coincidence in shapes is obtained for values of D/T_0 larger than 200 as may be seen in the left-hand figure. From this fact we may say that, for Mach Numbers very close to one, the shape and location of detached shocks are independent of wedge angle in every stage of their development. Griffith⁴⁾ describes in his paper the independence of the shape of detached shock waves and wedge angle in the steady transonic flow. It is found by the work presented here that Griffith's result is true for the unsteady state too.

The effect of Reynolds Number on detached shock waves has not been considered in the present work. This effect, however, appears to be large for thinner models¹⁾ and is to be investigated in future work.

3. Conclusions

From the results given above the following conclusions are drawn:

- a. The early stages of development of detached shock waves are considerably influenced by wedge angle.
- b. The shape of detached shock waves is less dependent on wedge angle as the flow Mach

Number approaches one.

- c. If the values of D/T_0 at which the geometrically similar models are tested are the same and if the shock-tube wall effect is not present in the flow field, the shapes of detached shock waves for the same Mach Number are the same.

These experiments were performed with the aid of the Collective Scientific Fund of the Education Ministry. The thanks of the senior author are due to Mr. D. H. Daley for his kind and careful correction of the manuscript throughout the preparation of it in English.

References

- 1) Iwasaki, M.: On the Errors of a Time Counting System for Use in Experiments with a Shock Tube, J. Japan Soc. Aero. Eng. Vol. 5, No. 40, (1957/5).
- 2) Iwasaki, M.: Shock-Tube Studies of the Development of Detached Shock Waves in the Transonic Flow, Pre-print of the Sixth Federated Lecture Meeting of Applied Mech. in Japan, No. 2, Hydro., (1956/10), p. 21, (in Japanese).
- 3) Iwasaki, M.: Studies of the Development of Detached Shock Waves in the Transonic Region with a Shock Tube (I), Techno. Rep. Kyushu Univ., Vol. 29, No. 1, (1956/8), p. 22, (in Japanese).
- 4) Griffith, W.: Shock-Tube Studies of Transonic Flow over Wedge Profiles, J. Aero. Sci., Vol. 19, No. 4, (1952/4), p. 249.

後退板翼の弾性特性についての実験と解析*

林 毅**・赤坂 隆***

The Experiments and Analysis on the Elastic Properties of the Swept-Back Wing Plate

Tsuyoshi HAYASHI and Takashi AKASAKA

Abstract

As a basic investigation on the swept-back wing plate of the high speed aeroplanes, the experiments on the elastic properties of the 30° swept back parallelogram wing plate with constant thickness in the two loading cases, i.e. (1) simple torsion, and (2) concentrated load were performed.

We analyzed the above two cases by $S-R-S$ method in which the deflection function $w(x, y)$ is assumed as follows,

$$w = f(x) + g_1(x) \cdot y + g_2(x) \cdot y^2,$$

and assured the good coincidence between the experimental results and the theoretical ones.

It is interesting to note in particular, that our analytical stress distribution agree well with the experiments, even when the swept back angle is 30°, and that the invariant axis, which may be called by the elastic axis referred to the aerodynamic chord, can be found when the aspect ratio of the wing is rather large.

1. 緒 言

高速航空機の後退板翼に対する基礎的研究として、一様板厚、平行四辺形後退板翼の弾性特性について、(1) 翼端における単純振り、および (2) 翼端における集中荷重場合の詳細なる実験を行った。また、それとともに、S-R-S 法¹⁾に基づく解析(撓みかん数として空力翼弦方向座標についての二次近似式をとった場合)を行い、実験結果とよく一致することを確かめた。

一般に、この種のエネルギー法は変形に対しては、よい近似を与えることが知られているが、応力分布に対しても(本実験例の如く後退角 30° でも)相当よい近似を与えることは注目すべきであろう。

更に、アスペクト比が比較的大なる場合の後退板翼の変形特性を支配するものとして、従来の弾性軸と同様な性質をもつ不変軸の存在が実験的にも、解析的にも立証し得られることは興味深い。

