技 術 論 文

ホーミングを行なう飛しょう体の運動解析*

An Analysis of Homing-Missile's Motion

大 須 賀 節 雄**

Setsuo OSUGA

Abstract

The motion of homing-missile in case of three-dimensional space is analyzed, and effect of spinning of missile which is inevitable in cruciform type missile and have large effect on missile's homing characteristic is investigated. In analyzing this problem, we assume that missile has constant spin velocity and has devices to execute proportional navigation. Spinning of missile, combined with response lag time of guidance and control system, cause to missile's complicated motion. In this paper, characteristic of guidance and control system is represented by double, first order linear system.

1. ま え が き

ホーミングを行なう飛しょう体の運動については、現在までも種々の文献において取り扱われているが、多くの場合問題を2次元面内に限定し、かつ非常に単純化した解析がなされている。本稿ではこれを3次元空間内で解析し、ホーミングを行なう飛しょう体の運動に大きな影響を及ぼすと考えられる機軸まわりのスピンの問題を扱ってみる。現在われわれが想定しているのは、対称十字翼形式の飛しょう体であるが、これは工作・調整等の精度が十分でなかったり、また迎角、偏揺角等の存在するときに生ずる誘導片揺れモーメント等のために、何らかの方法で人為的に対策を施さぬ限り、スピンは不可避である。当然のことながら、飛しょう体内には検知したシグナルを分解して各一對の翼を適当な量だけ操舵し得るようなレゾルバーを有しているが、ホーミング装置やサーボ装置等に応答の遅れがあると、これがスピンとともに作用して飛しょう体は複雑な運動を行なうことが予想される。本稿においてはこの問題を扱うに際して、解析を容易にするために、スピン速度は一定とし、飛しょう体の動

特性を無視する。入力としては目標への目視線の変化速度をとる。このシグナルは分解されて各一對の翼の操舵角に対する入力となるが、この間の誘導機器特性を2次系で近似する。

2. 基礎方程式

ホーミングを行なう飛しょう体の運動を論ずるには、目標と飛しょう体の幾何学的な関係、すなわち空間運動方程式と、機体の操舵特性、誘導機器特性から成る閉ループ系を解かねばならない。これを第1図の如く簡単なブロック図で表わし、この各ブロックについて方程式を求める。

第1図 一般的なホーミング系のブロック・ダイアグラム

2-1 座標系 最初に、基礎方程式を導く際に用いる座標系を定義する、

$X_E Y_E Z_E$ 系—飛しょう体がランチャー上にあるときの状態で原点を飛しょう体の重心におき、機軸方向に X_E 軸をとる。これに垂直な面内水平方向に Y_E 軸、これらに垂直に Z_E 軸をとる。ランチャーは水平におかれているものとし、したがって Z_E としては鉛直上方を選ぶ。

$X_E' Y_E' Z_E'$ 系—飛しょう体がランチャー上にあるときは、 $X_E Y_E Z_E$ 系と一致しており、ランチャー離脱後も各軸の方向は不変であるが、原点は常に飛しょう体の重心にある。

$X_A Y_A Z_A$ 系—機体に固定した座標系で、機軸方向前方に X_A 軸、これと垂直面内各翼のヒンジ方向に $Y_A Z_A$ 軸をとる。

2-2 空間運動方程式 第2図のように目標および飛しょう体の位置、速度の方向を定義すると、3次元の空間運動方程式として、

* 昭和 85 年 6 月 14 日原稿受理

** 富士精密工業株式会社

第2図 座標系および幾何学的関係位置

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} \cos \sigma_2 - R \dot{\sigma}_2 \sin \sigma_2 \\ &= V_T \cos \gamma_{T2} \cos (\gamma_{T1} - \sigma_1) \\ &\quad - V_M \cos \gamma_{M2} \cos (\gamma_{M1} - \sigma_1), \\ \dot{R} \sin \sigma_2 + R \dot{\sigma}_2 \cos \sigma_2 \\ &= V_T \sin \gamma_{T2} - V_M \sin \gamma_{M2}, \\ R \dot{\sigma}_1 \cos \sigma_2 &= V_T \cos \gamma_{T2} \sin (\gamma_{T1} - \sigma_1) \\ &\quad - V_M \cos \gamma_{M2} \sin (\gamma_{M1} - \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

