な動きの遅い天体を利用するため、人工衛星を利用すれば月の場合の数十倍高い精度を得ることができる。しかし現在のところ、アマチュアの観測結果だけを集めて使っているで、月の観測から求めた結果と同程度のものしか出ていない。(その後地球の扁率は $1/298.4$ となり、これは従来よりも球に近いことである。)

人工衛星の軌道面のまわる量を大体いうと、確か第1号衛星で最初のころ1日に3度くらいである。3度というとは360度を約100日くらいでまわるわけであるが、太陽が逆に1度ずつまわるから、太陽に対しては4度まわることになる。これは飛んでいるうちに周期が段々落ちて来るため、交って来る。力学的にいうとこれは非常に複雑でまだ問題がたくさん残っている。

人工衛星の近地点は、その軌道面内で移動する。つまり楕円の軌道そのものが全体としてぐるぐるまわっているわけである。御存じの相対性原理により計算してもやはり近地点の移動することがわかっている。しかしその量はごくわずかで、人工衛星のばあいには1年間に14秒角くらいである。

これからも、地球の形を決める量が出て来るのであるが、これを求めることは非常にむずかしく、日本の観測からはまだ何も出ていない。ただ理論的にはある地点においては、近地点が逆に動く場合もあるということ、日本の若い学者が計算した。また事実そのような結果が観測に現われている。かつてイギリスで、軌道に対し未知の力が働いているという説が、ラジオで放送されたのがこれである。近地点の移動する有様が在来の理論ではよく分っていなかったからである。われわれはこの新しい理論が正しかったと信じている。

だいたい以上が現在わかっていることである。

I.G.Y. の観測結果はすべてそれぞれの専門ごとに、世界のセンターに集めることになっている。人工衛星のセンターはワシントンとモスクワにあり、そこに各国の資料を集め同時に計算した結果が出版されて各国にはね返るのである。日本もどんどん資料を送っているが、はね返って来ているのは、現在ではまだ初期のものだけである。そのためほんとうに詳しい資料が使えず、今日の問題について詳しく議論ができなかったことを残念に思う。

人 工 衛 星 の 軌 道*

William T. Thomson**

1. は し が き

ロケット推進と誘導法分野における最近の工学の発達、多くの可能な空間軌道の1つに人工衛星を发射することを實現した。物体がひとたび大気の影響範囲を超えた軌道に乗れば、その全エネルギーは一定に保たれ、ロケット燃え切り(burnout)時の全エネルギーに等しくなる。その全エネルギーは、楕円から双曲線(極限的な場合として円と放物線)にわたる軌道の型を決定する。しかし、同型でも無数の軌道が空間の個々の点で、与えられた全エネルギーに対応して可能であるが、ロケット燃え切り時の速度ベクトルの機首角はこの点を通る多くの可能な軌道中の1箇を決定する。

2. 二乗逆比例中心力による一般運動

今衛星は大気の影響範囲を充分に超えた高度まで发射されると仮定する。運動方程式は極座標 (r, θ) を

使えば次のようになる。

$$\text{動径方向の力, } \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (1)$$

動径と直角方向の力,

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (2)$$

ただし、 μ は万有引力常数と地球質量の積である。方程式(2)から次の結果を得る。

$$r^2\dot{\theta} = \lambda \quad (3)$$

ただし、 λ は常数で、単位時間内に動径が掃過(sweep)する面積の2倍に等しい。

$r=1/u$ と代入すれば、独立変数 t は独立変数 θ に変り、(1)式は

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{\lambda^2} \quad (4)$$

となり、一般解は次のようになる。

$$u = \frac{\mu}{\lambda^2} + C \cos(\theta - \theta_1) \quad (5)$$

ただし、 C, θ_1 は常数である。

次に単位質量についてエネルギー式を考える。単位質量当りの運動エネルギーは

* 原文英文、標題 Orbits of Artificial Satellites 昭和33年5月28日 日本航空学会と日本航空工業会の共催で行われた講演の原稿を翻訳した。訳者は佐賀亦男で鷲津久一郎氏の助言を得た。

** Professor of Engineering, University of California, Los Angeles, Calif., U.S.A.

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] \\ = \frac{\lambda^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] \quad (6)$$

