前と同様な計算を繰返せば結局 $w_{\max}(\sqrt{\alpha}=3)$ は次のようになる。

$$w_{\max} = \frac{pa^4}{48D_r} \left[\frac{\eta^8 \log \eta}{1 - \eta^6} (\eta^4 - 3 + 2\eta^{-2}) + \frac{1}{4} + \left(\log \eta - \frac{1}{4} \right) \eta^4 \right] \quad (12)$$

特別場合として $\eta \rightarrow 0$ とすると,

$$w_{\max} = pa^4/192D_r. \quad (12')$$

これは(10')式において $\sqrt{\alpha}=3$ とおいた結果と一致する。

2) 集中荷重; P をうける場合。(5)式において右辺の剪断力 Q_r は次の如く定まる。

$$Q_r = P/2\pi r \quad (13)$$

この場合の一般解は容易に, 次の如く導かれる。

$$w = C_1 \frac{r^{\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}+1} - C_2 \frac{r^{-\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}-1} + C_3 + \frac{Pr^2}{4\pi(1-\alpha)D_r} \quad (14)$$

前と同じ境界条件から C_1 , C_2 , C_3 を決定し, 整理すると

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi(1-\alpha)D_r} \left[\frac{1 - \xi^{\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}+1} - \frac{1 - \xi^2}{2} + \phi(\sqrt{\alpha}, \eta) \left(\frac{1 - \xi^{\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}+1} + \frac{1 - \xi^{-\sqrt{\alpha}+1}}{\sqrt{\alpha}-1} \right) \right]$$

ただし, $\phi(\sqrt{\alpha}, \eta) = \frac{\eta^{2\sqrt{\alpha}} - \eta^{\sqrt{\alpha}+1}}{1 - \eta^{2\sqrt{\alpha}}}$. (15)

前と同様に $w_{\max}$ は上式にて $\xi=\eta$ とおいて得られる。

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{4\pi(\sqrt{\alpha}+1)^2 D_r} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1} \right)^2 \eta^2 + \frac{8\sqrt{\alpha}}{(\sqrt{\alpha}-1)^2} \eta^{\sqrt{\alpha}+1} + O(\eta^{2\sqrt{\alpha}}) \right] \quad (16)$$

上式の〔〕内第3項以下は通常省略できる。第2項以下は中央剛体部分の存在による撓み剛性の増加効果を示すものである。

3. Non-linear 特性の近似解析. diaphragm は有限撓みになると面内の2次的張力が生じ, ために剛性の増加を来す。この effect を一様 pressure をうける場合について energy 法により計算しよう。

膜力 N_r , N_θ と面内伸び歪 ϵ_r , ϵ_θ についての弾性法則は,

$$\begin{cases} N_r = H_r(\epsilon_r + \nu_0 \epsilon_\theta) \\ N_\theta = H_\theta(\epsilon_\theta + \nu_r \epsilon_r) \end{cases} \quad (17)$$

ここに相反定理から

$$\nu_r/E_r = \nu_\theta/E_\theta. \quad (18)$$

いま $E_r/E_\theta = \nu_r/\nu_\theta = \zeta$ とおくと,

$$H_r/H_\theta = \zeta. \quad (19)$$

また,

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (20)$$

外荷重によって diaphragm 内に蓄えられる歪エネルギーは曲げ歪エネルギー V_B と, 面内歪エネルギー V_A との和である。

$$V_B = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b (M_r \kappa_r + M_\theta \kappa_\theta) r dr d\theta.$$

(1), (2) を用いて変形すると,

$$= \pi \int_a^b \left[D_r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + D_r \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 + 2D_r \mu_0 \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right) \right] r dr \quad (21)$$

同様に,

$$V_A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b (N_r \epsilon_r + N_\theta \epsilon_\theta) r dr d\theta.$$

(17), (18), (20) を用いて変形すると

$$= \pi \int_a^b \left[H_r \left\{ \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right\}^2 + H_\theta \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right] r dr$$

$$+ 2H_r \nu_0 \left\{ \frac{u}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right\} r dr \quad (22)$$

いま撓み形として次の如く選ぶ。

$$w = w_0(1 - x^2)^2. \quad (23)$$

ここで、

$$r = a_0(x + y).$$

(23) 式は $e=0$ の場合、等方性円盤が一様圧力 p をかけたときの撓み式で、 w_0 は $w_{\max}$ を意味する。これを (21) 式に代入し新変数 x についての積分形に直し演算を行うと容易に、

$$V_B = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{w_0}{a_0} \right)^2 D_r [\alpha g_1(y) + 3g_2(y)]. \quad (24)$$

