技 術 論 文

細長い等方性平板における Shear Lag について

On the Shear Lag in a Long Isotropic Flat Panel*

林 孝 哉**

Takaya HAYASHI

Abstract

The shear lag analysis under the condition of given edge stresses is more important in the structural design than that under the condition of given flange areas and the loads. The exact solution of a long isotropic flat panel with constant edge stresses is obtained as one of the plane stress problems. The stress distributions are investigated and the effective width is also given as the ratio to the panel width.

The maximum shear stress is equal to $0.64 \times$ (edge stress) at the free end corners and the maximum transverse normal stress is equal to the edge stress with a reversed sign along the free end. It is found that the maximum resultant shear stress is $.81 \times$ (edge stress), which is the considerably large amount in the structural design.

The method of determining the flange area with constant stress has been obtained.

1. 緒 言

現在の航空機構造は機装、組立、点検等の便をはかるため、主翼を胴体側面部で切断分割し集中的に桁フランジで結合したり、後部胴体をジェット・エンジン取り付け部直後で分割し主ロンジンのみで結合したものがある。この付近で応力外皮は自由端に近い条件になっているので、いわゆる shear lag の問題が起こる。設計上まず第一に板の軸方向の有効度（桁フランジへの協力度）が自由端に近づくに従って減少することにより、いかにフランジの断面積を増大すればよいかということと、次に自由端隅部付近に起こる外板の剪断応力の集中度はいかようであるかという二つが特に問題点となる。

shear lag に関しては、既に国内外において相当研究成果が挙げられているが^{1)~9)}、設計上の参考資料として、より有用なものを望む余地はまだ多いと思われる。それは従来の研究対象とされた問題の境界条件が設計の実状に適さなかったり解析の便のため特定の仮

定を設けることにより、局部の応力状態に対して正しい知識を与えないこと等に起因する。

第 1 図

第 1 図に示す如く、一定断面積の縦通材に集中荷重の作用する場合の解析がおこなわれているが、これは縁材の応力が端末で大になることは明瞭で、設計上は直ちに断面増加をはかって応力一定の条件に近づける努力がなされる。したがって設計資料としては縁材応力一定の境界条件をあつかう方がより有用である。また解析の便のため縦通材位置の軸方向変位 u_1, u_2, u_3 のみを考慮して近似的にあつた場合には、板の局部の応力状態に対しては正しい結果を与えない。

著者はこれらの点を鑑みて、shear lag 現象の基本的な考察ならびに設計資料の一つとして、縁応力一定の境界条件下で特定の近似的な仮定を設けない等方性平板の平面応力問題として、細長いパネルの shear lag の解析を行ない、その結果を吟味して、合理的な一定応力縁材の設計法を提案しようとするものである。

2. 解 析

平面応力問題は、与えられた境界条件、力の釣合方程式、変位の適合条件式の三者を充たす応力分布 σ_x, σ_y, τ を見出すことにある。重調和函数 χ を応力函数として導入すれば、釣合、適合の両条件は充たされるので、境界条件を満足する応力函数を重調和函数として見出せばよい。

2.1 境界条件 第 2 図に示すように、free end および縁辺で、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 0, \tau = 0; (x=0, b/2 > y > -b/2) \\ \sigma_x &= \sigma_0(\text{const.}), \sigma_y = 0; (y = \pm b/2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 昭和 36 年 11 月 18 日 原稿受理

** 富士重工株式会社

第2図

を境界条件とする。幅 b 、板厚 t の半無限帯板を考える。 σ_0 は一定の縁材応力である。

縁辺における剪断応力に関しては、第2-1図に示す負荷状態を考えるとつぎの縁材釣合条件が成立せねばならない。

第2-1図

$$p(x) = \int_0^x \tau'(x) \cdot t \cdot dx + \sigma_0 \cdot A_F(x) \quad (2)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= p_0 + \int_0^x q(x) \cdot dx \\ \tau'(x) &= \mp \tau(x, \pm b/2) \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

p_0 : 縁材端末軸方向荷重

$q(x)$: 縁材外部剪断流荷重

$A_F(x)$: 一定応力縁材断面積

また、 $x=0 \sim x$ 間のパネルについて、 x 方向の外力の釣合条件

$$2 \int_0^x \tau'(x) \cdot t \cdot dx = \sigma_0 \cdot b \cdot t \cdot \eta(x) \quad (4)$$

が成立するので、(2)、(4) 両式より

$$A_F(x) = \frac{p(x)}{\sigma_0} - \frac{1}{2} b \cdot t \cdot \eta(x) \quad (5)$$

を得る。すなわち外荷重 p_0 、 $q(x)$ が与えられると、後に示す有効幅の効率 $\eta(x)$ を用いて、上式により縁材断面積 $A_F(x)$ を決定してやれば、縁材に関する力の釣合が充たされて一定応力の縁材が得られる。