2. 解 析

(I) 単純振り場合 (II) 集中荷重場合
第1図 平行四辺形後退板翼の荷重場合

記 号

x, y = 第1図の如く、板の中立面において、翼弦中心線と固定端縁辺との交点を原点とする座標軸。

Λ = 後退角	$\xi = x/b$
b = 空力翼弦長	$\zeta = l/b$
l = 半スパン	M_t = 振りモーメント
t = 板厚	Q = 集中荷重
$k = \tan \Lambda$	$\bar{h}_m = M_t/2bD(1-\nu)$
ν = ポアソン比	$\bar{h}_q = Q/2D(1-\nu)$
E = ヤング率	$w_q = Q$ 荷重点の撓み
G = 剪断剛性率	$y_q = Q$ 荷重点の y 座標
D = 曲げ剛性	$\rho = y_q/b$
$= Et^3/12(1-\nu^2)$	Π = Pot. Energy.

$w(x, y)$ = 撓みかん数

(I) 単純振り場合

いま、前後縁線の方程式をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1(x) \equiv kx - b/2, \\ y &= C_2(x) \equiv kx + b/2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

とかくと、翼端 ($x=l$) に振りモーメント分布 M_{xy} が与えられたときの pot. energy は

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{D}{2} \int_0^l \int_{C_1(x)}^{C_2(x)} [(w_{xx} + w_{yy})^2 + 2(1-\nu) \\ &\quad \times (w_{xy}^2 - w_{xx} \cdot w_{yy})] dx dy \\ &\quad - \int_{C_1(l)}^{C_2(l)} M_{xy} w_y(l) dy. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、撓みかん数を次の形に仮定する。

$$w(x, y) = f(x) + y \cdot g_1(x) + y^2 \cdot g_2(x) \quad (3)$$

(3) を (2) に代入し、 $M_{xy} = M_t/b$ として

$$\delta \Pi = 0 \quad (4)$$

を計算すると、

$$\begin{aligned} &[\phi(x) \delta f']_0^l - [\phi'(x) \delta f]_0^l + \int_0^l \phi''(x) \delta f dx \\ &+ [\varphi_1(x) \delta g_1']_0^l - [\varphi_1'(x) \delta g_1]_0^l + \int_0^l \varphi_1''(x) \delta g_1 dx \\ &+ [\varphi_2(x) \delta g_2']_0^l - [\varphi_2'(x) \delta g_2]_0^l + \int_0^l \varphi_2''(x) \delta g_2 dx \\ &+ \int_0^l \alpha(x) \delta g_2 dx + [\beta_1(x) \delta g_1]_0^l - \int_0^l \beta_1'(x) \delta g_1 dx \\ &- \frac{M_t}{D} [\delta g_1 + \{C_1(l) + C_2(l)\} \delta g_2] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \phi(x) &\equiv f'' \cdot \bar{y} + g_1'' \cdot \bar{y}^2 + g_2'' \cdot \bar{y}^3 + 2\nu g_2 \cdot \bar{y} \\ \varphi_1(x) &\equiv f'' \cdot \bar{y}^2 + g_1'' \cdot \bar{y}^3 + g_2'' \cdot \bar{y}^4 + 2\nu g_2 \cdot \bar{y}^2 \\ \varphi_2(x) &\equiv f'' \cdot \bar{y}^3 + g_1'' \cdot \bar{y}^4 + g_2'' \cdot \bar{y}^5 + 2\nu g_2 \cdot \bar{y}^3 \\ \beta_1(x) &\equiv 2(1-\nu)(g_1' \cdot \bar{y} + 2g_2' \cdot \bar{y}^2) \\ \beta_2(x) &\equiv 4(1-\nu)(g_1' \cdot \bar{y}^2 + 2g_2' \cdot \bar{y}^3) \\ \alpha(x) &\equiv 2\{ \nu(f'' \cdot \bar{y} + g_1'' \cdot \bar{y}^2 + g_2'' \cdot \bar{y}^3) + 2g_2 \cdot \bar{y} \} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、

$$\bar{y}^m = \left[\frac{y^m}{m} \right]_{C_1(x)}^{C_2(x)} = \frac{1}{m} [C_2^m(x) - C_1^m(x)] \quad (7)$$

(5) 式から、基礎方程式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \phi''(x) &= 0 \\ \varphi_1''(x) - \beta_1'(x) &= 0 \\ \varphi_2''(x) - \beta_2'(x) + \alpha(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また、幾何学的境界条件として、附根は固定、翼端では空力翼弦に沿って荷重用アングル材があるものとし、その曲げ剛性 ∞ 、振り剛性 ∞ とすれば、

$$\begin{aligned} w(0, y) &= 0, & w_{yy}(l, y) &= 0 \\ w_x(0, y) &= 0, & w_{xy}(l, y) &= 0 \end{aligned}$$

