論文

離脱衝撃波を伴う低い超音速流れの研究 (彎曲した離脱衝撃波のある円柱のまわりの流れの計算法)*

近 藤 次 郎**

Studies on the Low Supersonic Flow with a Detached Shock
(An analytic determination of the flow around a cylinder
with a detached curved shock)

Jiro KONDO

Abstract

Uniform plane supersonic flow and rotational flow around a cylinder are connected on several points of the symmetrical curved shock, satisfying shock conditions. The analysis consists of two processes. First, the stream function of the flow pattern behind the shock is expressed in some trigonometric series with undetermined coefficients. Then, assuming the shape and the location of the shock wave, linear equations of these coefficients are introduced by shock conditions.

The particular example of free-stream Mach number 2 around a circular cylinder has been worked out with a three-parameter approximation and the density variation along the axis is compared with data obtained by an experiments. Improvements and extensions of this parametric method are briefly given in the last section.

はしがき

総合研究“遷音速空気力学”の一環として著者は流れの中にある物体の前方に離脱した衝撃波を伴う低い超音速流れの研究を分担した。この場合、離脱衝撃波の後方は亜音速になり、次第に加速されて再び超音速に回復し、物体の付近では亜音速と超音速の両方の場が共存する。したがってここで取扱う流れは主流速度が音速に近い場合だけに限らず、亜音速と超音速の両方の流れを含むいわゆる混合流れである。

このような流れでは衝撃波の上流の超音速平行ポテンシャル流れ、彎曲した衝撃波の発生とこの衝撃波を通過するときの流れの諸量の変化、衝撃波の後流の回転流れを求めなければならない。とくに衝撃波の位置および形状とその後流の亜音速流れとは物理的に見て相互に関係しているから数学的解法においても本来同時に決定されるべきものである。

昨年度の遷音速空気力学討論会ではこのような着想から問題を変分原理で表現したものについて直接解法の方針を発表した¹⁾。その後離脱距離については第6回応用力学連合講演会で計算結果を述べたが、上述の変

分原理をそのまま用いて衝撃波と流れを同時に決定する計算は著しく手間がかかるのでまだ全部終了してはいない。亜音速の既知の解を利用し、衝撃波の後流の中心軸上の流管について運動ポテンシャル極小の原理より円柱の前方の離脱衝撃波の激点からの位置 δ を計算した一例を第1図に示しておく²⁾。 $M_1=2.00$ の円柱の前方の離脱距離 δ は半径 R のおよそ1.4倍程度で実験³⁾とも大体よく合っている。

第1図 極小位置の直接比較

ここに述べる計算結果は Rayleigh-Ritz の方法による上の変分計算の研究過程に得たものであるが、衝撃波の位置や形状に対して予め知識がある場合には比較的容易に流れを計算によって定めることが出来るので

* 昭和 32 年 2 月 22 日, 日本航空学会, 遷音速空気力学討論会において講演, 昭和 32 年 6 月 3 日原稿受理

** 東大工学部

便利である。ここでは二次元流れの解法を述べたが三次元軸対称の場合にも全く同様に取扱える⁴⁾。この計算法は超音速の場と亜音速の場とをその境界上で接続するもので二体問題の扱いに類似の方法である。

1. では衝撃波の位置および形状と後流の流れ函数を若干の未定のパラメタを含んだ式であらわすことを述べ、2. では衝撃波の通過に伴う流れの諸量の変化の条件 (shock condition) について述べる。3. では未定パラメタを決定する手順を述べ、例としてこの方法で得られた円柱まわりのマッハ2の流れの結果について述べ、4. ではこの方法を拡張した逐次近似法などについて説明する。事例はすべて半径1の円柱のマッハ2の流れについてであるが離脱衝撃波の発生する流れについてはもっと他の場合にも適用することが出来る⁵⁾。

本研究は過去3年に亘って文部省の科学研究費の援助を受けて行われたものの一部であって、東京大学の守屋研究室を中心に行われたもので、実験、計算は同研究室の諸氏に負う処が多い。とくに小林竜一、檜淵幸男の両君には面倒な数値計算を幾通りも試みて戴いた。遷音速領域における衝撃波を伴う流れについては未だ解決すべき点が多く残っている。本研究の最初より熱心な御指導を賜った守屋教授および数々の討議と刺激を与えて下さった遷音速空気力学研究会の各位に厚く感謝する次第である。