の関係が導かれる。

2-2 操舵方程式および飛しょう径路角速度 飛しょう体は目視線の角速度を入力として検知し、それを $Y_A Z_A$ 軸方向に分解せねばならない。われわれは目視線方向の角速度ベクトルを $\dot{\sigma}$ で表わし、これと $Y_A Z_A$ 軸方向の単位ベクトルとの内積により、 $Y_A Z_A$ 軸上の翼（以後Y翼およびZ翼と呼ぶ）の操舵シグナルとする。 i_E', j_E', k_E' および i_A, j_A, k_A をそれぞれ X_E', Y_E', Z_E' 系および $X_A Y_A Z_A$ 系の単位ベクトルとすると、 $\dot{\sigma}$ は、

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 i_E' - \dot{\sigma}_2 \cos \sigma_1 j_E' + \dot{\sigma}_1 k_E'. \quad (2)$$

であり、また、

$$\begin{aligned} k_A &= k_E' \cos \varphi - j_E' \sin \varphi, \\ j_A &= k_E' \sin \varphi + j_E' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

であるから、 $Y_A Z_A$ 軸方向のシグナルを e_y, e_z とすると、

$$\left. \begin{aligned} e_y &= j_A \cdot \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 \sin \varphi - \dot{\sigma}_2 \cos \varphi \cos \sigma_1, \\ e_z &= k_A \cdot \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 \cos \varphi + \dot{\sigma}_2 \sin \varphi \cos \sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

が得られる。誘導機器を、大別してホーミング装置とサーボ装置に分け、これらを各1次系で表わすと、この入力に対して操舵角 δ_y, δ_z は、

$$\left. \begin{aligned} (\tau_1 D + 1)(\tau_2 D + 1) \delta_y &= k e_y \\ &= k(\dot{\sigma}_1 \sin \varphi - \dot{\sigma}_2 \cos \varphi \cos \sigma_1), \\ (\tau_1 D + 1)(\tau_2 D + 1) \delta_z &= k e_z \\ &= k(\dot{\sigma}_1 \cos \varphi + \dot{\sigma}_2 \sin \varphi \cos \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる。 τ_1, τ_2 は時定数、 $D = d/dt$ 、 k は定数である。

$Y_E' Z_E'$ 軸上に仮想的な翼を考え、その舵角 δ_y' 、 δ_z' を δ_y, δ_z の合成量に等しくとる。なお δ_y, δ_z および δ_y', δ_z' とともに右ねじの方向を正にとっている。

$$i \delta_z - \delta_y = \Delta, \quad i \delta_z' - \delta_y' = \Delta', \quad i e_z - e_y = E. \quad (6)$$

とおくと、この両舵角の関係は、

$$\Delta = \Delta' e^{i\varphi}.$$

であり、また (5) 式を用い、 $\dot{\varphi} = p$ とすると、

$$\begin{aligned} &[\tau_1 \tau_2 D^2 + \{(\tau_1 + \tau_2) + 2ip\tau_1 \tau_2\} D \\ &\quad + \{1 - \tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2) ip\}] \Delta' \\ &= k(i D \sigma_1 + \cos \sigma_1 D \sigma_2). \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。他方操舵を行なうことにより、 Δ' に比例した空気が生ずるが、この力を $F_y' F_z'$ とすると、

