軸対称超音速流第二近似問題の解法*

谷

喬**

A Method for Solving the Second Order Problems of Axially Symmetric Supersonic Flow

Takashi TANI

Abstract

The second order equation of perturbation stream function for the axially symmetric irrotational compressible flow is studied by assuming that the axial component of perturbation velocity is the same order as the radial velocity. In some cases the equation can be solved in closed form. Generalized conical flow is represented by elementary integral.

軸対称圧縮性流体の方程式はある程度近似を行っても解を求めることは容易でない。高速流体力学で特に興味のある問題は、流れの場がいたる所速度 $\bar{u}$ である一様流に近い場合であるが、以下に非粘性渦なしの範囲でこのような流れの一つの近似解法を試みる。

軸方向を x 、これと垂直な方向を r とし、それぞれ方向の速度成分を $\bar{u}(1+u)$ 、 $\bar{u}v$ とおくことにする。厳密な方程式は

$$u_r = v_x, \quad (1)$$

$$\{c^2 - \bar{u}^2(1+u)^2\}u_x - \bar{u}^2(1+u)v(u_r + v_x) + (c^2 - \bar{u}^2v^2)v_r + c^2v/r = 0, \quad (2)$$

$$c^2 = \bar{c}^2 - \frac{\gamma-1}{2} \bar{u}^2(2u+u^2+v^2) \quad (3)$$

となるが、ここに γ は比熱比、 $\bar{c}$ は一様流の音速である。

仮定により u, v およびこれらの微係数は微小量とみられるから、(2) 式でそれらの自乗以上の項を右辺に移して整理すれば

$$\begin{aligned} (M^2-1)u_x - v_r - v/r \\ = -\{2M^2 + (\gamma-1)M^4\}uu_x - 2M^2vv_r + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4)$$

と書くことができる。ここで u, v およびその微係数は一応同位の微小量 ε と考え、また一様流マッハ数を M とした。通常の線型理論はこの仮定の下に (4) の左辺のみをとったものと見ることができる。線型理論の当然の限界として流れの局所的マッハ数およびマッハ角の変化は考慮されないが、物体の前後端あるいはその表面に傾斜の不連続があるときにはこのような変化を考慮が必要が起る。局所マッハ数に直接関係する非線

型項は (4) の右辺第 1 項であるから、先の報告にはこの項のみを残した近似を試みた¹⁾。この場合基礎方程式は (1) および

$$[M^2-1+\{2M^2+(\gamma-1)M^4\}u]u_x - v_r - v/r = 0 \quad (5)$$

となるが、これは遷音速近似あるいはその拡張された方程式と同型であり、遷音速の場合楠川氏によって用いられた流れ函数²⁾を導入して線型化することができた。また物理空間における特解も容易に求められ非線型軸対称流の一つの模型と考えられるが、(4) 式の右辺第 2 項を省略しているため $u \gg v$ の範囲外では数値的結果に疑問があった。以下には (4) において u, v が同位の微小量のとき $O(\varepsilon^2)$ まで満足する計算を試みる。したがって最近 Van Dyke³⁾ により扱われたような特に細くなめらかな物体近傍で、 $u \ll v$ となるような範囲は考えていないが、上述の不連続のある場合や軸からある程度離れた流れの場を取扱うことができると思う。

今 ϕ を次のように定義する、

$$\begin{aligned} \phi_r/r \\ = (M^2-1)u + \{2M^2 + (\gamma-3)M^4/2\}u^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\phi_x/r = v - 2M^2uv. \quad (7)$$

この ϕ は上述の近似の範囲で (4) を満足している。これより逆に M が 1 にあまり近くないところで

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{M^2-1} \frac{\phi_r}{r} \\ - \frac{1}{(M^2-1)^2} \left\{ 2M^2 + \frac{\gamma-3}{2} M^4 \right\} \left(\frac{\phi_r}{r} \right)^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (8)$$

$$v = \frac{\phi_x}{r} + \frac{2M^2}{M^2-1} \frac{\phi_x}{r} \frac{\phi_r}{r} + O(\varepsilon^3) \quad (9)$$

のように展開することが出来る。渦なしの条件 (1) を

* 昭和 32 年 9 月 12 日原稿受理

** 東京大学工学部

用いて ϕ に関する方程式は

$$\{M^2-1+A(\phi_r/r)\}\phi_{xx}+2M^2(\phi_x/r)\phi_{xr}-\phi_{rr}+\phi_r/r=0, \quad (10)$$

$$A \equiv \{2M^2+(\gamma-1)M^4\}/(M^2-1)$$

となる。この式は前報告の式と比較して第2項が付加されているため、一般的に線型化することはできないが、若干の特解を求めることができる。なお圧力係数、局所マッハ数等の ϕ による表現にも同様高次の項が入るが、特別のマッハ数 $M=\sqrt{4/(3-\gamma)}$ の場合に限り (6) および (8) の右辺第2項の係数が0となり計算は簡単になる。これは2次元の場合今井教授の指摘されたマッハ数である⁴⁾。