1. パラメータ表式

拡張した運動ポテンシャル法 (エネルギー・ポテンシャル法) によれば物体のまわりの流れの場と衝撃波の位置および形状とを同時に決定することが出来る。これはある変分問題の解として函数を決定するのである。函数はそのテイラー展開:

$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \frac{1}{2!}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2) + \dots,$$

からもわかるとおり可付番無限個のパラメータを含んでおり、函数を決定することは結局この無限個のパラメータを定めることに他ならない。

いま函数がテイラー展開の有限項で十分正確に近似できるときにはこの函数の近似式を求める問題は結局有限個のパラメータを決定する問題に帰する。このように考えて衝撃波の表式や流れ函数等を求めるのがパラメータ計算法である。

衝撃波が三つのパラメータ β, δ, x_0 を含む式:

$$\beta y = \sqrt{(x + x_0 + \delta + 1)^2 - x_0^2}, \quad (1)$$

であらわされるものとする。これは第2図のような x 軸に対称な双曲線である。しかし衝撃波は無縁遠方では勢力を失いマッハ波になるものとするれば、この衝撃波はマッハ波に平行な漸近線を持つことになり、上式

第2図 離脱衝撃波

のパラメータ β は上流のマッハ数 M_1 によって

$$\beta = \sqrt{M_1^2 - 1} \quad (2)$$

のように表わされなければならない。 δ は衝撃波の離脱距離で、 x_0 は衝撃波の形状をきめるパラメータである。例えば原点から衝撃波が y 軸を切る点までの長さを h とすれば

$$h = \frac{1}{\beta} \sqrt{(\delta + 1)^2 + 2x_0(\delta + 1)},$$

あるいは

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 h^2 - (\delta + 1)^2}{\delta + 1}, \quad (3)$$

である。 δ, x_0 はこの問題を解いて求めなければならないが、実験や理論によって $\delta(M_1), h(M_1)$ が知られているから、上流のマッハ数 M_1 が定まったとき δ, x_0 の数値は相当正確に知られている。

一方、円柱のまわりの流れ函数を三つのパラメータ A_{11}, A_{13}, A_{22} を用いて

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) = \rho_\Delta U_\Delta \left[\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta + A_{11} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \right. \\ \left. + A_{13} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \sin 3\theta \right. \\ \left. + A_{22} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) \sin 2\theta \right], \quad (4) \end{aligned}$$

のようにあらわすことにする。 ρ_Δ, U_Δ はある基準の密度および流速である。流線は x 軸に対して対称であるから、 ψ は y について奇函数で、 θ についても同様である。これが単位円上で境界条件を満たしていることは容易にわかる。また各項は非圧縮の場合の基礎方程式をみたしているが、4項よりなる式(4)は必ずしも流れ函数にかんする気体力学の基礎方程式 (gasdynamic equation) を D_2 の全領域においてみたしてはいない。しかしわれわれは衝撃波の後方の流れ函数が(4)の形に局所的に表現されるものと仮定する。このとき三つのパラメータ A_{11}, A_{13}, A_{22} および ρ_Δ, U_Δ を定めれば衝撃波の後流の流れが完全に決まる。

2. 衝撃波上の条件

第3図のように衝撃波の上に点 $P(r, \theta)$ を取ると流れ函数より衝撃波の後流における P 点の速度分値は

$$q_r = -\frac{1}{\rho r} \psi_\theta, \quad q_\theta = -\frac{1}{\rho} \psi_r \quad (5)$$

となる。

【例題】 $M_1=2.00$ の円柱のまわりの流れ。

- 1°) 東大超音速風洞における実験の結果第5図⁸⁾とはしがきに引用した計算結果とより $\delta=1.4$, $x_0=17.3$ とする。(このとき $M_1=2$, $\beta^2=3$ である。)

第5図 マッハ2の流れの中の直径10 mmの円柱の離脱衝撃波

- 2°) 実際の計算には誤差1~2%以内では単位の高さを10 cmにとった方眼紙上で (r_i, θ_i) を測定した。
 3°) 第4図より ϵ を各点につき計算し, κ_i を三角函数表から求める。
 4°) 卓上計算機を用いて Gauss-Doolittle 法により連立方程式を解いた。それは

$$\begin{aligned} -51A_{11} + 120A_{13} + 11A_{22} &= 163, \\ -13A_{11} - 18A_{13} + 12A_{22} &= 13, \\ -10A_{11} - 20A_{13} + 10A_{22} &= 10, \end{aligned}$$