となるから、

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= g_1(0) = g_2(0) = 0 \\ f'(0) &= g_1'(0) = g_2'(0) = 0 \\ g_2(l) &= 0, & g_1'(l) &= g_2'(l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

* 昭和 31 年 11 月 10 日、日本航空・機械学会連合「航空機の構造に関する講演会」にて講演。昭和 32 年 4 月 19 日原稿受理

** 東京大学工学部

*** 中央大学工学部

また、(5) 式から自然境界条件として

$$\left. \begin{aligned} \psi(l) &= \psi'(l) = 0 \\ \beta_1(l) - \varphi_1'(l) &= M_l/D. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(8) 式と (10) 式とから、

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= 0, \\ \varphi_1'(x) - \beta_1(x) &= -M_l/D, \\ \varphi_2''(x) - \beta_1'(x) + \alpha(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

ここで、(8') の第1式と (6) の第1式から、

$$f'' + 2\nu g_2 = -(\bar{y}^2 \cdot g_1'' + \bar{y}^3 \cdot g_2'')/\bar{y}, \quad (11)$$

また、ここで新たに、

$$h(x) \equiv g_1'(x) + 2kxg_2'(x) \quad (12)$$

とにおいて、(7) を考慮すれば、(6) 式の $\varphi_1, \varphi_2, \beta_1, \beta_2, \alpha$ なる諸かん数は次のように、 $h(x)$ と $g_2(x)$ のみで表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{b^3}{12} \{h'(x) - 2kg_2'(x)\} \\ \varphi_2(x) &= \frac{b^3 kx}{6} \{h'(x) - 2kg_2'(x)\} + \frac{b^5}{180} g_2''(x) \\ \beta_1(x) &= 2(1-\nu)b \cdot h(x) \\ \beta_2(x) &= 4(1-\nu) \left\{ b k x h(x) + \frac{b^3}{6} \cdot g_2'(x) \right\} \\ \alpha(x) &= 4(1-\nu^2) b g_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

これらを (8') 式の第2, 第3式に代入することによって、 $h(x), g_2(x)$ なる二かん数についての常数係数の連立微分方程式を得る。更に変数を x から ξ にかえると、結局、

$$\left. \begin{aligned} h - 2k\xi g_2 - 24(1-\nu)h &= -12M_l/bD \\ g_2^{(4)} - 120(1-\nu)g_2 + 720(1-\nu^2)g_2 \\ &+ 720(1-\nu)kh = 720kM_l/bD \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、 $(\cdot) \equiv d/d\xi$ 。 (13) 式に、 $g_2 \equiv Ae^{\lambda\xi}, h(x) \equiv Be^{\lambda\xi}$ を代入すると、 λ の決定方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \lambda^3 - 6(1-\nu)\lambda^2 + \frac{5}{4}(1-\nu)(5-3\nu+2k^2)\lambda \\ - \frac{5}{4}(1-\nu)(1-\nu^2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ただし、 $\eta \equiv \lambda^2/24$ 。

(14) 式の三つの根は常に正、したがって λ の6個の根はともに実数になることが容易に確かめられる。かくして、(13) 式の一般解は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} g_2(x) &= \sum_{i=1}^3 (A_i \text{sh} \lambda_i \xi + \bar{A}_i \text{ch} \lambda_i \xi) + \frac{k}{1+\nu} \cdot \bar{h}_m \\ h(x) &= \sum_{i=1}^3 (A_i \text{sh} \lambda_i \xi + \bar{A}_i \text{ch} \lambda_i \xi) \omega_i + \bar{h}_m \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここに、 $A_i, \bar{A}_i$ は未定常数、