エネルギー損失を考えないならば、単位質量当りの運動と位置エネルギー (V) の総和は一定で、燃え切り時の単位質量当りの全エネルギー (E) に等しい。

$$E = T + V \quad (7)$$

ここで (6) 式は

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{2(E - V)}{\lambda^2} \quad (8)$$

のように書いてもよく、これは (4) 式に伴うエネルギー式である。

衛星を発射させるためには地球の表面に対する全エネルギーが問題になるので、地球の表面で零になる位置エネルギーを基準とする。

$$V = \int_R^r \frac{\mu}{r^2} dr = \frac{\mu}{R} \left(1 - \frac{R}{r} \right) = \frac{\mu}{R} (1 - Ru) \quad (9)$$

ただし、 R は地球半径とする。

(8) 式に (5) および (9) 式を代入すると、常数 C は求められて

$$C^2 = \left(\frac{\mu}{\lambda^2} \right)^2 \left[1 + \frac{2E\lambda^2}{\mu^2} - \frac{2\lambda^2}{\mu R} \right] \quad (10)$$

$\theta=0$ の基本線を近地点 (r の原点から最小距離の点) まで回転すれば、(5) 式は最終の形として

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\mu}{\lambda^2} (1 + e \cos \theta) \quad (11)$$

となる。ただし

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\lambda^2}{\mu^2} - \frac{2\lambda^2}{\mu R}} \quad (12)$$

これは二乗逆比例中心問題に対する最も一般な解であり、軌道の型は次のように e の値によって定まる。

- $e > 1$ ならば 双曲線
- $e = 1$ 放物線
- $e < 1$ 楕円 ($\theta=0$ が近地点)
- $e = 0$ 円
- $e < 0$ 楕円 ($\theta=0$ が遠地点)

e の値は、添字 0 によって示されるロケット燃え切り時の初期条件によって決められるが、 e に制限をつけないで問題を検討して見よう。

r_1 を近地点距離とすれば、(11) 式は次のようになる。

$$u = \frac{1 + e \cos \theta}{r_1(1 + e)} \quad (13)$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = r_1(1 + e) \quad (14)$$

運動エネルギーと全エネルギーからさらに二つの方程式が得られ、無次元の形で表わせば

$$\left(\frac{rv^2}{\mu} \right) = 2 - \frac{r}{r_1} (1 - e) \quad (15)$$

$$\left(\frac{ER}{\mu} \right) = 1 - \frac{R}{2r} \left[2 - \left(\frac{rv^2}{\mu} \right) \right] \quad (16)$$

3. 初期条件

以上の方程式に対して第1図に示すように燃え切り時の初期値を与える。すなわち

$$r = r_0, \quad v = v_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \theta = \theta_0$$

初速度の動径と直角および平行方向成分はそれぞれ

$$v_0 \cos \beta_0 = r_0 \dot{\theta}_0 = \frac{\lambda}{r_0}$$

$$v_0 \sin \beta_0 = \dot{r}_0 = -\lambda \left(\frac{du}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} = \frac{\mu e \sin \theta_0}{v_0 r_0 \cos \beta_0}$$

第1図

(11) 式から発射時には

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\mu(1 + e \cos \theta_0)}{v_0^2 r_0^2 \cos^2 \beta_0}$$

最後の2式を $e \sin \theta_0$ と $e \cos \theta_0$ に対して解き、辺々相除して近地点からの角位置を求めると

$$\tan \theta_0 = \frac{\left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} \right) \sin \beta_0 \cos \beta_0}{\left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} \right) \cos^2 \beta_0 - 1} \quad (17)$$

E の値は燃え切り後一定であるから、(16) 式は次のように書ける。

$$\left(\frac{ER}{\mu} \right) = 1 - \frac{R}{2r_0} \left[2 - \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} \right) \right] \quad (18)$$

(12) および (18) 式、 $\lambda = r_0 v_0 \cos \beta_0$ から e の値が求められて

$$e^2 = \left[\left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} \right) - 1 \right]^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0 \quad (19)$$

(17) および (19) 式は与えられた初期条件に対する軌道を完全に決定するため充分で、(18) 式は必要なエネルギーを示す。

4. 結果の説明

A) 特別な場合 $\beta_0 = 0$ 初めに衛星が機首角度 0 すなわち $\beta_0 = 0$ で発射される特別な場合について調べてみよう。(17) 式から $\theta_0 = 0$ すなわち $r_0 = r_1$ であ