(10)を解くためまず $A\phi+(M^2-1)r^2/2=\tilde{\phi}$ とおけば

$$\frac{\tilde{\phi}_r}{r}\tilde{\phi}_{xx}+\frac{2M^2}{A}\frac{\tilde{\phi}_x}{r}\tilde{\phi}_{xr}-\tilde{\phi}_{rr}+\frac{\tilde{\phi}_r}{r}=0 \quad (11)$$

が得られる。この式において特に $\gamma=-1$ とおけば、 $2M^2/A=-1$ となり方程式は M に関係しないことになる。このときは二三の簡単な特解が求められるがここには省略する。

最初に(11)の変数分離型の特解として $\tilde{\phi}=X(x)R(r)$ とおけば X, R に関する常微分方程式はそれぞれ

$$XX'+(2M^2/A)X^2+nX=0,$$

$$R''-R'/r+nRR'/r=0, \quad n: \text{常数}$$

となる。これらは容易に積分できるが、物理的にあまり興味ある解ではない。

次に(11)に対して解を次の形に仮定する、

$$\tilde{\phi}=r^{2m}F(t), \quad t \equiv x/r^m \quad (12)$$

このとき F に関する式は0以外の任意の m について

$$(2F-tF'')F''+(2M^2/A)(F'-tF'')F'+4(1-m)F+(3m-2)tF'-mt^2F''=0 \quad (13)$$

となる。ここに'は t に関する微分である。(13)は F を t の2次の量とみれば t に関して同次式となっているから、 $F=t^2f, t=e^s$ とおくことによって

$$f(\ddot{f}+3\dot{f}+2f)+(2M^2/A)(2\dot{f}+\ddot{f})(\dot{f}+2f)+2\dot{f}+m\ddot{f}=0 \quad (14)$$

となる。ただし'は s についての微分である。更に $\dot{f}=p$ とすれば $\ddot{f}=p(dp/df)$ であるから結局

$$\frac{dp}{df}\left[p+\frac{2M^2}{A}(p+2f)+m\right]+3p+2f+\frac{4M^2}{A}(p+2f)+2=0 \quad (15)$$

とすることができるが、(15)は初等的に積分できる。この解は一般化された conical flow である。特に簡単な流れの例として

$$\phi=\frac{-x^2}{2A+4M^2}+\frac{a}{A}xr+\left(\frac{a^2M^2(A+2M^2)}{A^3}-\frac{M^2-1}{2A}\right)r^2, \quad a: \text{常数} \quad (16)$$

がある。これは $m=1$ の更に特殊な場合で、一様流のマッハ円錐から軸に向って連続的に膨脹する一種の conical flow である。

例として $\gamma=1.4, M=\sqrt{2.5}$ とおき、一つの一様流マッハ円錐 $x=\sqrt{1.5}r$ の近くで成立する解を作れば

$$\phi=-\frac{x^2}{20}+\frac{\sqrt{1.5}}{10}xr-\frac{1.5}{20}r^2,$$

これより

$$\phi_x=-\frac{x}{10}+\frac{\sqrt{1.5}}{10}r, \quad \phi_r=\frac{\sqrt{1.5}}{10}x-\frac{1.5}{10}r$$

等が得られる。特性曲線としては方程式(10)に対して

$$\frac{dr}{dx}=\frac{M^2(\phi_x/r)\pm\sqrt{M^4(\phi_x/r)^2+M^2-1+A(\phi_r/r)}}{M^2-1+A(\phi_r/r)}$$

であるから、この場合

$$\sqrt{1.5}(r-r_0)=-x, \quad r_0: \text{常数}$$

および $\sqrt{1.5}r=x+a\pm\sqrt{a(2x+a)}$ $a: \text{常数}$

となる。第1図は一様流から膨脹するこの解を示したものである。

第1図 一様超音速流よりの錐状膨脹波

(15)はまた Chaplygin gas すなわち $\gamma=-1$ に対しては一層容易に解を求めることができる。その例としては

$$\gamma=-1, m=-2, M=\sqrt{2} \text{ の一つの解として}$$

$$\phi=(r^2/8)-1/(4b^2r^4)\{2-6xbr^2+3(xbr^2)^2+2(1-2xbr^2)^{3/2}\}, \quad b: \text{常数}$$

$$\gamma=-1, m=1, M=\sqrt{2} \text{ の例として}$$

$$\phi=\frac{r^2}{8}-\frac{x^2}{8}-\frac{r^2}{4c^2}\left(1-\frac{cx}{r}\pm\sqrt{1-\frac{cx}{r}}\right)^2, \quad c: \text{常数}$$

等がある。後者で $c=1$ とおいて一つのマッハ円錐附近で成立する解を作ると微係数は

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{r}\right)\pm\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{x}{r}}, \\ \phi_r &= -\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{x}{r}\right)^2\pm 2\left(1-\frac{x}{r}\right)^{3/2}\right. \\ &\quad \left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)\pm\frac{3}{2}\frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x}{r}}\right\} \end{aligned}$$