$$F_y' = c \delta_z', \quad F_z' = -c \delta_y' - W \quad (8)$$

である。 c は常数、 W は飛しょう体の重量である。この力により、飛しょう体は加速度をもつが、それをすでに定義した γ_{M1}, γ_{M2} により表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_M &= (g/W) c [\delta_z' \sin \gamma_{M1} \cos \gamma_{M2} \\ &\quad - \delta_y' \sin \gamma_{M2}] - g \sin \gamma_{M2}, \\ V_M \dot{\gamma}_{M1} &= (g/W) c \delta_z' \cos \gamma_{M1} \cos \gamma_{M2}, \\ V_M \dot{\gamma}_{M2} &= (g/W) c [-\delta_z' \sin \gamma_{M1} \sin \gamma_{M2} \\ &\quad - \delta_y' \cos \gamma_{M2}] - g \cos \gamma_{M2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

が得られる。以上で必要な関係式がすべて得られた。用いる式は (1), (6), (7), (9) の各式である。

3. 解 析

前節で得た式を、次の条件および仮定を用いて近似化を行なう。

1) 目標は $X_E Y_E$ 面内を直線飛行する。 $\gamma_{T2} = 0$, $\gamma_{T1} = \text{一定}$ 。

2) 飛しょう体の X_E 軸まわりの変動はあまり大きくないものとする。また R が十分大なときは、

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma_{M1} &\doteq \gamma_{M1}, \quad \sin \gamma_{M2} \doteq \gamma_{M2}, \quad \sin \sigma_2 \doteq \sigma_2, \\ \cos \gamma_{M1} &\doteq 1, \quad \cos \gamma_{M2} \doteq 1, \quad \cos \sigma_2 \doteq 1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

が成り立つものとする。

上記仮定を用いると、空間運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} - R \sigma_2 \dot{\sigma}_2 &\doteq V_T \cos (\gamma_{T1} - \sigma_1) \\ &\quad - V_M \cos (\gamma_{M1} - \sigma_1), \\ \dot{R} \sigma_2 + R \dot{\sigma}_2 &\doteq -V_M \gamma_{M2}, \\ \dot{R} \dot{\sigma}_1 &= V_T \sin (\gamma_{T1} - \sigma_1) \\ &\quad - V_M \sin (\gamma_{M1} - \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。(11) 式第2式より、

$$R \sigma_2 \doteq - \int_0^t V_M \gamma_{M2} dt. \quad (12)$$

を得、また第2式に $\dot{\sigma}_2$ を乗じ、 $O(\dot{R} \sigma_2^2) = O(V_M \gamma_{M2} \sigma_2)$ であることを考えると、 $O(R \sigma_2 \dot{\sigma}_2) = O(\dot{R} \sigma_2^2)$ が得られるから、(11) 式第1式の左辺第2項は省略し得る。したがって (11) 式の第1, 3両式は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &\doteq V_T \cos(\gamma_{T1} - \sigma_1) - V_M \cos(\gamma_{M1} - \sigma_1), \\ R\dot{\sigma}_1 &\doteq V_T \sin(\gamma_{T1} - \sigma_1) - V_M \sin(\gamma_{M1} - \sigma_1) \end{aligned} \right\} (13)$$

が得られる。この式は第3図に示したように、

第3図

$\sigma_1 = \theta_1 - \bar{\sigma}_1$, $\gamma_{M1} = \theta_1 - \gamma_{M1}'$, $\gamma_{T1} = \theta_1 - \gamma_{T1}'$ (14)
と変数を変換すると、通常2次元の解析で用いるものと同じになる。 θ_1 は、

$$V_T \sin \tilde{\gamma}_{T1} = V_M \sin \theta_1. \quad (15)$$

から定まる定数であり、飛しょう体がこの条件を満たすように発射され、また飛しょうを続けるなら、その延長線上で目標に到達する。すなわちこれは基準飛しょう径路を示している。実際の場合、重力や突風等の外乱のために飛しょう体はこの基本径路からはずれた運動を行なうが、その変動は小さいものと考えることができる。つまり、飛しょう体の運動をこの基準径路からの微小攪乱として扱うことができる。これは $\gamma_{M1}' = \theta_1 + \tilde{\gamma}_{M1}$ とおいたとき、 $\tilde{\gamma}_{M1}$ は1次の微小量となることを意味する。また R が十分大であるなら、 $\bar{\sigma}_1$ も1次の微小量である。