でこれを解いて

$$A_{11}=0.50, A_{13}=-0.15, A_{22}=-1.2$$

を得た。

- 5°) また(11)より $u_2^2=0.5625a_1^2$, (14)より

$$\rho_\Delta U_\Delta = 0.84\rho_1 a_1$$

となる。よって流れ函数は次の如くなる。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= 0.84\rho_1 a_1 \left\{ \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right. \\ &\quad + 0.50 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \\ &\quad - 0.15 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \sin 3\theta \\ &\quad \left. - 1.2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) \sin 2\theta \right\} \end{aligned}$$

第6図 対称軸上の静圧分布

このようにして流れ函数を決定することが出来たから離脱衝撃波の後方の流れの模様を求めることが出来る。例えば第6図は流れの対称軸上の静圧を計算して⁹⁾実験結果⁸⁾と比較したものである⁹⁾。ここで P_{t1} は衝撃波の前方の激み点圧力である。

4. パラメータ法の拡張

(1) 離脱衝撃波の後方の円柱のまわりの流れ函数を

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \rho_\Delta U_\Delta \left[\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r^{m+2}} \right) \sin m\theta \right], \\ &\quad (m, n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

と仮定すると決定すべきパラメータ A_{mn} は無限個ある。この場合には衝撃波上の N 点から音速点までにある無数の点 P_i において 3. で述べたような手続を行えばよい。実際には有限項で近似される。3. の例では流れ函数のパラメータを3個とった。そこで衝撃波上の点も3個とったが、常に決めるべきパラメータと同数の点を衝撃波上にとるのが原則である。このとき点が x 軸の片側にのみ存在しており、座標等にかんする幾何学的な量の有効数字が十分多ければ線型独立な連立方程式が得られる。衝撃波の後方で上の式が ϕ にかんする気体力学の基礎方程式を満足するようにパラメータ A_{mn} を決定する必要がある。 D_2 の中で若干の点をえらび、基礎方程式から A_{mn} にかんする条件式を導くことが出来る。これと衝撃波上の関係式とを同時に考慮してパラメータを決定すれば完全な解である。もし D_2 における流れ函数が単一で、この形に表わせるとすると上述のような方法でも係数を決定することが出来る。しかし前節の例のように有限項の表式を用いるときには最初の数項の選び方と衝撃波上の点の選定に依存するところが大きいからこの意味で本方法は一般的とはいえない。

(2) ここでは流れ函数 ϕ が含むパラメータの数と同数の点を衝撃波上にとってパラメータを決定することを述べた。しかし衝撃波の上流と下流とを僅かの点だけで接続することは不相当であると思われるときには、パラメータの数を増すと連立方程式の解法が急速に面倒になるので連立方程式の元数(すなわちパラメータの数)は少数に止めそのかわり衝撃波の上に必要な数だけの点をとってここで衝撃方程式をみだす条件式をつくり、それから最小二乗法によってパラメータを決定すればよい。すなわち条件式(15)を

$$a_i A_{11} + b_i A_{13} + c_i A_{22} = m_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (15a)$$

とすると正規方程式:

$$\begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{13} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [am] \\ [bm] \\ [cm] \end{bmatrix},$$

ただし, $[aa] = \sum a_i^2$, $[ab] = \sum a_i b_i$, etc.

をとけばよい。

このとき 3. の [例題] で述べた図式計算などの方法によるときは衝撃波上に余り接近して点をとるとき、図式に決定した r_i, θ_i などの値やこれらを基にして算出した係数値が計算誤差以内になって失敗することがある。このような場合には精度を高めて数値計算を行わなければならない。

(3) ここでは衝撃波の位置 δ および形状 x_0 を仮定して計算した。しかし計算結果によって再び δ や x_0 を改良するいわゆる逐次近似法が考案できる。

すなわち, $\phi(r, \theta)$ が求まると、衝撃波上では

$$\rho_\Delta U_\Delta y = \phi,$$

で、一方衝撃波の式 (1) より

$$y = \frac{1}{\beta} \sqrt{(x + x_0 + \delta + 1)^2 - x_0^2},$$

となるから、衝撃波上の点 $P_i(r_i, \theta_i)$ で

$$\phi^2(r_i, \theta_i) = \frac{\frac{1}{\beta^2} \{r_i \cos \theta_i + x_0 + \delta + 1\}^2 - x_0^2}{\rho_\Delta^2 U_\Delta^2},$$