$$\omega_i \equiv 2k\lambda_i^2 / \{\lambda_i^2 - 24(1-\nu)\}. \quad (15')$$

(15) を (11), (12) 式に代入することによって、 $f(x), g_1(x)$ は以下のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -b^2 \sum_{i=1}^3 \left[A_i \left\{ \left(\frac{1}{12} - \frac{2k\omega_i + 2(k^2 - \nu)}{\lambda_i^2} \right) \text{sh} \lambda_i \xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k(2k + \omega_i)}{\lambda_i} \xi \text{ch} \lambda_i \xi - k^2 \xi^2 \text{sh} \lambda_i \xi \right\} \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}_i \left\{ \left(\frac{1}{12} - \frac{2k\omega_i + 2(k^2 - \nu)}{\lambda_i^2} \right) \text{ch} \lambda_i \xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k(2k + \omega_i)}{\lambda_i} \xi \text{sh} \lambda_i \xi - k^2 \xi^2 \text{ch} \lambda_i \xi \right\} \right] \\ &\quad - \frac{\nu k}{1+\nu} b^2 \xi^2 \cdot \bar{h}_m + C_2 \xi + C_3, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(x) &= b \sum_{i=1}^3 \left[A_i \left(\frac{2k + \omega_i}{\lambda_i} \text{ch} \lambda_i \xi - 2k \xi \text{sh} \lambda_i \xi \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}_i \left(\frac{2k + \omega_i}{\lambda_i} \text{sh} \lambda_i \xi - 2k \xi \text{ch} \lambda_i \xi \right) \right] \\ &\quad + b \xi \bar{h}_m + C_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

積分常数 C_1, C_2, C_3 はそれぞれ $g_1(0) = f'(0) = f(0) = 0$ から決定される。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -b \sum_{i=1}^3 A_i \frac{2k + \omega_i}{\lambda_i}, \\ C_2 &= -b^2 \sum_{i=1}^3 A_i \frac{k\omega_i - 2\nu}{\lambda_i}, \\ C_3 &= b^2 \sum_{i=1}^3 \bar{A}_i \left(\frac{1}{12} - \frac{2k\omega_i + 2(k^2 - \nu)}{\lambda_i^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$A_i, \bar{A}_i$ ($i=1, 2, 3$) なる6個の未定係数は (9) 式の残りの6個の条件から決定される。これを整理すると、次のように表わされる。すなわち、

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1 \\ \lambda_1, & 0, & \lambda_2, & 0, & \lambda_3, & 0 \\ 0, & \omega_1, & 0, & \omega_2, & 0, & \omega_3 \\ \text{sh} \lambda_1 \xi, & \text{ch} \lambda_1 \xi, & \text{sh} \lambda_2 \xi, & \text{ch} \lambda_2 \xi, & \text{sh} \lambda_3 \xi, & \text{ch} \lambda_3 \xi \\ \lambda_1 \text{ch} \lambda_1 \xi, & \lambda_1 \text{sh} \lambda_1 \xi, & \lambda_2 \text{ch} \lambda_2 \xi, & \lambda_2 \text{sh} \lambda_2 \xi, & \lambda_3 \text{ch} \lambda_3 \xi, & \lambda_3 \text{sh} \lambda_3 \xi \\ \omega_1 \text{sh} \lambda_1 \xi, & \omega_1 \text{ch} \lambda_1 \xi, & \omega_2 \text{sh} \lambda_2 \xi, & \omega_2 \text{ch} \lambda_2 \xi, & \omega_3 \text{sh} \lambda_3 \xi, & \omega_3 \text{ch} \lambda_3 \xi \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \bar{A}_1 \\ A_2 \\ \bar{A}_2 \\ A_3 \\ \bar{A}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -k \bar{h}_m / (1+\nu) \\ 0 \\ -\bar{h}_m \\ -k \bar{h}_m / (1+\nu) \\ 0 \\ -\bar{h}_m \end{array} \right] \quad (19)$$

(19) 式をとくには、以下のようにすればよい。まず、 $\text{sh}\lambda_i\xi \doteq \text{ch}\lambda_i\xi \doteq e^{\lambda_i\xi/2}$ とし、更に、

$$A_i + \hat{A}_i \doteq 2m_i \bar{h}_m e^{-\lambda_i\xi} \quad (20)$$

とおけば、 m_i についての方程式は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k/(1+\nu) \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