(13) 式に (14) 式の新変数を用いて整理すると、積分できて、

$$\left. \begin{aligned} R \sin \bar{\sigma}_1 &= \int_0^t (V_T \sin \tilde{\gamma}_{T1} - V_M \sin \gamma_{M1}') dt, \\ R \cos \bar{\sigma}_1 &= \int_0^t (V_T \cos \tilde{\gamma}_{T1} - V_M \cos \gamma_{M1}') dt. \end{aligned} \right\} (16)$$

がえられるが、 $\bar{\sigma}_1$, $\tilde{\gamma}_{M1}$ が小なることを考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} R &\doteq R_0 - V_C t = V_C (T_0 - t) = V_C T, \\ \bar{\sigma}_1 &\doteq \left(- \int_0^t V_M \tilde{\gamma}_{M1} dt \right) / V_C T. \end{aligned} \right\} (17)$$

が得られる。ただし R_0 は $t=0$ の R の値であり、

$$\begin{aligned} V_C &= -V_T \cos \tilde{\gamma}_{T1} + V_M \cos \theta_1, \\ V_C \cdot T_0 &= R_0, \quad T = T_0 - t. \end{aligned} \quad (18)$$

である。これから判るように、 V_C は、飛しょう体が基準径路上にあるときの目標への接近速度、 T_0 は全飛しょう時間、 T は衝突時から逆に測った時間を表わす。ここで更に、

$$y_1 = \int_0^t V_M \tilde{\gamma}_{M1} dt, \quad y_2 = \int_0^t V_M \gamma_{M2} dt. \quad (19)$$

なる変数を導入すると、 $\bar{\sigma}_1$ および σ_2 に関して、

$$\bar{\sigma}_1 \doteq -(y \cos \theta_1) / V_C T, \quad \sigma_2 \doteq -y_2 / V_C T \quad (20)$$

が得られる。 y_1, y_2 は基本飛しょう径路から測った水平および垂直方向の変位を示す、(20) 式はこの変位を基準径路からはかった距離で割ることにより $\bar{\sigma}_1, \sigma_2$ の近似値を求めているから、 R が十分大なることが必要である。

他方 (9) 式は前記仮定を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{M1} &= -\tilde{\gamma}_{M1} = (gc/V_M W) \delta_z', \\ \dot{\gamma}_{M2} &= -(gc/V_M W) \delta_y' - g/V_M. \end{aligned} \right\} (21)$$

となるが、

$$-i\tilde{\gamma}_{M1} + \gamma_{M2} = A, \quad -iy_1 + y_2 = Y. \quad (22)$$

とおくと、(19) 式を考慮して、

$$D A = (gc/V_M W) A' - g/V_M = D(Y/V_M) \quad (23)$$

が得られる。これより A' を求めて (7) 式に代入し、かつ右辺末項の $\cos \sigma_1$ は $\sigma_1 \doteq \theta_1$ とおくと、

$$\begin{aligned} &[\tau_1 \tau_2 D^4 + \{(\tau_1 + \tau_2) + 2ip\tau_1 \tau_2\} D^3 \\ &\quad + \{1 - \tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2) ip\} D^2] Y \\ &\quad + \{1 - \tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2) ip\} g \\ &\quad = -\bar{k} D(Y/T). \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。 $\bar{k} = gck \cos \theta_1 / V_C W$ である。(24) 式を t について1度積分し整理すると次式が得られる。 c は定数である。

$$\begin{aligned} &[\tau_1 \tau_2 D^3 + \{(\tau_1 + \tau_2) + 2ip\tau_1 \tau_2\} D^2 \\ &\quad + \{1 - \tau_1 \tau_2 p^2 + ip(\tau_1 + \tau_2)\} D + \bar{k}/T] Y \\ &\quad = \{1 - \tau_1 \tau_2 p^2 + ip(\tau_1 + \tau_2)\} gt + C \end{aligned} \quad (25)$$