ることは明らかである。(15) 式はここで

$$e = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} \right) - 1 \quad (15^*)$$

となる。ただし、式番号の * は特別な場合 $\beta_0=0$ に対して使い、下に出て来る**は円軌道の場合に使うことにする。 e の値と (18) 式から得られる全エネルギーは第2および3図に示すように軌道の型を分類する。

第 2 図

第 3 図

もし与えられた r_0/R の値に対して $\beta_0=0$ で衛星を発射させることができるならば (第4図), $(r_0 v_0^2 / \mu) = 1$ のときに限り円軌道 ($e=0$) を得る。そのときの全エネルギーは

$$\left(\frac{ER}{\mu} \right) = 1 - \frac{R}{2r_0} \quad (18^{**})$$

もし v_0 がさらに増して $r_0 v_0^2 / \mu > 1$ となれば、軌道は (15*) と (18**) 式あるいは第2図と第3図から定められる e と ER/μ を持つ楕円になる。2 より大きい $r_0 v_0^2 / \mu$ の値に対して、軌道は双曲線になり、衛星は地球から脱出して決して戻らないはずである。したがって $r_0 v_0^2 / \mu = 2$ は $r_0 = R + h$ の高度における脱出速度 v_e に相当する。

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} = R \sqrt{\frac{2g_0}{r_0}} \quad (20)$$

楕円軌道の幾何学を考えると、半長軸と半短軸は

$$\text{半長軸} \quad \frac{a}{r_0} = \frac{1}{1-e} \quad (21)$$

$$\text{半短軸} \quad \frac{b}{r_0} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (22)$$

遠地点距離は

$$\frac{r_a}{r_0} = \frac{1+e}{1-e} \quad (23)$$

となるが、地球の表面から高度 h で表わすと遠地点高度 (h_a) と近地点高度 (h_p) は次のようになる。

$$\frac{h_a}{R} = \frac{r_0}{R} \left(\frac{1+e}{1-e} \right) - 1 \quad (24)$$

$$\frac{h_p}{R} = \frac{r_0}{R} - 1 \quad (25)$$

第 4 図

楕円軌道がほとんど円形であることを説明するために、下に e の二三の数値計算結果を掲げる。しかし、遠地点高度に対する近地点高度の比は極めて大きくなり得る。0.20 の離心率に対して、発射高度が $r_0/R = 1.10$ のとき、すなわち地球の表面から高度約 400 mile (640 km) では、この比は 6.50 であり、半長軸に対する半短軸の比は 1.02 にすぎない。かつ、この結果は円軌道速度より発射速度を僅か 9.6% 増しただけで得られることは興味ある事実である。

発射高度 $r_0/R=1.10$ に対する計算

e	$\frac{1+e}{1-e}$	h_a/h_p	a/b	$\frac{r_0 v_0^2}{\mu}$	$\left(\frac{\text{楕円速度}}{\text{円速度}} \right)_{\text{発射時}}$
0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.05	1.105	2.15	1.00+	1.05	1.025
0.10	1.22	3.40	1.007	1.10	1.05
0.20	1.50	6.50	1.02	1.20	1.096

次に $r_0 v_0^2 / \mu$ が 1.0 より小さい場合を調べよう。 e が負の場合の (11) 式は、出発点が遠地点に相当し、近地点が $\theta=180^\circ$ に相当する楕円であることを示す。その速度は地球の引力と平衡するには不十分で、衛星の距離 r は初期値 r_0 より減少する。 e が負ならば、楕円の中心は原点と発射点との間に来る。 e が負の場合にはその絶対値が小さくても衛星は大気の抵抗が重要になる範囲に存在することは前掲の数値から明らかで

ある。第4図点線曲線はこのような場合を示す。

B) 一般の場合 $\beta_0 \neq 0$ さて発射時の機首角度が0でない最も一般的な場合を調べよう。 $r_0 v_0^2/\mu$ と β_0 のいかなる値に対しても e の値は方程式 (19) から定まり、第5図に示す。