で与えられる。ここで $A_i + \hat{A}_i$ は $e^{-\lambda_i\xi}$ の order であるから、 $A_i + \hat{A}_i \doteq 0$ と考えれば、(19) 式から、 $\hat{A}_i/\bar{h}_m$ については (21) 式と同じ方程式になって、

$$\hat{A}_i \doteq m_i \bar{h}_m \quad (22)$$

を得る。

(II) 集中荷重場合

前項と全く同様にして次の基礎方程式を得る。(13) 式と比較して、斉次項は全く同じである。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \bar{h} - 2k\bar{g}_2 - 24(1-\nu)h &= -12Q(\rho + k\xi - 2k\xi)/D \\ \bar{g}_2 - 120(1-\nu)\bar{g}_2 + 720(1-\nu^2)g_2 + 720(1-\nu)kh & \\ = 360Q\{2k\rho + (k^2-\nu)\xi - (3k^2-\nu)\xi^2/D \} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

したがって、この解も前項の解と比較して特解部分のみ変化しているにすぎない。すなわち、

$$g_2 = \sum_{i=1}^3 (A_i \text{sh}\lambda_i\xi + \hat{A}_i \text{ch}\lambda_i\xi) + \frac{\bar{h}_q}{1+\nu} \{ (k\rho - \nu\xi) - (k^2 - \nu)\xi \} \quad (24)$$

$$h = \sum_{i=1}^3 \omega_i (A_i \text{sh}\lambda_i\xi + \hat{A}_i \text{ch}\lambda_i\xi) + \bar{h}_q \{ (\rho + k\xi) - 2k\xi \} \quad (25)$$

$$g_1 = b \sum_{i=1}^3 \left\{ A_i \left(\frac{2k + \omega_i}{\lambda_i} \text{ch}\lambda_i\xi - 2k\xi \text{sh}\lambda_i\xi \right) + \hat{A}_i \left(\frac{2k + \omega_i}{\lambda_i} \text{sh}\lambda_i\xi - 2k\xi \text{ch}\lambda_i\xi \right) \right\} + \bar{h}_q b \left[(\rho + k\xi)\xi + \frac{k(k^2 - 1 - 2\nu)}{1+\nu} \xi^2 \right] + C_1 \quad (26)$$

$$f = -b^2 \sum_{i=1}^3 \left[A_i \left\{ \left(\frac{1}{12} - \frac{2k\omega_i + 2(k^2 - \nu)}{\lambda_i^2} \right) \text{sh}\lambda_i\xi + \frac{k(2k + \omega_i)}{\lambda_i} \xi \text{ch}\lambda_i\xi - k^2 \xi^2 \text{sh}\lambda_i\xi \right\} + \hat{A}_i \left\{ \left(\frac{1}{12} - \frac{2k\omega_i + 2(k^2 - \nu)}{\lambda_i^2} \right) \text{ch}\lambda_i\xi + \frac{k(2k + \omega_i)}{\lambda_i} \xi \text{sh}\lambda_i\xi - k^2 \xi^2 \text{ch}\lambda_i\xi \right\} \right] + \frac{\bar{h}_q b^2}{1+\nu} \left[(\xi - \nu k\rho)\xi^2 - \frac{1 - k^2(1+3\nu) + k^4}{3} \xi^3 \right] + C_2 \xi + C_3 \quad (27)$$

ここに、 C_1 , C_2 , C_3 は前項の (18) 式と全く同じである。

また、境界条件から得られる A_i , $\hat{A}_i$ ($i=1, 2, 3$) についての六元連立方程式も前項の (19) 式と比較して、右辺のマトリックスが下記のように変るだけで、左辺は全く共通である。

$$\bar{h}_q \begin{bmatrix} -(k\rho - \nu\xi)/(1+\nu) \\ (k^2 - \nu)/(1+\nu) \\ -(\rho + k\xi) \\ -(k\rho - k^2\xi)/(1+\nu) \\ (k^2 - \nu)/(1+\nu) \\ -(\rho - k\xi) \end{bmatrix} \quad (28)$$

かくして、 $A_i + \hat{A}_i \doteq 2\bar{h}_q m_i e^{-\lambda_i\xi}$ とおいた場合の m_i についての方程式は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(k\rho - k^2\xi)/(1+\nu) \\ (k^2 - \nu)/(1+\nu) \\ -(\rho - k\xi) \end{bmatrix} \quad (29)$$