ただし、

$$\begin{cases} g_1(y) = 1 - \frac{16}{5}y - \frac{9}{2}y^2 + 10y^3 - 3y^4 - 6y^5 \\ \quad + 6y^2(1-y^2) \log \frac{1+y}{y}, \\ g_2(y) = 1 + \frac{8}{5}y. \end{cases}$$

また (22) 式において u を次の形に仮定する。

$$u = a_0 x(1-x)(C_0 + C_1 x). \quad (25)$$

ここに C_0, C_1 は未定係数である。

(23), (25) を用いて (22) の積分を遂行し、 $V_A \rightarrow \min.$ の条件から C_0, C_1 を決定するといずれも w_0^2/w_0^2 の order になることが確かめられる。かくして V_A の積分結果において、この面内変位 u の effect は $\ll 1$ なる限り、垂直撓み w の non-linear effect に對し、充分の精度で無視することができる。したがって (22) は

$$V_A = \pi H_r \frac{w_0^4}{a_0^2} \cdot f(y). \quad (26)$$

$$\text{ここに、} \quad f(y) = \frac{64}{210} + \frac{8192}{15015} y. \quad (27)$$

他方外力のなす仕事 W は、

$$W = 2\pi p \left[\int_0^e w_0 r dr + \int_e^a w r dr \right] = \frac{\pi p a_0^2 w_0}{3} g_3(y). \quad (28)$$

$$\text{ここに、} \quad g_3(y) = 1 + \frac{16}{5}y + 3y^2. \quad (29)$$

仮想仕事の原理から、

$$\frac{d(V_A + V_B)}{dw_0} = \frac{dW}{dw_0} \quad (30)$$

上式に (24), (26), (28) を代入して計算すると、求める non-linear 撓み公式を得る。すなわち、

$$w_0 = \frac{p a_0^4 g_3}{16(\alpha g_1 + 3g_2) D_r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4} w_0^2 \frac{H_r f}{D_r(\alpha g_1 + 3g_2)}} \quad (31)$$

ここに g_1, g_2, g_3, f なる値はいずれも parameter y のみに依存する。

ゆえに、(31) 式において non-linear factor を省くと (10) 式に対する近似公式を得る。

$$w_0 = \frac{p a_0^4 g_3}{16(\alpha g_1 + 3g_2) D_r}. \quad (32)$$

以上は p 場合についての解析であるが、同じ diaphragm が集中荷重 P を受ける場合にも、もし撓み形として同じ (23) 式を仮定すれば P 場合の近似公式を得ることができる。(ただし本来ならば w として P 荷重による等方性板の撓み形を用いる方がより望ましい) この場合 W としては、(28) の代りに、

$$W = P w_0$$

とおきかえるだけで良い。かくして

$$w_0 = \frac{3 P a_0^2}{16\pi(\alpha g_1 + 2g_2) D_r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4} w_0^2 \frac{H_r f}{D_r(\alpha g_1 + 3g_2)}} \quad (33)$$

4. 等価弾性常数の estimation.

以上の解析は板厚 h の直交異方性板についての所論であるから、実際の corrugated diaphragm の材料および寸法から、これと等価な異方性板に置き換えるための弾性常数の評価が問題になる。

1) E_0, H_0 . 第3図のような $1/2$ 波長 l について θ の方向 (母線方向) の伸長剛性の平均値をとる。

第3図 波板の母線方向引張り

$$H_0 = E_0 h = \frac{h s_0 E}{l} \quad (34)$$

ただし、 s_0 = 半波分の弧長。

ゆえに、

$$E_0 = E \frac{s_0}{l} = E \frac{1}{l} \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2} dr \quad (35)$$

特に波型が正弦波なるとき、すなわち

$$z = b \sin \frac{\pi r}{l}, \quad (36)$$

(35) の右辺の積分は l が比較的小なる場合は次の如く計算される。

$$\frac{E_0}{E} = 1 + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{64} \lambda^4 + \frac{5}{256} \lambda^6 - \dots \quad (37)$$

2) E_r, H_r . $1/2$ 波長部分 (単位幅) が両端に張力 T をうけるときの r 方向伸歪の半波長についての平均を等価歪とする。 T による歪エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2Eh} \int_0^{s_0} T^2 \cos^2 \lambda ds + \frac{1}{2E} \frac{h^3}{12} \int_0^{s_0} T^2 z^2 ds.$$