4. 安定性の判別

(25) 式は変数係数および複素係数を含む常微分方程式であるが、変数係数は左辺末項のみであるから、これを $\bar{k}/T = \mu$ とおいてパラメータとみなして安定性の判別を行なってみる。(25) 式の斉次部の特方程式は、

$$\begin{aligned} &\tau_1 \tau_2 \lambda^3 + [(\tau_1 + \tau_2) + 2ip\tau_1 \tau_2] \lambda^2 \\ &\quad + [1 - \tau_1 \tau_2 p^2 + ip(\tau_1 + \tau_2)] \lambda + \mu = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

である。一般に、

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (A_0 + iB_0) \lambda^n + (A_1 + iB_1) \lambda^{n-1} + \dots \\ &\quad + (A_n + iB_n). \end{aligned} \quad (27)$$

なる式の安定条件は、Gantmacher によれば、 λ の代りに $i\lambda$ を代入した式を、

$$\begin{aligned} f(i\lambda) &= b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots \\ &\quad + b_n + i(a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) \end{aligned} \quad (28)$$

と表わしたとき次のように表わされる。

$$|f_p| > 0, \quad (p=1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

ただし、

$$V_{2p} = \begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_{2p-1} \\ b_0, b_1, \dots, b_{2p-1} \\ 0, a_0, \dots, a_{2p-2} \\ 0, b_0, \dots, b_{2p-2} \\ \vdots \\ 0, a_0, \dots, a_{2p-2} \\ 0, b_0, \dots, b_{2p-2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p=1, 2, \dots, n \\ a_k=b_k=0 \\ \text{for } k>n \end{pmatrix} \quad (30)$$

これを用いてわれわれの系の安定条件を求めると、

$$(i) \quad \tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2) > 0, \quad (31)$$

$$(ii) \quad \tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2) (\tau_1 + \tau_2 - \tau_1 \tau_2 \mu) > 0, \quad (32)$$

$$(iii) \quad \tau_1 \tau_2 \mu [\tau_1^2 \tau_2^2 \mu^2 - 2(\tau_1 + \tau_2) \tau_1 \tau_2 \mu - (\tau_1 + \tau_2)^2 (p^2 \tau_1 \tau_2 - 1)] > 0, \quad (33)$$

の3つの条件が得られる。このうち (i) の条件は自動的に満足されるから、(ii), (iii) の条件を更に詳しく調べてみよう。

$$(\tau_1 + \tau_2) / \tau_1 \tau_2 = \alpha, \quad p^2 \tau_1 \tau_2 = \beta \quad (34)$$

とおいて整理すると、(32), (33) 両式より、

$$\mu < \alpha, \quad (35)$$

$$\mu^2 - 2\alpha\mu - \alpha^2(\beta - 1) = [\mu - \alpha(1 + \sqrt{\beta})][\mu - \alpha(1 - \sqrt{\beta})] > 0. \quad (36)$$

が得られるが、(36) 式の条件は更に、

$$\mu > \alpha(1 + \sqrt{\beta}), \quad \mu < \alpha(1 - \sqrt{\beta}) \quad (37)$$

の2つの条件に分けられる。 $\mu = \bar{k} / (T_0 - t)$ であるから、(35) 式および (37) 式の条件を実時間 t で書き直すと、

$$(i) \quad t < T_0 - \bar{k} / \alpha \equiv T_1, \quad (38)$$

$$(ii) \quad t > T_0 - \bar{k} / \alpha (1 + \sqrt{\beta}) \equiv T_2, \quad (39)$$

$$(iii) \quad t < T_0 - \bar{k} / \alpha (1 - \sqrt{\beta}) \equiv T_3, \quad (40)$$

