航空機およびミサイル構造に及ぼす温度と時間の影響*

Nicholas J. HOFF**

本論文は 1960 年 11 月 8 日に日本の名古屋で開催される日本航空学会の 50 周年記念講演会での特別講演のために準備された。ここに述べられる研究の一部はアメリカ空軍の航空研究開発司令部科学研究当局の監査を受けている。契約番号 No. AF 49 (638)-223 のもとにアメリカ空軍による援助をうけて行なったものである¹⁾。

要 約

空力加熱により生ずる高温のために、航空機およびミサイルの構造解析上にもたらされる新しい問題について概観した。熱応力、熱座屈、応力分布および安定性に対するクリープの効果、およびアブレーションが論じられ、特にミサイルに用いられる純粋殻 (pure shell) の振舞いに注目した。現代の構造解析者は第二次大戦以前の先人が何ら興味を持たなかった多くの学問の知識を習得しなければならない。すなわち熱力学、冶金学および固体状態の物理学である。すべての新しい問題では古典的構造解析には入って来なかった 2 つのパラメーターが現われる。第 1 は温度であり、これこそ現代の構造設計者および解析者のすべての難問の原因である。第 2 は時間である。なぜならば高温ではいかなる構造といえども、無限に長い期間にわたっては荷重を支え得ないからである。ミサイル解析者の最も重要な仕事の 1 つは構造の寿命を決定することである。

序 論

まず日本航空学会の創設 50 周年記念日の講演に招待された名誉に対し、感謝の意を表したい。水なる物体は各国を分けへだてているのではなく、むしろ、結びつけているのであって、太平洋の西岸に近い日本と東岸のカリフォルニアとは帆船の時代に既に通商を行っていた。通商および文化の結びつきがわれわれ両国間において将来ますます緊密になり、今回の如き機会が多く持たれて、日本とアメリカとの技術者、科学者の間に知識の交換がひんばんに行なえるようになるこ

とを希望する。

私の論文の主題として、現代工学において非常に重要な 2 つの新しいパラメーター、すなわち温度と時間についての検討を選んだ。慣用的工学設計では構造が受けもたねばならない最大荷重を予言するか、推定するか、計算するかまたは単に規定し、そしてこの荷重の何倍かを永久破壊も変形も生じないで支え得るようにという方法で構造設計をするのが習慣とされて来た。計算はほとんど例外なく、応力と歪とを結ぶフックの線型法則に基づいて行なわれた。この処理方法に含まれる設計思想は、重量軽減という強い動機が現われ、また構造物および機械が常態よりも相当高い温度で作動し始めるまでは十分であった。

慣習的思想から初めて脱却したのは第 2 次大戦初期で英国の構造技術者が limit analysis および limit design¹⁾ という考えを振興した。limit design の起こりは 1913 年²⁾にあるが、この根本的な新しい考えを土木技術界に受け入れさせるには、第 2 次世界大戦の刺激が必要であった。この新しいすめ方では弾性限内での応力計算は完全塑性の概念に基づく解析のために放棄された。

慣習的完全弾性解析に基づく安全係数 3 の意味は構造が破損する作用荷重の実際の倍数は 3 というのであるがこれは容易に 6 にも 1.5 にもされ得ることが判った。したがって、第 2 次大戦前に設計に用いられた方法は使用応力に対し、十分な水準を保証したが、異なった種類の構造要素に対する過荷重のもとでの破壊に対して一様な安全余裕を与えることには完全に失敗した。

limit analysis は構造材料の応力-歪関係が高荷重ではフックの直線則からそれることを考慮している。同じような逸脱が比較的小荷重においても、構造要素の温度が十分高いと重要になり得る。機械設計および構造に一般に用いられる金属に対して、この温度水準は材料の融点の 25~50% の間にある。この水準を越えたとき重要性を持って来る現象はクリープとして知られている。これは加えられる荷重が一定なときでも時間とともに連続的に変形するという材料の特性である。

機械においては、クリープ変形は、高温で作働する

* 昭和 35 年 11 月 8 日日本航空学会講演会において講演。原文題名 The Effects of Temperature and Time on Aircraft and Missile Structures, ほん訳 林 毅 (東大工) 林邦夫 (東大工)