第4図 波板のr方向引張り

Castigliano の定理から r 方向の変位 δ は

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{T}{Eh} \left[\int_0^l \frac{dr}{\sqrt{1+z'^2}} + \frac{12}{h^2} \int_0^l z'^2 \sqrt{1+z'^2} dr \right]$$

等価歪; $\epsilon_r = \delta/l$, よって等価伸長剛性は

$$H_r = E_r h = Tl/\delta$$

ゆえに,

$$\frac{E}{E_r} = \frac{1}{l} \left[\int_0^l \frac{dr}{\sqrt{1+z'^2}} + \frac{12}{h^2} \int_0^l z'^2 \sqrt{1+z'^2} dr \right] \quad (38)$$

正弦波型の場合には

$$\frac{E}{E_r} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{9}{64} \lambda^4 - \frac{25}{256} \lambda^6 + \dots \right) + 6 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^4}{64} + \frac{5}{1024} \lambda^6 - \dots \right) \quad (39)$$

上式中第1項は第2項に対して通常無視できる。

3. D_θ . r 軸周りの曲げ剛性の平均値をとる. 同じく半波について,

$$D_\theta = \frac{EI_\theta}{l} = E \int_0^l z^2 ds = E \int_0^l z^2 \sqrt{1+z'^2} dr \quad (40)$$

正弦波型に対しては

$$D_\theta = \frac{Eb^3h}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^4}{64} + \dots \right). \quad (41)$$

4) D_r . 両端に曲げモーメント M をうける半波部 (単位幅) の曲率変化の平均を等価曲率変化とすれば,

$$\bar{\kappa}_r = \frac{M}{E(h^3/12)} \int_0^{s_0} ds / l = \frac{M}{Eh^3/12} \cdot \frac{s_0}{l}.$$

$$\text{よって, } D_r = \frac{Eh^3}{12} \frac{l}{s_0} \quad (42)$$

正弦波型では,

$$D_r = \frac{Eh^3}{12} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{64} \lambda^4 + \frac{5}{256} \lambda^6 - \dots \right) \quad (43)$$

かくして,

$$\alpha = \frac{D_\theta}{D_r} = 6 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{8} \lambda^2 - \frac{1}{32} \lambda^4 + \dots \right). \quad (44)$$

5) $\nu_\theta, \nu_r, \mu_\theta, \mu_r$. 波板が θ 方向にのみ一様張力 N_θ をうけると, Hooke 則から,

$$\epsilon_r = -\frac{\nu_\theta}{hE_\theta} N_\theta, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{hE_\theta} N_\theta.$$

これに対し, 波板の微小片 (等方性弾性体) について

第5図 波板素片の引張す

$$\epsilon_r = -\frac{\nu}{hE} n_\theta, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{hE} n_\theta.$$

しかるに等価条件; (4. 1. の項参照)

$$E_\theta = Es_\theta/l, \quad N_\theta = s_\theta n_\theta/l$$

から, $e_\theta = \epsilon_\theta$. また r 方向に歪の等価条件;

$$\epsilon_r = \frac{\delta}{l} = \frac{1}{l} \int_0^{s_0} \epsilon_r ds \cos \Lambda = \frac{e_r}{l} \int_0^l dr = e_r.$$

を附与すれば, $\epsilon_r = e_r \nu_\theta / \nu$ であるから,

$$\nu_\theta = \nu. \quad (45)$$

かくして相反定理より $\nu_r = E_r \nu / E_\theta \ll \nu$.

これから H_θ, H_r の評価式に附加すべき $1/(1-\nu_\theta \nu_r)$ なる係数において $\nu_r \nu_\theta = E_r \nu^2 / E_\theta \ll 1$ なるゆえ, 充分の精度で, $1/(1-\nu_\theta \nu_r) \sim 1$ において良い。

また全く同様にして曲げのポアソン比についても $\mu_\theta = \nu$ を得る. したがって, $\mu_r = \nu D_r / D_\theta = \nu / \alpha \ll \nu$ なる事が示されるから, 同じく D_r, D_θ の評価式の係数も $1/(1-\mu_\theta \mu_r) \sim 1$ として良い。