となる。この流れのスケッチを第2図に示す。ただし超音速の場合このような仮想気体に対する解が実在気

第2図 仮想気体錐状流の例

体の流れのモデルを与えるか否かは別に吟味を要するものである。

Conical flow はまた次のように解くことができる。(11)において変数 r を $r^2/2 = x$ に変えると方程式は

$$\tilde{\phi}_x \tilde{\phi}_{xx} + (2M^2/A) \tilde{\phi}_x \tilde{\phi}_{xx} - 2x \tilde{\phi}_{xx} = 0$$

となるが、この式は Legendre 変換

$$\tilde{\phi}_x = \xi, \quad \tilde{\phi}_z = \zeta, \quad x\xi + z\zeta - \tilde{\phi} = \Psi$$

によって

$$\zeta \Psi_{\xi\xi} - (2M^2/A) \xi \Psi_{\xi\xi} - 2\Psi_{\xi} \Psi_{\xi\xi} = 0 \quad (17)$$

とすることができる。(17)には特解

$$\Psi = \xi^2 G(\zeta) \quad (18)$$

が存在する。 G に関する方程式は ζ を ξ による微分として

$$\zeta G'' - (4M^2/A) G' - 4GG' = 0$$

である。 $G = g - (1/4) - (M^2/A)$ とおき、また独立変数も $\log \zeta$ に変えてこれによる微分を $\dot{}$ であらわすと

$$\dot{g} - 4g\dot{g} = 0$$

となる。この解は積分常数のとり方によって異なる表現 $\tan \log \zeta$, $\coth \log \zeta$ 等によりあらわされるが、いずれも conical flow である。ただしその物理空間における成立範囲が異なる。例として最も簡単な

$$\Psi = \xi^2 \left[-\frac{1}{2} (\log b\zeta)^{-1} - (M^2/A) - (1/4) \right] \quad (19)$$

について、 $r=1.4$, $M=\sqrt{2.5}$ とおけば $\Psi_{\xi} = z = r^2/2$, $\Psi_{\xi} = x$ より容易に

$$x/r = 2\sqrt{1.5}\sqrt{\zeta} \{ (1/2) + (1.5/2) \log \zeta \}$$

が得られる。これらよりマッハ円錐 $x = \sqrt{1.5}r$ の附近で

$$\frac{\phi_x}{r} = \frac{\sqrt{1.5}}{10} \left(\frac{x}{r} - \sqrt{1.5} \right) + \frac{1}{320\sqrt{1.5}} \left(\frac{x}{r} - \sqrt{1.5} \right)^2 + \dots,$$

$$\frac{\phi_x}{r} = \frac{-1}{10} \left(\frac{x}{r} - \sqrt{1.5} \right) - \frac{1}{320\sqrt{1.5}} \left(\frac{x}{r} - \sqrt{1.5} \right)^2 + \dots$$

等となる。この流れも第1図に示した解と類似の膨張波であり、 u, v については高次の項で差があるが特性曲線はこの例では近似の範囲で第1図の解と一致している。

上述の解はパラメータおよび積分常数を適当にとることによって超音速で飛行する軸対称物体まわりの流れの場をあらわすこともできるが、その場合には通常衝撃波を考慮しなくてはならない。曲った衝撃波の後では流れは厳密な渦なしではないが、その影響は概等速流では多く高次の微小量であるから、そのような場合にもこれらの解を用いることができる。同様のことが僅かに軸対称から外れた流れ——例えば迎角の小さい軸対称物体まわりの流れについても言えるから、近似を進めてこのような流れを解くことも可能と考えられる。

この報告においては概等速な軸対称流に対して2次の項まで考慮した流れ函数についての方程式を導き、その解のいくつかを、閉じた形で得られることを示した。実例としては、最も簡単な解を示したにすぎないが、実際問題にあらわれるような流れの例については別の機会にゆずりたい。近似方程式は亜音速の場合にも成立するが、得られた解の構造上からみて中程度の超音速流の解析に有効と思われる。この研究は守屋教授の御指導によって行ったが、助言をいただいた近藤助教授、研究の便宜を与えられた鷺津助教授に深く感謝するものである。

文 献

- 1) 谷 喬: 軸対称超音速流の近似についての覚え書, 日本航空学会誌, Vol. 4, No. 35 (1956/12)
- 2) Kusakawa, Ken-ichi: On the subsonic flow of a compressible fluid past an axisymmetric moderately thick body, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 10, No. 12 (1955/12).
Kusakawa, Ken-ichi: On the transonic flow of a compressible fluid past an axisymmetric slender body at zero incidence, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 12, No. 4 (1957/4)
- 3) Van Dyke, Milton D.: On Stokes' stream function in compressible small-disturbance theory, NACA TN 3877 (1957)
- 4) Imai, Isao: Extension of von Kármán's transonic similarity rule, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 9, No. 1 (1954/1-2)