** スタンフォード大学航空工学科

発動機が設計された、1920年代に初めて詳細に研究された。機械設計上クリープの重要性を最初に包括的に解析したものの1つが、日本で提出されたことはおもしろいことである。すなわち1929年東京での世界動力会議における R. W. Bailey³⁾ の論文がそれである。この現象がこれまで無視され得たという事実は驚くにあたらない。構造物や機械の設計者はクリープ変形を全く除去するという観点で材料を選んだ。そしてこのゆえに室温でも顕著にクリープする鉛の如き低融点金属よりも、木材や鋼、アルミニウム合金を用いた。

金属航空機構造要素でクリープが設計者を困らせ始めたのは空力加熱の結果、超音速航空機やミサイルの温度が高くなったほんのここ10年間のことである。詳細なクリープの資料も、新しい設計思想も多分に欠けていたので、次のような便法が通常用いられた。応力分布はフックの線型則による慣用的方法に基づき計算され、つぎに、そのように計算された応力に対し、実験データに基づき定常クリープ率が決定され、それから変形が大きくなりすぎて、構造要素が安全に働かなくなるまでの時間が計算された。もし、この時間が構造物の要求される寿命より大きければ、その設計は満足なものと考えられ、そうでないならば応力がもっと低くなるように新しい設計がなされた。

クリープ問題を取り扱うこの方法はクリープ変形にともなう応力分布の変化を考慮していないから原理的に正しくない。超音速航空機特に高速ミサイルの構造要素においては急激なクリープが起こるから、より厳密な解析が必要である。

すべてのクリープ問題で構造設計上2つの新しいパラメーターすなわち温度と時間とが重要な役割を演ずる。高温でなければ、クリープ現象は重要でない。クリープが存在するときには、ほんの小さい荷重下でも長い時間作用し続けた場合、どんな構造物も安全ではないから、時間要素が導入されなければならない。2つの新しいパラメーターの効果を系統的に研究するのが、本論文の目的である。

しかし、時間パラメーターは航空機設計に相当以前に導入されたことを付言しなければならない。第2次大戦直前、航空機に高性能アルミニウム合金が導入されたとき、始めて重要な設計要素となった。高強度アルミニウム合金により可能となった航空機構造の重量軽減の予期せざる結果として、200~300時間の飛行の後での破壊が多数起こった⁴⁾。アルミニウム合金は高荷重の単一負荷にたえる能力が相当改良されても、小荷重の多くのくりかえしにたえる能力はほとんど増加しないことが判った。繰りかえし荷重負荷の後の破壊は疲労と呼ばれる。この現象の研究者たちは高温で

のクリープに関心を持つ設計者にとって有益な概念を導き出した。特に寿命と破壊の確率という用語は、低温での疲労でも高温でのクリープでも等しく重要である。疲労に関しての文献^{5),6)}は非常に多いが、ここでは、それについてこれ以上論じないことにする。本講演においては私は広範な原理を強調し、典型的実例によって、それらを例証することにしよう。私はこの分野のすべての研究者の仕事を包括しようとはしないし、包括的な著書目録を与えようとも思わない。ゆえに、この論文から、その研究者の名前が省かれていることが、その人の仕事が航空機構造設計上重要でないということを毫も意味しない。同様に著者およびその協力者によってなされた仕事に対し、多くの参照を行っているが、彼らのみが高温での航空機およびミサイル構造の様相についての知識に対し、重要な考えや詳細な研究を提供したというふうにとりて頂きたい。参考文献に対する私のこの選択の明白な理由は私がこの仕事に非常に親密であるからである。

航空機およびミサイル構造の加熱

空力加熱 本論文は構造を取り扱うのであって、空力学を論ずるものではないから空力加熱理論の歴史を長々と論じたり、加熱効果の強さの計算のための完全な一連の数式を与えようとは思わない。しかし構造技術者にとって、加熱効果の大きさの程度についての感覚を養っておくことは大切である。この理由で、Polytechnic Institute of Brooklyn の Martin H. Bloom の論文⁷⁾ から3つのグラフと2つの方程式をここに再掲しよう。物体が静止気体中を速度 V で動いているならば、流れの場の淀み点では、相対速度の全運動エネルギーは、熱エネルギーに変換される。気体を通しての伝導がなければ、完全に絶縁された物体内で到達される定常温度は、淀み点温度として知られ、次式から計算される。

$$T_s = T_0[1 + (M^2/5)] \quad (1)$$

この式で T_s は淀み点温度、 T_0 は気体の初期温度、 M は流れのマッハ数で流速とその気体中の音速との比である。この式は完全気体に対して厳密に正しい。温度が非常に高いと、実際の気体の性質は理想気体の性質から離れ、したがって淀み点温度はもっと複雑な式から得られねばならない。同様に気体中の伝導は絶縁飛行体の温度を変化させる。回復温度 T_r は伝導効果を考慮して計算された絶縁飛行体の温度である。しかし第(1)式はその材料がその温度に耐え得る場合飛行体が到達する最高温度の高さの程度についての良い指標を与える。第1図の実線は飛行マッハ数 M の函数として回復温度を与える。