5. 強度

以上は等価直交異方性板についての解析であるから, それから導かれる応力分布は半波長についての平均的な意味をもつもので必ずしも波型板の局部応力を表わすものではない. しかし解析結果としての変形状態を改めて与えられたものと見做すことによって, 合理的に局部応力を算定することができる。

1) p-場合. 表式 (9) を (2) 式に代入して得られる κ_r, κ_θ に対し,

beam theory (ポアソン比省略) から波板上下面の局部応力を次のように決定することができる. すなわち

$$\sigma_r \sim \pm \frac{hE}{2} \kappa_r = \pm \frac{pa^2 hE}{4(9-\alpha)D_r} [(1+\varphi)\sqrt{\alpha}\xi^{\sqrt{\alpha}-1} - 3\xi^2 + \sqrt{\alpha}\varphi\xi^{\sqrt{\alpha}-1}] \quad (46)$$

$$\sigma_\theta \sim z f(\xi) E \kappa_\theta = \frac{pa^2 z f(\xi) E}{2(9-\alpha)D_r} [(1+\varphi)\xi^{\sqrt{\alpha}-1} - \xi^2 - \varphi \cdot \xi^{\sqrt{\alpha}-1}] \quad (47)$$

第6図 波板素片にかかる荷重と応力

(46) から $|\sigma_r| \left(\sim |M_r| \frac{hE}{2D_r} \right)$ の極大値を求めると,

$\eta=0$ の場合は簡単な計算の結果,

$$|\sigma_r|_{\max} = \frac{3pa^2hE}{4(\sqrt{\alpha}+3)(\sqrt{\alpha}-1)D_r} \xi_r^{*3}. \quad (48)$$

ただし,

$$\xi_r^* \sqrt{\alpha-3} = 6/(\alpha - \sqrt{\alpha}), \quad (\sqrt{\alpha} > 3 \text{ にて}).$$

この ξ_r^* の位置は第7図に示すように $\sqrt{\alpha}$ が増すにつれて周縁部に移行する性質がある。 $|\sigma_r|$ の最大値は, $\xi=1$ (周縁部) にて起り, その値は

$$|\sigma_r|_{\xi=1} = pa^2hE/4(\sqrt{\alpha}+3)D_r. \quad (49)$$

第7図 $\xi_r^* \xi_r^* \sim \sqrt{\alpha}$ 曲線 (p 場合)

次に $|\sigma_\theta| \left(\sim M_\theta \frac{z_f E}{D_\theta} \right)$ の max. の位置は $z_f(\xi)$ のために必ずしも $M_\theta \max$ のそれとは一致しないが大体その近傍になることは明らかである。同じく $\eta=0$ の場合,

$$|\sigma_\theta|_{\max} \sim \frac{pa^2E(b + \frac{h}{2})}{2(\sqrt{\alpha}+3)(\sqrt{\alpha}-1)D_r} \xi_\theta^{*3} \quad (50)$$

ただし, $\xi_\theta^* \sqrt{\alpha-3} = 2/(\alpha - \sqrt{\alpha})$, ($\sqrt{\alpha} > 3$ にて).

ξ_θ^* の位置も ξ_r^* と同様に $\sqrt{\alpha}$ が増加するとともに単調に周縁部に漸近する。 M_r , M_θ 分布形は第8, 9図に示す。

(48), (50) から, $|\sigma_\theta|_{\max}$ と $|\sigma_r|_{\max}$ の比をとると,

$$|\sigma_\theta|_{\max}/|\sigma_r|_{\max} \sim O\left(\frac{2}{3} \frac{b}{h}\right)$$

また (49), (50) から $h/b \doteq \sqrt{6}/\sqrt{\alpha}$ に注意して

$$\begin{aligned} \frac{|\sigma_r|_{\xi=1}}{|\sigma_r|_{\max}} &\sim O\left(\frac{(\sqrt{\alpha}-1)h}{2b \cdot \xi_r^{*3}}\right) \\ &\sim O\left(\frac{\sqrt{3}(1-1/\sqrt{\alpha})}{\sqrt{2} \xi_\theta^{*3}}\right) > 1 \end{aligned} \quad (51)$$

これから通常の diaphragm では $|\sigma_r|_{\xi=1}$ が最大になるから強度は (49) 式から検討することができる。また特に注意すべきことは (50) において σ_θ は ξ_θ^* 位置近傍にて局部的に負の最大値をもつから局部挫屈現象の起る可能性が指摘できることである。