が得られる。しかるに $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ であるから $T_3 \leq T_1 \leq T_2$ であり、(38), (39) 式の条件は (40) 式の場合の中に含まれてしまう。(40) 式において $\beta \rightarrow 1$ になると $T_3 \rightarrow -\infty$ となり、安定領域が消滅する。この限界は $T_3 \leq 0$ になるときで、

$$T_0 \leq \bar{k} / \alpha (1 - \sqrt{\beta}) \quad (41)$$

で与えられる。 β について書き直すと、

$$\beta \geq (1 - \bar{k} / \alpha T_0)^2 = (1 - \mu_0 / \alpha)^2, \quad \mu_0 \equiv \bar{k} / T_0. \quad (42)$$

となる。なお $\beta \rightarrow 0$ とすると (39), (40) 式の条件は (38) 式と一致する。この条件はスピンの有無にかかわらず存在する不安定性であることが判る。以上のことから、安定領域を大にするためには α を大きく β を小さくすること、すなわち τ_1, τ_2, p を小にすることが必要である。第4図および第5図に、この安定限界を示す。第4図は参考のため T_1, T_2, T_3 の各領域の1例を特定の α, μ_0 について示したもので、斜線を施した部分が不安定領域を示す。第5図は μ_0 / α をパラメータにした、 T_3 の安定限界である。

5. 特別の場合の計算例

(25) 式の特別の場合として、 $\tau_2 = 0$ としたときの

第4図

第5図

検討を行なってみる。これは誘導機器全体を1次系で表わした場合であり、 $\alpha \rightarrow \infty$ となることからこの系は全領域にわたって安定となるが、 R が十分大で、スピン速度が大でない場合には、この近似でもかなり良い結果が得られる。(25) 式において、 $\tau_2 = 0$ とすると、

$$\tau_1 \ddot{Y} + (1 + i\tau_1 p) \dot{Y} + (\bar{k} / T) Y = -(1 + i\tau_1 p) g t + c \quad (43)$$

を得る。この式は $p = 0$ とすると、2次元面内で比例航法を行なう飛しょう体の運動解析においてよくみかける式となる。(43) 式を用いて数値計算を行なった結果を第6図に示す。ただし計算には $t / \tau_1 = x$ なる変換を行なった式を用いた。用いた数値は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.25 \text{ sec}, \quad p = -4 \text{ rad/sec}, \quad \bar{k} = 6, \\ x_0 &= T_0 / \tau_1 = 20, \quad Y_0 = \dot{Y}_0 = 0, \\ \dot{Y}_0 &= 0 (\text{case a}), \quad -10 i \text{ m/case (case b)}, \end{aligned}$$

第6図 (a) は初期条件をすべて0とし、重力の影響のみを調べた結果であり、(b) は重力を無視して初期条件の影響を調べた結果である。すでに述べたように、 y_1, y_2 は基準飛しょう径路からの変位であるから、第6図は後方からみた運動の軌跡を示している。

第 6 図

6. 検 討

前節までで飛しょう体のホーミング運動に対して解析結果を得たが、これまでに種々の仮定を用いているので本節で影響の大きい次の 4 項目について検討してみる。

i) 機体の動特性 飛しょう体の動特性の影響は、2次元面内での解析等から、目標の近傍において著しく現われる場合のあることが知られている。動特性に起因する不安定性がもし生ずるとするなら、それと、第 5 図に示された安定限界とを組み合わせる実際の安定限界を求める必要がある。筆者は次稿において機体の動特性を考慮した解析を行なう予定である。

ii) シグナルの検知および分解方法 本稿においては、入力シグナルとして目標への目視線速度を検知し、その $Y_A Z_A$ 軸方向成分を操舵シグナルとしているが、一般にシグナルの検知・分解方法はホーミング装置の機構によって変えることができるから、必ずしも本稿で用いたとおりではないが、多くの場合上記の如き数学的モデルで表わすことができるようである。