したがって、 $\hat{A}_i$ についての方程式は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 \end{bmatrix} = \bar{h}_q \begin{bmatrix} -(k\rho - \nu\xi)/(1+\nu) \\ -(k^2 - \nu)/(1+\nu) \\ -(\rho + k\xi) \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる。この場合は $\hat{A}_i = m_i \bar{h}_q$ なる関係はない。

3. 解析結果

(i) 曲げ応力; 以上のように、 $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ なる3個のかん数形が定まれば、(3) 式から、任意点の撓み w が決定される。これから、板翼の前後縁線に平行なる方向の曲げ応力を計算すると、容易に次式が導かれる。

$$\sigma = \pm \frac{t}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \cos^2 \Lambda \left[(1+\nu k^2) w_{xx} + 2k(1-\nu) w_{xy} + (k^2 + \nu) w_{yy} \right] \quad (31)$$

次に、 w の表式において、空力翼弦に沿う曲率 ($w_{yy} = 2g_2(x)$) を無視した場合の近似変形特性について考察しよう。この場合

$$w \doteq f(x) + y \cdot g_1(x) \quad (32)$$

とかける。

(ii) 捩れ中心線; これは単純捩り場合、 $w=0$ なる軌跡として与えられる。いま、(16), (17) 式において ξ についての最高幂の項のみをとれば、 $f(x)$, $g_1(x)$ の近似表式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\doteq -x^2 \bar{h}_m \left[\frac{\nu k}{1+\nu} - k^2 \frac{1}{\bar{h}_m} \sum_{i=1}^3 H_{si}(\xi) \right] \\ g_1(x) &\doteq x \bar{h}_m \left[1 - \frac{2k}{\bar{h}_m} \sum_{i=1}^3 H_{si}(\xi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ただし、 $H_{si}(\xi) \doteq A_i \text{sh}\lambda_i\xi + \hat{A}_i \text{ch}\lambda_i\xi$

他方, $g_2(x)=0$ なる仮定により, (15) 式から,

$$\sum_{i=1}^3 H_{xi}(\xi) = -\frac{k}{1+\nu} \bar{h}_m \quad (34)$$

かくして, (33) 式は,

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\doteq -x^2 \bar{h}_m k(\nu+k^2)/(1+\nu) \\ g_1(x) &\doteq x \bar{h}_m (1+\nu+2k^2)/(1+\nu) \end{aligned} \right\} \quad (33')$$

とかける。よって, 振り中心の方程式は $w=0$ から,

$$y = -\frac{f(x)}{g_1(x)} = \frac{k(\nu+k^2)}{1+\nu+2k^2} x \quad (35)$$

これは, 原点を通る直線の方程式である。

(iii) 剪断中心線 集中荷重をかけた場合, $\partial w/\partial y = g_1(x)=0$ なる荷重断面における荷重点位置の軌跡を求める。(26) 式において, ξ について 1 次以上の項をとり, $g_2(x)=0$, すなわち

$$\sum_{i=1}^3 H_{xi}(\xi) = -\bar{h}_q \frac{k(\rho-k\xi)}{1+\nu} \quad (36)$$

を考慮すると, $g_1(x)$ の近似式として次式を得る。

$$g_1(x) \doteq x \bar{h}_q \left[\left(1 + \frac{2k^2}{1+\nu}\right) \rho - \frac{(k^2+\nu)}{1+\nu} \xi \right] \quad (37)$$

かくして $g_1(x)=0$ から,

$$\rho = k(\nu+k^2)\xi/(1+\nu+2k^2)$$

ここで, 定義に従えば, 荷重点座標 (x_q, y_q) は,

$$x_q = l = b\xi, \quad y_q = b\rho$$

とかけるから, 上式は次のようになる。

$$y_q = \frac{k(\nu+k^2)}{1+\nu+2k^2} x_q \quad (38)$$

(iv) 撓み中心線 これは, 二つの荷重点位置を ρ_1, ρ_2 とするとき, 荷重断面における撓みの等しい点の軌跡, すなわち,

$$[f(x) + y \cdot g_1(x)]_{\rho_1} = [f(x) + y \cdot g_1(x)]_{\rho_2} \quad (39)$$

から得られる。いま, (27) 式において, ξ^2 以上の項をとり, (36) 式を考慮すれば, $f(x)$ の近似式として, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\doteq \bar{h}_q \left[x^2 \cdot \frac{5-\nu k\rho-k^3(\rho-k\xi)}{1+\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^3}{b} \cdot \frac{1-k^2(1+3\nu)+k^4}{3(1+\nu)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