第8図 M_r 分布曲線

第9図 M_θ 分布曲線

2. P -場合 p -場合と全く同様に μ_θ, μ_r の effect を省略し, ψ の leading term のみを探れば, 局部応力は, 近似的に次の如く表わされる。

$$\sigma_r \sim \pm \frac{h}{2} E \kappa_r \doteq \pm \frac{PhE}{4\pi(\alpha-1)D_r} \left[1 - \sqrt{\alpha} \xi^{\sqrt{\alpha}-1} + \sqrt{\alpha} \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^{\sqrt{\alpha}+1} \right] \quad (52)$$

$$\sigma_\theta \sim z_f(\xi) E \kappa_\theta \doteq z_f(\xi) \frac{PE}{2\pi(\alpha-1)D_r} \left[1 - \xi^{\sqrt{\alpha}-1} - \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^{\sqrt{\alpha}+1} \right] \quad (53)$$

σ_r は単調減少。

$$\sigma_r(\xi=1) \doteq \mp PhE/4\pi(\sqrt{\alpha}+1)D_r$$

$$\sigma_r(\xi=\eta) \doteq \pm PhE/4\pi(\sqrt{\alpha}-1)D_r \quad (54)$$

ゆえに $\xi=\eta$ にて $|\sigma_r|$ が最大値をとる。

他方 $|\sigma_\theta|_{\max}$ は (53) 式から容易に

$$|\sigma_\theta|_{\max} \sim \frac{P(b+h/2)E}{2\pi(\alpha-1)D_r} \left[1 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+1} \xi_\theta^{*\sqrt{\alpha}-1} \right] \quad (55)$$

ここに,

$$\xi_\theta^{*2\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1} \eta^{\sqrt{\alpha}+1}, \quad (\eta \leq \xi_\theta \leq 1).$$

M_r , M_θ 分布を第10, 11図に示す。

いま (54), (55) 式の比をとると, $h/b \doteq \sqrt{6}/\sqrt{\alpha}$

第10図 M_r 分布曲線 第11図 M_θ 分布曲線

に注意して,

$$\frac{|\sigma_\theta|_{\max}}{|\sigma_r|_{\xi=\eta}} \sim O\left(\frac{2b}{(\sqrt{\alpha}+1)h}\right) \sim O\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+1}\right) < 1$$

よって, この場合も $|\sigma_r|_{\xi=\eta}$ が最大応力になるから, (54) 式から強度が検討できる. また局部座屈現象の可能性も同様に指摘される.

6. 実験と数値例

以上の解析に対する確かめの実験を行った. 試験片は磷青銅製の corrugated diaphragm で寸法諸元は第1表のとおりである. 実験は p -場合および P -場合につき行った. Pressure は第12図の如く一端を閉じたU字管にアルコールを入れ, 他端からの圧力 p による液面の高さの変動を読むことによって, calibration curve から圧力 p を算出する方法をとった. この方法はせいぜい2気圧程度までの圧力測定には簡便である. 集中荷重としては分銅 (最小 0.1kg) を用いた. (第13図)

変位は1ピッチ間隔に dial gage にて 10^{-2} mm の精度で測定. また歪は A-I, II 型試験片について gage length 3~4mm ($G.F.=1.65\sim 1.68$) の wire

第12図 圧力計測装置

strain gage を用いて測定した. 歪測定位置は第14図に示すように, 表裏4箇所計8箇所の読みをとった.

中央剛体部は半径 e , 板厚 1mm の円形鉄板を高さ 4mm 離して試験片の中央部にハンダ付したもので, 曲げ剛性および引張剛性とも“剛体”と見做せるようにした. 試験片の周辺は固定条件を満足するように, 鋼鉄製枠組に厚さ 2mm のゴム・パッキンを試験片と重ねて入れ8本の植込ボ

第13図

荷重装置 (P)

第14図 歪測定箇所

第15図 A-I, A-IIの撓み特性
実験結果 (p -場合)