もちろんこの回復温度は時間の経過とともに漸近的

第 1 図

に到達されるものである。低空での飛行では回復温度に近くなるに要する時間は非常に小さい。高空では、空気密度が減少し、単位時間内に飛行体に衝突する粒子すなわち空気分子の数は少なく、したがって温度を回復温度の 99% まで上げるのに十分な運動エネルギーを物体に伝達するには長い時間がかかる。もちろん同時に物体は輻射により熱を失う。輻射熱損失の強さは表面温度の 4 乗に比例する。また表面の輻射率 ϵ に比例し、これは工学的黒体に対しては 1 に近く、よく磨かれた物体に対しては 0.1 から 0.2 くらいに低くなり得る。Bloom は輻射熱損失に対し次式を引用した。

$$q = 0.48\epsilon(T/1000)^4 \quad (2)$$

この方程式において q は輻射による熱損失 (BTU/ft²s), ϵ は輻射率, T は物体表面温度 (°R) であり, °R = °F + 459.6 である。この熱損失率は高度に無関係であるが、空力加熱が密度、したがって高度の函数であるから、表面の熱平衡は飛行高度に依存するところ大である。平衡温度 T_{eq} を飛行速度および高度の函数として計算するには初歩の数で十分である。このような計算の結果が第 1 図の破線で与えられる。数値は輻射率 1 と仮定して計算された。

グラフから推論される重要な結論は、航空機およびミサイルの構造が極度に高い平衡温度を持つということである。例えばマッハ数 10 で平衡温度は、飛行高度 50,000 ft で 4,000°R に近く高度 200,000 ft でも 1,000°R 以上である。

同じく Bloom の研究から取った第 2 図は、衛星速度 26,000 ft/s で航行する特別の物体に対し、第 1 図をもっと高度の高い所まで拡張したものである。第 2 図は、第 (1) 式が連続体に基づいているゆえに厳密には成立しなくなる高度まで含んでいる。超高空では自由分子流理論から加熱率を計算しなければならない。第

第 2 図

2 図に含まれる付加的情報は (BTU/ft²s) での加熱率の値である。特別な値として、大気密度比 0.001 では熱伝達率は近似的に 600 BTU/ft²s であるといえる。この密度比は近似的に高度 150,000 ft に相当する。したがってこれより低空では加熱率が更に大きい。最後に第 3 図では、飛行体表面にわたっての加熱率の変化についての考察が考えられる。この図も Bloom の研

第 3 図

究から引用したものであるが、円錐弾頭の球形部分にわたり加熱率がかなり急激に減少し、円錐部分にそってはずっとゆっくり減少していることを示す。回転対称体の母線にそって球の半径の 2 倍に等しい距離の所では加熱率は淀み点でのほぼ 1/3 である。

実験室における空力加熱の類同法*

ミサイルにおいては、その飛行中に計測がなされ、地上に電送されるけれども、たいていの研究用としては、実験室で空力加熱の類同が利用出来る手段を持つ方が便利である。構造要素を加熱する最も簡単な方法の一つは輻射によるもので、遷移効果を研究するため大切な温度の急激な上昇をもたらし得る。例えば熱応力や熱座屈といわれるもので周知の如く一様な高温は弾性体内に熱応力は生じない。

* この節は 1955 年 6 月カナダのオタワで AGARD の構造及び材料部門第 1 回集會に著者が提出した論文に基くものである。

第4図

第4図は高い加熱率を得るために、2列に輻射加熱ランプを並べたもので NACA の Langley Memorial Laboratory で始めて用いられた。ランプは NACA のために General Electric Company が開発した T-3 管状石英加熱ランプで、長さ $11\frac{3}{4}$ in, 直径 $\frac{3}{8}$ in である。おのおのが 230V で 1,000W と見積られる。フィラメントはタングステンで、おおいに溶かした石英からなっている。図示されたような配置により NACA では、ほぼ 100 BTU/ft^2 の加熱率に到達した。