2.2 基礎関係式 歪, 変位, 応力関係式

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

u, v ; x, y 方向変位成分

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma$; 歪成分

σ_x, σ_y, τ ; 応力成分

E ; ヤング率

ν ; ポアソン比

(6) 式で変位に関する独立成分が二つであることより、歪に関する適合条件式を得る。

適合条件式

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

また、応力の3成分に関し

釣合方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

が成立する。これは応力函数 χ を導入し

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

とすれば自動的に満足され、(6) 式を介して適合条件式 (7) に代入すれば、重調和方程式をうる。

$$\Delta \Delta \chi = 0 \quad (10)$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

2.3 解 境界条件 (1) を充たす平面応力函数 χ を探すと、下記のごとき厳密解が得られる。

$$\chi = \sigma_0 \left\{ \frac{y^2}{2} - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_m}{\alpha_m^2} e^{\alpha_m x} \cos \alpha_m y + x \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_m}{\alpha_m} e^{\alpha_m x} \cos \alpha_m y \right\} \quad (11)$$

$$A_m = \frac{4}{\pi} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{1}{m} \right), \quad \alpha_m = -\frac{m\pi}{b}$$

これは $\chi = A e^{\alpha x} \cdot e^{\beta y}$ 型の解を考え、フーリエ級数の性質を使って境界条件を満足させることによって得られたものである。これより (9) 式を用いて

応力分布:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \{ 1 + \sum A_m (1 - x \cdot \alpha_m) e^{\alpha_m x} \cos \alpha_m y \} \\ \sigma_y &= \sigma_0 \{ \sum A_m (1 + x \cdot \alpha_m) e^{\alpha_m x} \cos \alpha_m y \} \\ \tau &= \sigma_0 \{ \sum A_m \cdot x \cdot \alpha_m \cdot e^{\alpha_m x} \sin \alpha_m y \} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left(\sum = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \right)$$

を得る。変位および歪に関しては (6) 式を用いてすべての解が得られるのでこのパネルの平面応力問題は解決した。

つぎに有効幅を

$$b_m = \frac{1}{\sigma_0} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy \quad (13)$$

と定義し、これを non dimension にして、効率

$$\eta = \frac{b_m}{b} \quad (14)$$

で表わせば

$$\eta = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(1 + m\pi \frac{x}{b}\right) e^{-\frac{m\pi x}{b}} \quad (15)$$

を得る。これで第一の問題点の解が得られたことになる。つぎの問題点は最大剪断応力値であるが、(12) 式の τ の値は縁辺 $y = \pm b/2$ で極値をとることは明らかであり、

$$y = \pm b/2;$$

$$\left| \frac{\tau}{\sigma_0} \right| = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} 4 \cdot \frac{x}{b} \cdot e^{-\frac{m\pi x}{b}} \quad (16)$$

これはまた $x=0$ で最大値をとり、

$$\left| \frac{\tau_{\max}}{\sigma_0} \right| = \frac{2}{\pi} \div 0.64 \quad (17)$$

となる。

3. 結 果

第3図に σ_x/σ_0 の分布を示す。これにより板が free end から離れるに従って漸次縁応力と等しくなっていく状況を一見して知ることが出来る。

第3図 σ_x/σ_0 分布図

第4図に有効幅を効率 η で示す。 $x=b$ で中央応力は縁応力の 80% に達しないが、有効幅は 85% に達する。 free end から板幅の 1.5 倍中に入ると、中央応力は 90% を越え、効率は 96% に達する。 $x/b > 2$ では $\eta = 1$ と見なして実際上さしつかえはない。

第4図 有効幅分布

第5図に σ_y の分布を示す。注意すべきことは free

end に沿って、 σ_0 (縁応力) に大いさ等しく、符号反対の一定応力が現われることである。 σ_y の分布は比較的複雑な様相であるが、end 付近を除いて問題になる大いさではない。

第5図 σ_y/σ_0 分布図

第6図に剪断応力 τ の分布を示す、 τ は縁辺 ($y = \pm b/2$) で極値をとり、 $x=0, y = \pm b/2$ で最大値となる。その値は (17) 式で示したとおり $|\tau_{\max}/\sigma_0| \div 0.64$ である。この値は単独で、特に問題になる量ではないが、free end の隅部には、 $\sigma_x = \sigma_0, \sigma_y = 0$ が同時に働いているので

$$x=0, y = \pm b/2;$$

$$\tau^*_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \div 0.81 |\sigma_0| \quad (18)$$