第1表 試験片の寸度, および撓み特性表

諸 元	A-I	A-II	A'-I	A'-II	B-I	B-II
h (mm)	0.2	0.4	0.2	0.4	0.1	0.2
b (mm)	0.85	0.85	0.677	0.670	0.360	0.341
e (mm)	18	18	18	18	5.5	5.5
a (mm)	78	78	78	78	22	22
l (mm)	6	6	6	6	5.5	5.5
$\sqrt{a}$	10.765	5.378	8.473	4.196	8.89	4.11
D_r (kg·mm)	8.559	68.472	8.700	69.64	1.11	8.88
(10) 式; w_0/p (mm ³ /kg)	3.299×10^3	1.242×10^3	—	—	($\eta=0$); 0.224×10^3	($\eta=0$); 0.0905×10^3
(16) 式; w_0/P (mm/kg)	—	—	0.5671	0.2474	—	—
(31) 式; w_0/p (mm ³ /kg)	A-I, ($\zeta=0.00855$) $3.25 \times 10^3 / (1 + 0.0152 w_0^2)$			A-II, ($\zeta=0.0333$) $1.350 \times 10^3 / (1 + 0.0492 w_0^2)$		

第2表 応力特性表

計 算 諸 元			p -Case		P -Case	
			A-I	A-II	A'-I	A'-II
z_1	z_2	(mm)	0.95, 0.75	1.05, 0.65	0.777, 0.577	0.870, 0.470
η	ξ_1 , ξ_2	(kg/mm ²)	$\eta=0.2398$, $\xi_1=0.462$, $\xi_2=0.923$ 1.345×10^4			
σ_r (kg/mm ²)	G_1 (ξ_1 , $+h/2$)		$+2.833 \times 10^3 \times p$	$+2.761 \times 10^3 \times p$	$+0.3418 \times P$	$+0.2814 \times P$
	G_1 (ξ_2 , $-h/2$)		$-2.833 \times "$	$-2.761 \times "$	$-0.3418 \times "$	$-0.2814 \times "$
	G_2 (ξ_2 , $+h/2$)		$-10.608 \times "$	$-7.393 \times "$	$-1.269 \times "$	$-0.8315 \times "$
	$\bar{G}_2$ (ξ_1 , $-h/2$)		$+10.608 \times "$	$+7.393 \times "$	$+1.269 \times "$	$+0.8315 \times "$
σ_θ (kg/mm ²)	G_3 (ξ_1 , z_1)		$+9.027 \times "$	$+5.622 \times "$	$+1.341 \times "$	$+0.7151 \times "$
	$\bar{G}_3$ (ξ_1 , z_2)		$+7.127 \times "$	$+3.408 \times "$	$+0.996 \times "$	$+0.38\epsilon 3 \times "$
	G_4 (ξ_2 , z_1)		$+16.76 \times "$	$+4.650 \times "$	$+0.696 \times "$	$+0.1812 \times "$
	$\bar{G}_4$ (ξ_2 , z_2)		$+13.23 \times "$	$+2.879 \times "$	$+0.450 \times "$	$+0.0979 \times "$

ルト (径 6φ) で充分強く締付け, 合せて気密になるようにした。ここで特に注意すべきことは板厚 h と波高 b の値が特性に及ぼす影響はきわめて大きいこと (撓み感度は $b^2 \times h$ に大略逆比例)。したがってその寸度は実験前に 10^{-3} mm の精度で各ビッチごとに測定し, 公称の値はそれらの平均値をとった。以上の試験片についての数値計算結果を第1, 2表に示す。(注;

第16図 A'-I の撓み特性実験結果 (P -場合) 第17図 A'-II の撓み特性実験結果 (p -場合)

第2表の P -場合において、計算と実験とは P の方向が逆になっているから数値結果の符号が変わることに注意.)

7. 実験と解析との比較、および結論

第15~24図で見られるように、解析と実験との一致は大体良好である。以下に結論をまとめると、

(1) corrugated diaphragm の撓み特性 (p , P 場合とも) は同形、同板厚の平板に比較して、微小変位ではむしろ大きな剛性を示すが、大変位では平板が二次的張力によって急に剛性が增大するのに対し、比

第18図 B-I の撓み特性実験結果 (P -場合)

第19図 B-II の撓み特性実験結果 (P -場合)

第20図 A-I (G_2) の応力特性
実験結果 (p -場合)

較的 linear で剛性増加率が小で、したがって剛性の大小が逆転する。この non-linear factor は (31) 式から $1 + O(h^2 w_0^2 / b^4)$ 。すなわち、板厚が小さく、corrugation が深くなるにつれて、撓み特性は線型化されることになる。

(2) したがって公式としては実用上 linear theory が重要で p , P 場合に対し、それぞれ公式 (10), (16) 式を導いた。またこれらはともに実験結果と比

第21図 A-I (G_3) の応力特性
実験結果 (p -場合)