iii) 誘導機器の特性 誘導機器は通常複雑な機構をもっているため、その特性も厳密にはかなり高次の系になることが予想される。これをどの程度に近似するか、というより逆にどのような特性をもった誘導機器を設計すべきであるかという問題が生じる。そのめやすとして次の如き考察を行なってみる。われわれはある誘導装置を想定し、その特性が n 個の 1 次系で表わされるとする。ただし個々の時定数の総和は、あまり大になることはないから、これを $\tau = \text{一定}$ とし、個々の系の時定数は τ/n とする。すると誘導機器の特性は、伝達函数表示で、

$$G(s) = (1 + \tau s/n)^{-n}, \quad (44)$$

である。 $n \rightarrow \infty$ とすると、 $G(s) \rightarrow e^{-\tau s}$ となるが、これは物理的には入力に対して完全に τs だけ遅れた出

力が得られることを意味する。飛しょう体がスピンを行なった場合、入力が入ってから応答するまでに $\tau p \text{ rad}$ だけ回転してしまっている。これが $\pi/2$ を越すと運動が発散することは容易に判る。すなわち運動を不安定にする p の値は、

$$\tau p \geq \pi/2 \div 1.57.$$

である。このことは根軌跡を描くことによっても得られる。第 7 図に、(26) 式の左辺の μ を右辺に移項してパラメータとしたときの根軌跡の 1 例を示す。誘導機器が (44) 式で表わされる特性をもっている場合、 $p=0$ とすると、原点に 1 つ、 $-n/\tau$ の位置に n 個の零点があるから、根軌跡が虚軸を横切る点の座標を、 $C(0, \pm iy)$ とすると、 C 点は、

第 7 図 根 軌 跡

$$n \tan^{-1}(\tau y/n) + \pi/2 = \pi \quad (45)$$

を満足せねばならない。スピンの存在する場合は、 $-n/\tau$ の位置の零点が、負の虚軸方向に p だけ移動するのみであり、したがって C 点も p だけ下がってくる。 C が原点にきたときの絶対的な安定限界である。このようにして調べた結果 $n=2, 3, 4$ および ∞ としたときの安定限界として

$$\tau p = 2(n=2), \quad \tau p = 1.732(n=3),$$

$$\tau p = 1.657(n=4), \quad \tau p = 1.571(n=\infty),$$

が得られる。 $n=2$ の場合は、(42) 式において $T_0 \rightarrow \infty$ としたときと一致する。実際の場合ホーミング運動の安定性において問題となるのは第 5 図のような関係であり、以上のことから一般的な結論を導くまでには行かないが、大体の傾向として誘導機器の次数が増すにつれて、スピンによる不安定性は強くなる。なおこの

方法によって、C 点の $|\mu|$ の値を求めることにより、 n が一般の場合について、第5図のような関係を求めることもできるが、実際には誘導機器特性に2次の振動項が含まれることももちろん予想されるので、これについての検討は次稿で行なうこととする。

iv) 空間運動方程式の線型化 本稿においては空間運動方程式を取り扱う際、 $\bar{\sigma}_1, \sigma_2$ および $\bar{\gamma}_{M1}, \gamma_{M2}$ の値は非常に小さいと仮定したが、この仮定は結果的にみるなら、第6図に示されているように、 y_1, y_2 および $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ があまり大でないことから、 V_M および R がある程度大であるなら十分成り立つことが判る。この仮定を用い得る R の最小距離は、この解析に許される誤差の大きさに依存するが、かりに $\bar{\sigma}_1$ に関して5%の誤差を許すとするなら、 $\sin \bar{\sigma}_1 \doteq \bar{\sigma}_1$, $\cos \bar{\sigma}_1 \doteq 1$ 、とおくことによる誤差が5%となるような $\bar{\sigma}_1$ の値は約 18° であり、 $\tan \bar{\sigma}_1 \doteq y_1/R$ から、 $R_{\min} \doteq 3y_1$ となる。実際の飛しょう体では、たとえ不安定領域に入っても旋回時の g 制限等のために、 y_1, y_2 があまり大になることはないから、 $R_{\min}$ も小で実質的にはほとんど