となるから 2 点をえらんでこれから x_0, δ を定めることが出来る。とくに δ について仮定値 δ^1 を用い

$$\delta = \delta^1 + \Delta\delta, \quad x_0 = x_0^1 + \Delta x_0$$

とおき $\Delta\delta \ll 1$, $\Delta x_0 \ll 1$ と仮定すれば

$$\begin{aligned} & 2(r_i \cos \theta_i + \delta_0^1 + 1)\Delta x_0 + 2(r_i \cos \theta_i + x_0^1 + \delta^1 + 1)\Delta\delta \\ & = \rho_\Delta^2 U_\Delta^2 \beta^2 \phi^2(r_i, \theta_i) - (r_i \cos \theta_i + x_0^1 + \delta^1 + 1)^2 \\ & \quad + (x_0^1)^2, \end{aligned}$$

となって連立一次方程式になり修正値 $\Delta\delta, \Delta x_0$ は一層容易に求められる。このとき (2) で述べたようにたくさんの点をえらんで最小二乗法により δ, x_0 を決定することが出来る。

(4) 3. の計算例ではパラメータが相当大きい値を示している。高い精度が要求されるときにはもっと多くのパラメータをとり (2) で述べた最小二乗法によって計算するのがよいであろう。また $\rho_\Delta U_\Delta$ も場の定数とはせずに流線の定数と考えて各流線ごとの衝撃波条件で (14) 式のように決定すべきである。このような計算は手数がかかるが線型化されているから比較的簡単な digital computer について解析のプログラミングが可能である。

(5) 任意物体のまわりの流れについて解くには等角写像によって基礎解を変換してパラメータの決定を行えばよい。⁵⁾

(6) 拡張された運動ポテンシャル法(エネルギー・ポテンシャル法)では最後まで衝撃波の位置や形状を未定のまま残し、流れ函数と同時に決定するのであるから衝撃波の上流の領域 D_1 , 下流の領域 D_2 で積分:

$$\begin{aligned} L[\psi] &= \int_{D_1} \rho \Omega d\tau + \int_{D_2} \rho \Omega d\tau, \\ \Omega &= \frac{1}{2} q^2 - C_0 T + \Delta S T \end{aligned}$$

を行うのであるが、Rayleigh-Ritz 法を用いるにしても境界が衝撃波に依存するため上の積分が確定しないので直接解法の困難が生ずる。この場合には本論文でやったように衝撃波を仮定して ϕ を Rayleigh 法で定め、若干のパラメータの値に対して $L[\psi]$ を計算してそのグラフから極小位置を決定するやり方が卓上計算機を利用する程度の計算法では実際的である。そして (1) で注意したように基礎方程式まで考慮すると、やはり変分表式を用いて解くことが一番確実である。

参考文献

- 1) Kondo, J.: The fundamental equation of transonic flow. (The derivation of the equation of motion of gas by Hamilton's principle when the motion is non-holonomic.) Proc. 5th Japan Nat. Cong. Appl. Mech. (1956), pp. 329-332.
近藤次郎: 衝撃波の発生条件とその位置について, 遷音速空気力学討論会講演前刷, 昭和 31 年 2 月 7 日。
- 2) Kondo, J.: Studies on the low-supersonic flow with a detached shock wave. Proc. 6th Japan Nat. Cong. Appl. Mech. (1957), pp. 253-258.
- 3) Uchida, S., Yasuhara, M.: The rotational field behind a curved shock wave calculated by the method of flux analysis. J. A. S. Vol. 23, (1956), pp. 830-845.
- 4) 近藤次郎: 衝撃波を伴う超音速流れ, (第 2 報) 第 7 回応用力学連合講演会前刷, 5-6 頁。
- 5) 近藤次郎: 衝撃波と離脱衝撃波の位置の簡易計算法について, 日本航空学会東海地方秋季大会, (第 4 回) 講演前刷, 昭和 31 年 10 月 26 日。
- 6) Dwyer, P.: "Linear computations." (Wiley, 1951).
- 7) Oxford: Compressible Airflow Tables, (1952).
Ames Research Staff: Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow, (1953), NACA Rep. 1135.
- 8) 守屋富次郎, 近藤次郎, 高野昭, 谷喬, マッハ数 2 付近の流れの実験, 日本航空学会年会, 昭和 32 年 4 月 1 日, (未印刷)。
- 9) Lin, C. C. and Shen, S. F.: An analytic determination of the flow behind a symmetrical curved shock in a uniform stream. NACA TN 2506, (1951).
 $M_1 = 1.7$ のときの球の前方の軸上の静圧分布を計算して実験と比較している。