となる。第7図に縁材に沿った $\tau^*_{\max}$ の分布を示す。(18) 式の最大値 $.81 |\sigma_0|$ は縁材の許容応力を引張りに対していっぱいにとった場合、普通材料では剪断強度の不足を招き得ることを意味する。いま材料の剪断許容応力が引張り許容応力の 0.6 倍とすれば、縁材応力は板の剪断強度のために、単独で引張りに耐える場合の 74% の応力に落とさねばならない。

このような構造効率の低下を防ぐために、板の局部

第6図 τ/σ_0 分布図

第7図 $\tau_{\max}$ 分布 (縁辺)

にダブルを施したり, free end に曲げに耐える部材を取り付ける。この場合の解析は実際的に重要と思われるが, 古典的な美しい解析は困難で数値的な方法に訴えるほかないと考えられる。(ただし曲げ材の付く場合については文献 6) を参照されたい)

4. Example

第8図に示すごとき寸度の細長いパネルの端に集中荷重 100 t が作用する場合に, 縁材応力を一様に 20 kg/mm² にすることを考える。縁材とパネルは同一材料とする。

第8図

縁材断面積を下記のごとく決定すれば目的が達せられる。

- 1) 自由端 (板無効 $\eta=0$)

$$A_F(x=0) = 100,000 \text{ kg} / 20 (\text{kg/mm}^2) = 5,000 \text{ mm}^2$$

- 2) 自由端より十分離れた部分 (板全部有効 $\eta=1$)

$$\begin{aligned} A_F(x \gg b) &= A_F(x=0) - 1/2 \cdot b \cdot t \\ &= 5,000 \text{ mm}^2 - 1/2 \times 1,000 \text{ mm} \times 2 \text{ mm} \\ &= 4,000 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

- 3) 自由端近傍 (板一部分有効 $0 < \eta < 1$)

$$\begin{aligned} A_F(x=x) &= A_F(x=0) - 1/2 \cdot b \cdot t \cdot \eta(x) \\ &= A_F(x=0) - 1/2 \cdot b \cdot t \cdot \eta(x) \\ &= 5,000 \text{ mm}^2 - 1,000 \text{ mm}^2 \times \eta(x) \end{aligned}$$

結果を第9図 A_F で示す。shear lag の考慮をしないで板を全部有効とすれば, 自由端付近で縁材は危険側となり, 板を全部無視すれば自由端から十分離れたところで無駄な重量を費やすことになる。

第9図

パネルの最大剪断応力は

$$\tau_{\max} = 0.81 \times 20 \text{ kg/mm}^2 = 16.2 \text{ kg/mm}^2$$

となり, これが材料に対しつらすぎる場合はパネルの自由端隅部をダブル補強しなければならない。

5. 結 語

縁材応力一定という条件で, 細長い等方性パネルの shear lag を平面弾性論によって厳密に解析し, パネルの応力分布ならびに有効幅を求めた。有効幅を用いて shear lag の存在する場合の一定応力縁材の断面積決定法の要点は

- (1) 自由端 ($x/b=0$) では板無効
- (2) $x/b \geq 2$ では板全部有効
- (3) $0 < x/b < 2$ では板の有効幅を考慮して, (5) 式によって縁材の断面積を決定する。(この場合 $x/b=1$ で板は 15% 効かなくなる)

ことである。

また板の自由端隅部では剪断応力が縁材応力の 81% に達し, これは普通材料としては過大な値となり得るので, 補強の要否を考慮すべきことを指摘した。

終りに本研究の発表の機会を与えられた当宇都宮製作所内藤子生航空機工場長, ならびに shear lag の問題に関し有益な御教示を頂いた東京大学航空学科林毅教授に厚く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Kuhn "Stresses in Aircraft and Shell Structures" McGraw-Hill Book Comp. 1956.
- 2) "Structural Principles and Data" Hand Book of Aeronautics, No. 1, Pitsman
- 3) H.L. Cox, H.E. Smith, and C.G. Conway; "Diffusion of Concentrated Loads into Monocoque Structures" R. & M. No. 1780, 1937.
- 4) W.J. Duncan: "Diffusion of Load in Certain Sheet-Stringer Combinations" R. & M. No. 1825, 1938.
- 5) H.L. Cox: "Diffusion of Concentrated Loads into Monocoque Structures III", R. & M. No. 1860, 1938.
- 6) 林 毅, "補強板に於ける端部材の曲げ剛性がその応力分布に及ぼす影響に就いて" 日本航空学会誌, 昭和 18 年 1 月
- 7) 林 毅, "船体縦壁に於けるシア・ラックに就いて" 造船協会論文集, 第 89 号
- 8) 林 毅, "軽構造に於ける補強板の応力解析" 造船協会会報, 第 76 号
- 9) 内藤子生, "主翼の応力計算法に就いて" 日本航空学会誌, 昭和 13 年 12 月