第5図

もし $\beta_0 \neq 0$ ならば e は決して0にはならないから、円軌道は不可能である。発射点に関する近地点位置 θ_0 は (17) 式によって求められる。同式から $(r_0 v_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 = 1$ のとき $\theta_0 = \pi/2$ であることがわかる。 $(r_0 v_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 < 1$ および $\beta_0 > 0$ のとき、 θ_0 は第2象限にある。たとえば非常に大きな正の角 β_0 で発射すれば方程式 (17) の分母はほとんど-1となり、したがって $\tan \theta_0$ は第2象限で0に近づく、すなわち θ_0 は 180° より僅かに小さい。そして第6図に示すように、(19) 式に従って非常に扁平な楕円になる。

第6図

β_0 だけの影響を決定するには、発射時の速度が円軌道の速度に等しい場合、すなわち $r_0 v_0^2/\mu = 1$ を考えて β_0 を変化させればよい。全エネルギー ER/μ は $r_0 v_0^2/\mu$ と r_0/R だけに係し、その結果同じ速度を持ち発射点を通るすべての軌道に対して等しい。 $\beta_0 = 0$ および $r_0 v_0^2/\mu = 1$ のときは円となり、 θ_0 は意味を持たなくなる。角 β_0 が非常に小さく、 $r_0 v_0^2/\mu = 1$ のときは、(17) 式は次のように書ける。

$$\tan \theta_0 \cong -\frac{1}{\beta_0}$$

故に β_0 が増加するにしたがって θ_0 は $\pi/2$ から π の範囲に変わる。 β_0 が負ならば θ_0 は $3\pi/2$ から 2π の範囲に変わり、第6図の幾何学的関係と一致する結果を得る。次に β_0 をある一定の正值に保ち、 $r_0 v_0^2/\mu$ を増せば、 e は増加し、 θ_0 は $(r_0 v_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 > 1$ のとき第1象限の $\pi/2$ に近いある値から増して、 $(r_0 v_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 = 1$ のとき $\pi/2$ となり、 $(r_0 v_0^2/\mu) \cos^2 \beta_0 < 1$ のとき第2象限に入る。

$r_0 v_0^2/\mu = 2$ のときは $e = 1$ となり、 β_0 値に関係なく放物線を得る。ゆえに全エネルギー $ER/\mu = 1$ であ

り、基準角 θ_0 は小さい β_0 に対して0から出発して、 $\cos^2 \beta_0 = 1/2$ すなわち $\beta_0 = 45^\circ$ のとき 90° まで増加する。 β_0 がさらに増加すると θ_0 は第2象限に移る。

$(r_0 v_0^2/\mu) > 2$ のときは軌道が β_0 のすべての値に対して双曲線になり、基準角 θ_0 が変わるだけで、他は同様の結論を得る。

5. 閉軌道の周期

楕円または円の閉軌道の場合、衛星の周期は容易に測定できる値である。それは面積率から次のように求められる。

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \quad (26)$$

a を無次元パラメータで置き換えれば、周期は初期条件項で次のようにして表わすことができる。

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g_0}{R}}} \left[\frac{\left(\frac{r_0}{R}\right)}{2 - \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right)} \right]^{3/2} \quad (27)$$

すなわち全エネルギー項で表わせば

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g_0}{R}}} \left[\frac{1}{2 \left(1 - \frac{ER}{\mu}\right)} \right]^{3/2} \quad (28)$$

このようにして周期は全エネルギーだけに係し、同じ速度で与えられた点を通るすべての軌道は同じ速度を持ち、機首角度に無関係なことを知る。

6. 赤道の膨らみ (equatorial bulge)

地球が西から東へ回転するため、東方成分を持つ方

第7図

向に衛星を発射させると、速度の点で有利である。このような軌道は地球の赤道附近の膨らみにより西方に歳差運動し、閉軌道は実際に不可能である。運行する衛星はジャイロに似て、第7図に示すように、軌道平面に垂直で北半球方向に向く衛星の角運動量ベクトルは、赤道近くで膨らみの