第22図 A-II (G_2) の応力特性
実験結果 (p -場合)

第23図 A'-I (G_2) の応力特性
実験結果 (P -場合)

第24図 A'-II ($\bar{\sigma}_0$) の応力特性
実験結果 (P-場合)

較して良い一致を示すことを確かめた。かつエネルギー法による non-linear theory も精度の良い近似式を与えることを知った。ただし板厚 h が小さくなるにつれて、解析 (特に P 場合) の方が実験曲線よりもやや大きな剛性を与える傾向が見られるのは、本解析には考慮しなかった shear deformation effect と考えられる。

(3) 実験曲線 ($p \sim w_0$) は比較的大きな変位で非線型性が見られるが、($P \sim w_0$) 曲線はこれに反し、かなりまで線型特性を示すのは興味深い。また試験片を裏返しにした場合、撓み特性が多少変るのは、本来 diaphragm 形状のもっている非対称性のためよりはむしろ試験片の initial deflection effect と考えられる筋がある。

(4) 撓み剛性は大体 $h \times b^2$ に比例する。公式 (10), (16) 式において、 b の値は剛性評価には相当

sensitive であるから計器としての diaphragm の波高 b が工作上あるいは取扱上少しでも変化すると特性は大きく変ってくることに注意を要する。

(5) p , P 場合の応力分布および最大応力の簡単な評価式を与え、これらが実験結果と良く合うことを確かめた。

(6) p , P 場合とも local buckling 現象の起り得ることを指摘した。すなわち周方向の曲げ応力 σ_r が荷重の方向と反対側の波型頂点で負 (圧縮応力) になることを解析的にも実験的にも確かめた。この不安定現象は計器の critical load を決定するので設計上重要である。今後の問題としたい。

結 語

終りに本研究に有益なる助言を賜った東大航空学教室林毅教授ならびに試験片調達に当って御配慮を賜った東京計器製造所 K. K. の山口隆雄技師長、金子敏夫技師、中大工学部古川浩講師また実験に協力された中大工学部高岸俊夫助手に厚く謝意を表する次第である。

本研究は昭和28年度文部省科学研究費 (S. M. R. C.) と、同じく昭和29年度 (C. A. S.) の研究費の一部にて為されたものであることを附言する。

文 献

- 1) E. Warburg: Z. für Instrumentenkunde Bd. 39, Nr. 2, 1919, s. 41-55.
- 2) Mayo, D. Hersey: NACA. T. Rep. No. 165, 1923. p. 155-186.
- 3) K. Stange: Ing. Archiv. Bd. 2, 1931, s. 47-91.
- 4) E. Reissner: Symp. app. Math. 1950, p. 27-52.
- 5) R. A. Clark: J. Math. Phys. 1950/11, p. 146-178.
- 6) R. A. Clark, E. Reissner: Quart. ly. app. Math. No. 1 1953. p. 335-346.

評 価

本書は8つの部に大別されており、第1部は搜索救難組織に関する記載で、飛行情報区域 (FIR) との関係考慮しつつ搜索救難管区 (SRR) を決定し、救難調整局 (RCC) を設置し、搜索救難計画を立案するのに必要な事項を網羅している。

第2部は搜索救難作業に必要な装備に割当てており、同作業用の航空機、船艇、および物糧投下作業や地上海上の各機関のための補給所に備えるべき装備品について解説している。

第3部は搜索手続についてであって、情報の入手から警戒、搜索の開始、陸海空からする搜索作業の実施法、ならびにサン・ファン (プエルトリコ) で U. S. Coast guard が行った大規模な“搜索のための有効視程”に関する実験結果を収録し、更に生存者の位置

(295 頁に続く)

書

1952 年搜索救難便覧 (国際民間航空機関発行)
Search and Rescue Manual, Doc 7333-AN/859,
1952, International Civil Aviation Organization,
Montreal Canada, p 128+20

国際民間航空の発達した今日、航空機に対する搜索救難方式を世界的な規模で統一することは望ましいことであり、このため国際民間航空条約第12附属書に標準および勧告された方式が定められているが、これらはきわめて原則的なものであるから、これを補足するために、搜索救難作業のあらゆる方面について、かつ全世界を通じて適用できる実用的、経済的な詳細な知識を与える便覧を作成することが同機関の懸案であった。本書は、その最初の試みとして同機関の事務局がその効力について保証する手続を主体にして纏めたもので、今後の充実を期待すべき性質のものである。