かくして, (40), (37) 式から,

$$\left. \begin{aligned} [f(x)]_{\rho_1} - [f(x)]_{\rho_2} &\doteq \\ &\quad -\bar{h}_q x^2 (\rho_1 - \rho_2) k(\nu+k^2)/(1+\nu) \\ [g_1(x)]_{\rho_1} - [g_1(x)]_{\rho_2} &\doteq \\ &\quad \bar{h}_q x (\rho_1 - \rho_2) (1+\nu+2k^2)/(1+\nu) \end{aligned} \right\}$$

よって, (39) 式の定義から,

$$y = \frac{k(\nu+k^2)}{1+\nu+2k^2} x \quad (41)$$

以上 (ii), (iii), (iv) の各軌跡は同一直線になることが示された。したがって, この直線を “空力翼弦に関する弾性軸” と称することは實際上からも有意義と思う。なお, この直線の方程式は翼端の境界条件に無関係で, ただ, 空力翼弦方向の曲率を無視する条件のみから導かれることに注意すべきである。

(v) 振り剛性 単純振れの場合の振れ率 θ は

$$\theta = w_{xy} \doteq g_1'(x)$$

で与えられる。(33') の $g_1(x)$ の近似表式を用いると, 振り剛性 R は

$$R = \frac{M_t}{\theta} \doteq \frac{1+\nu}{1+\nu+k^2} R_0 \quad (42)$$

とかける。ここに, $R_0 \doteq b^3 G/3$ (矩形断面材の St. Venant 振り剛性) である。上式から, 後退角によって振り剛性は低下することが判る。

4. 実験と数値解析

下記寸法の片持平行四辺形鋼板について (I) 単純振り実験, および (II) 集中荷重による曲げ振り実験を行った。

$$\begin{aligned} t &= 4.84 \text{ mm}, & l &= 730 \text{ mm} \\ b &= 200 \text{ mm}, & \Delta &= 30^\circ \end{aligned}$$

第2図 アンゲル材取付位置

第2図に示せる3種の荷重断面場合 (a, b, c-case) につき, 前縁線, 中心線, 後縁線上の各点の撓み (それぞれ w_1, w_2, w_3 とする) を dial gage により, また, この3線上のそれに沿う方向の歪 ~ 応力 (それぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とする) を共和無線 K.K. の抵抗線歪計 (K-22 型) で測定した。撓み測定点は 27 点, 歪測定点は表側 12 点, 裏側 (表側の対応位置に) 12 点の計 24 点である。荷重は各場合とも荷重用アンゲル材 (荷重断面上に取付ける) を介して加えた。荷重の太

きさは下記の如くである:

(I) $M_t = 1.664 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}$

(II) $Q = 1.98 \text{ kg}$.

この実験では、自重およびアングル材による初期撓みがかかなり大きいので、荷重用アングル材に適当な補正荷重を上向きに与えて、この影響を除去した。上向き荷重を与えるのに使用した滑車は自転車車輪（ボール・ベアリング付）で回転軸における摩擦の影響はほとんどなかった。

以上の実験例についての数値解析諸元は下記の如くである。

$E = 21,000 \text{ kg/mm}^2$ $y_q = -63.5 \text{ mm}$

$\nu = 0.28$

$\rho = -0.318$

$k = 0.577$

$\bar{h}_m = 1.6128 \times 10^{-5}$

$\zeta = 3.65$ (a-case)

$\bar{h}_q = 0.63866 \times 10^{-5}$

$\lambda_1 = 2.446$

$\omega_1 = -0.6116$

$\lambda_2 = 5.216$

$\omega_2 = +3.1658$

$\lambda_3 = 8.396$

$\omega_3 = +1.5297$

これから得られる数値解析結果と実験結果とを比較する。まず、(I) 単純振り場合の $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 曲線、撓み曲線、および応力分布については第3~9図に示した。また、(II) 集中荷重場合の $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 曲線、撓み曲線、応力分布は第10~16図に示した。撓み、応力について的一致は極めて良好である。

第3図 $f(x)$ かん数 (I. 場合)

第4図 $g_1(x)$ かん数 (I. 場合)