過剰質量重力によるモーメントのため、北極軸まわりをゆるく回転する。この歳差運動速度は赤道に対する軌道傾角および僅かながら高度に係する。

7. 結論

1) 人工衛星の軌道はロケット燃え切り時の3つの無次元パラメータ、 r_0/R 、 $r_0 v_0^2/\mu$ 、 β_0 によって決定される。

2) 円軌道は $\beta_0 = 0$ 、 $r_0 v_0^2/\mu = 1$ の状態においての

み可能である。必要エネルギーは方程式 (18**) によって与えられる。

3) $\beta_0=0$, $r_0 v_0^2/\mu \neq 1$ のとき軌道は次のようになる。

- a) $0 < (r_0 v_0^2/\mu) < 1$ ならば発射点が遠地点になる楕円軌道
- b) $1 < (r_0 v_0^2/\mu) < 2$ ならば発射点が近地点になる楕円軌道
- c) $(r_0 v_0^2/\mu) = 2$ ならば発射点が近地点になる放物線軌道
- d) $(r_0 v_0^2/\mu) > 2$ ならば発射点が近地点になる双曲線軌道

これらに相当する e の値は方程式 (15*) によって得られる。

4) $\beta_0 \neq 0$ である以外は上記 (2) 項の場合に等しい $r_0 v_0^2/\mu$ と ER/μ の値に対して、軌道は離心率 e と $e = \sin \beta_0$, $\tan \theta_0 = -1/\tan \beta_0$ から定まる発射点に対応する近地点位置を持つ楕円である。

5) 一般に $\beta_0 \neq 0$ の場合、 e の値と発射点に対応する近地点位置はそれぞれ (19) と (17) 式から定まり、その軌道は

- a) $0 < (r_0 v_0^2/\mu) < 2$ のとき 楕 円
- b) $(r_0 v_0^2/\mu) = 0$ のとき 放物線
- c) $(r_0 v_0^2/\mu) > 2$ のとき 双曲線

6) すべての場合の所要エネルギーは β_0 に無関係で、(18) 式によって示すように r_0/R と $r_0 v_0^2/\mu$ だけに関係する。 $ER/\mu > 1$ のとき軌道は双曲線となり、地球からの脱出はすべての角 β_0 に対して可能で、その軌道は地球と交わらない。

7) 軌道が楕円または円のとき、 ER/μ は 1 より小さく、周期は (27) または (28) 式から定まる。

8) $\beta_0=0$ のとき、軌道はほとんど円であるが地球の表面上の遠地点高度と近地点高度の比は 1 より遙かに

に大きくなる。

9) $\beta_0 \neq 0$ のとき、離心率の大きい楕円軌道が大きい β_0 に対して可能である。

10) 軌道平面は地球の赤道の膨らみの過剰質量重力のモーメントにより歳差運動を行なう。

8. 記 号 表

r , 地球の中心からの距離

r_1 , 近地点距離 ($\theta=0$ に相当する r 最小の点)

r_0 , ロケット燃え切り距離

$u = 1/r$

R , 地球の半径

$h = r - R$, 地表からの高度

h_a , 遠地点 (r 最大の点) 高度

h_p , 近地点 (r 最小の点) 高度

a , 楕円の半長軸

b , 楕円の半短軸

θ , 基準線 r_1 から r の角

θ_0 , 基準線 r_1 から r_0 の角

β_0 , r_0 に直角に測ったロケット燃え切り時の機首角度

$\mu = GM = g_0 R^2$

G , 一般重力常数

M , 地球の質量

E , 単位質量当りの全エネルギー

V , " 位置エネルギー

T , " 運動エネルギー

v , 速度

v_0 , ロケット燃え切り時の速度

e , 楕円軌道の離心率

λ , 面積率の 2 倍

g_0 , 地表 $h=0$ における重力の加速度

τ , 軌道周期

人 工 衛 星 に 関 する 諸 問 題

岡 本 哲 史*

緒 言

ロケットの推進と誘導が進歩したため、人工衛星の打ち上げが可能になり、1957 年 10 月スプートニク第 1 号が成功して以来、ソ連とアメリカにおいて数個の観測用人工衛星が打ち上げられた。

まず注目されるのは人工衛星を打ち上げるためのロ

ケットであるが、打ち上げロケットの飛行力学については Perkins¹⁾ Okhotsimskii²⁾ の研究がある。これらの研究が取扱っているのは、いずれも変分法問題であって、Perkins は連続して推力を出すための最良のロケット軌道を計算し、Okhotsimskii は燃料消費率を最小にするようなロケットの運動の計算、予定された燃料消費率をもつようなロケットの運動の計算などを

* 東京工業大学