ど全領域にわたって上記の仮定が成り立つものと考えてよいであろう。

7. むすび

以上飛しょう体のホーミング運動の解析を行なってきたが、すでに前節に述べたように、本解析にもまだ多くの問題が残されている。今後それらを順次解決して行きたい。

本稿の作成にあたっては富士精密工業技術部柴田和雄課長より数々の御教示を頂いた。ここで厚く御礼を申し述べる次第である。

参 考 文 献

- 1) Arther S. Lock and collaborators; Guidance, D. Van Nostrand Comp. 1955.
- 2) Fred P. Adler; Missile Guidance by Three-Dimensional Proportional Navigation, J. Appl. Phys., Vol. 27 No.5 May 1956.
- 3) Allen E. Puckett, Simon Ramo; Guided Missile Engineering, McGraw-Hill Book Co.
- 4) H.S. Tsien; Engineering Cybernetics, McGraw-Hill Book Co. 1954.
- 5) R. R. Gantmacher; The Theory of Matrices, Vol. I and II, Chelsea Publishing Co. New York.

抄 録 (続 き)

(316 頁より続く)

よく使われる構造係数 δ の代りに、推進剤モーター比 A を使う。ここに δ および A は、推進剤重量を M_p 、モーターその他構造物重量を M_s として、それぞれ $\delta = M_s/(M_p + M_s)$ ならびに $A = M_p/(M_p + M_s)$ のように定められたものである。したがって、 $A = 1 - \delta$ だから、どちらを使っても差はないだろう。

図表は、多段ロケットの段数別に、1段の場合から5段の場合に対し、最大速度とガスの噴射速度との比をパラメーターにして、この A と α との関係を表わしている。ただし α は、全体の重量と利用荷重重量との比である。

各段での、推進剤の重さを変えた影響を調べると、それはいつでも、重さを増せば最大速も増すようになることが明らかになる。推進剤を増したためにその前の段階での利用荷重が増え、それは最大速を減らす向きに働くが、それによつては打消されないのである。

なお、普通のロケットでは、最後の利用荷重の重量変化の割合はその約5割が、構造物の重量変化ではその割合の約2割ないし3割が、最大速の変化の割合としてきて来ることなどが導かれている。

(新羅一郎)

材 料

8. ポリエチレンのクリープおよび破壊挙動

Creep and creep-rupture behavior of polyethylene resins. R.H. Carey. *Ind. Eng. Chem.* 50, 7 (1958/7) 1045-1048. ポリエチレンのクリープおよびクリープ破壊特性に及ぼす結晶化度、分子量更に密度等の影響が調べられている。水中で温度を室温より 100°C まで変えられるようにした簡単な引張りクリープ試験装置が用いられ約1カ年にわたる測定がなされた。高密度ポリエチレンではクリープ歪は主として結晶化度に影響されるが、クリープ破壊には分子量とメルトインデックスの影響が大きい。低密度ポリエチレンでは長時間クリープ結果の簡易推定法として応力-歪-温度関係を短時間試験で求めて整理する方法が有効である。これらの結果クリープ歪の設計許容限度としては5% くらいが適当とされている。いろいろな充填剤のクリープ挙動に及ぼす影響も比較されている。また切欠き効果はクリープ破壊と直接的に深い関係はないことが述べられている。(伊藤勝彦)

9. ポリプロピレンのセグメント運動 *Segmental motion in polypropylene.* J.A. Sauer, R.A. Wall, N. Fuschillo & A.E. Woodward. *J. App. Phys.* 29, 10 (1958/10) 1385-1389. 結晶度の高いアイソタクチック・ポリプロンの可聴周波数領域での弾性損失は 430°K の上に α 分散、 $290^\circ\sim 300^\circ\text{K}$ に β 分散、 250°K 付近に γ 分散がある。無定形のアタクチ

(296 頁へ続く)