第5図 $g_2(x)$ かん数 (I. 場合)

第6図 撓み曲線 (I. 場合)

第7図 前縁線上の応力 σ_1 分布 (I. 場合)

第8図 翼弦中心線上の応力 σ_2 分布 (I. 場合)

第9図 後縁線上の応力 σ_3 分布 (I. 場合)

応力分布図において、相対応する表側、裏側の実験点(○, ●)はよく重なっている。ここで、●記号は裏側実験値の符号を変えたものである。これは、本解析における板の曲げ理論の妥当性を示しているわけである。

次に、第17図に、弾性軸の理論曲線と実験点を示した。ここで、太い実線は(35)式; $y=0.1814x$, 実

第10図 $f(x)$ かん数 (II. 場合)

第11図 $g_1(x)$ かん数 (II. 場合)

第12図 $g_2(x)$ かん数 (II. 場合)

第13図 撓み曲線 (II. 場合)

第14図 前縁線上の応力 σ_1 分布 (II. 場合)

第15図 翼弦中心線上の応力 σ_2 分布 (II. 場合)

第16図 後縁線上の応力 σ_3 分布 (II. 場合)

験点は、単純振り実験における前後縁線上の撓み(w_1 , w_3)測定値から、直線断面(空力翼弦)と仮定して得られた振り中心である。また、細い実線は w_1 , w_3 の

厳密な理論曲線から実験点の場合と同様に計算した曲線である。これらは固定端附近を除いて極めてよい一致を示している。

第 17 図 空力翼弦に関する弾性軸

5. 結 論

[1] S-R-S 法の一解析法 (y について 2 次撓みかん数を仮定した場合) を示し、実験例 ($\zeta=3.65$, $\Lambda=30^\circ$) についての解析結果は実験結果とよい一致を示すことを確かめた。

[2] 撓みは附根附近を除いた所で、比較的精度のよい代数かん数で近似できる。($w=f(x)+g_1(x)y$)

において、(33'), (37), (40) 式参照)

[3] 応力分布は、 $\zeta=3.65$, $\Lambda=30^\circ$ 程度でも実験とよく合う。(本解析法は、前後縁における境界条件を満足していない事実と照会して興味深い。)

[4] 「空力翼弦に関する弾性軸」の存在を理論的に立証し、実験結果と極めてよく合う次の近似式を得た。

$$y = \frac{k(\nu + k^2)}{1 + \nu + 2k^2} x$$

[5] 後退角が増すにつれて振れ剛性は減少する。

[6] 本解析例では荷重用アングル材の振れ剛性は、変形・応力分布に大した影響を与えない。

[7] 以上の解析法は、アスペクト比が更に小さくなった場合は、前後縁における境界条件を満足しない影響のため応力分布、弾性軸などについて上述の特性は失われると考えられる。

稿を終えるに当り、実験と数値計算に協力された中央大学工学部高岸俊夫氏、富士精密工業 K.K. 有賀泰二氏に謝意を表する次第である。

文 献

- 1) E. Reissner, & M. Stein: Torsion and Transverse Bending of Cantilever Plates NACA TN 2369 1951/1.

On the Measurement of Surface Waviness of Airplane by an Optical Method*

Toshio HIRAKI*

Summary

In this paper a method for measurement of surface waviness by a checked plane and camera without any other optical systems is reported and methods of analysis are described.

Introduction

It is very important to know the magnitude of waviness on airframe surface, because even small waviness causes shock wave phenomenon and boundary layer transition on high speed airplane and reduces the buckling strength of pannel in compression. Fortunately the aircraft is usually metal skined and therefore its reflectivity is high enough to optical application without using any

additional devices like mirrors. In this method the image of plane check is photographed by a conventional camera, and then from this one plate the slope and form of surface can be deduced.

This method is very similar to membrane-technique, but in this case the objects are too large to use Salet's method or Ikeda's¹⁾ one. In these methods the isoclinic photograph is obtainable but these methods need large lenses comparable to object, therefore in this case it is very difficult to obtain isoclinic line directly and there-

* Presented at the JSAE Nagoya Meeting, Oct. 26, 1956. Paper received May 17th, 1957.

** Staff Engineer, Gifu Seisakusho, Kawasaki Aircraft Company Ltd,