同様の原理が Ohio, Dayton の合衆国空軍のライト航空開発センターで用いられた。第5図に示された炉

第5図

は1組の調節可能な輻射加熱ランプから成っていて、そのおのおのは 16 個の加熱ランプを装備している。板の距離は図に示された超音速翼の模型の加熱に対し、最上の可能な条件を与えるため調節出来る。板の加熱率は計算機につながれた電子制御機構により調整される。

第6図は Virginia のワロップス島にある無人機研究所の NACA 吹き出し型超音速風洞である。風洞を通る空気はあらかじめ加熱され、低い超音速マッハ数で実際の淀み点温度を作ることが出来る。

風洞に取り付けられた尾翼模型は航空学史に1頁を加えた。これは構造物の非一様加熱により生ずる熱応力に関しての計算を検証するために設計された。しかし数秒間作働すると模型が破壊したので、このような測定は行なえなかった。注意深い研究により、破壊の原因は熱応力の増大により換り剛性低下に起因する

第6図

“flag-waving” 型パネルフラッターであることがわかった。この最初の実験不成功についで多くの理論的および実験的研究がなされ、かくの如くして、予期されなかった新しい現象を認めるに至った。

第7図

第7図は California, San Diego の General Dynamic Corporation の一部門である太陽炉の写真である。この装置は基本的には、直径 120 インチの磨いたアルミニウム鏡を放物線反射器にはめこんだものである。1/4 in のアルミニウム製反射鏡は太陽光線を集めてその焦点に反射し、鏡の中央から 34 in の距離に直径 5/16 in の太陽像を結ぶ。試験される材料はこの焦点に金属頸により支えられる。

完全な条件下で、理想的炉は、理論上最高温度 $8,500^\circ\text{F}$ に達し得る。これに比べ酸素アセチレン焰により得られる温度はほぼ $5,800^\circ\text{F}$ である。Convair 太陽炉の最大熱束率はほぼ $2,000 \text{ BTU/ft}^2$ である。

第8図は小さい電磁誘導加熱器で、この設計は 1949 年 Polytechnic Institute of Brooklyn で始められた。出力 1 kW で毎秒 20 メガサイクルで作働される。高周波が巻線内を通ると試験片まわりに電磁場が出来、

第 8 図

磁束線は主に最外部に集中する。高い振動数ではこの外皮効果が顕著になり、エネルギーは厚さが 0.01 in よりもかなり薄い金属帯に吸収される。この現象は空力加熱の類同に適合した誘導加熱をもたらす。

以上論じた方法のうち、風洞試験は実際の飛行条件に最も近いことは当然である。しかし、大きな超音速風洞は製作し作動させるのに非常に費用がかかり、また空力的なもの以外の荷重の類同が、多くの行ないたい測定と同様に風洞内で行なうのがむずかしい。石英ランプによる加熱は、比較的费用がかさまず、十分な電気エネルギー源さえあれば簡単な試験には小さな備品と装置しか必要としないから、最も一般的のように見える。この方法で可能な最大加熱率は 100BTU/ft²s の程度であり、大概の研究には十分である。電磁誘導加熱装置を用いれば、これより相当高い加熱率が得られるが、この装置は費用がかさみ、また特に模型の表面にわたって加熱度を変化させるのに適しない。これと同程度にまたは更に高い加熱率までも、太陽炉によって得ることができる。しかし今のところ、この装置は構造試験用としてよりも、材料試験用としてのみ用いられている。もし大きな構造物を急激に加熱する必要があるならば、精巧な装置が必要となる。

弾性および弾塑性構造における熱の影響

温度上昇の影響 高温の第1のそして最も顕著な効果は構造材料の弾性限、降伏点、破壊応力、および弾性係数の値の低下である。これは Dryden と Duberg の論文⁹⁾からとった第9図に例証されている。グラフでは弾性係数のみを材料の温度の函数として示してある。温度目盛りの下にマッハ数目盛りがあり、第1の目盛りの定常温度に相当する近似飛行速度を示している。弾性座屈では弾性係数が構造要素の座屈荷重に比例する。したがって、構造の負荷能力の代表的なものである。図によればアルミニウム合金は温度が 600°F になると負荷能力を大きく失う。チタン合金では 1,000°F、ステンレス・スチールでは 1,200°F で同じことがいえる。

第 9 図

温度上昇の更に複雑な効果は、温度分布が一様でない場合熱応力が生ずることである。熱応力の重要性は航空機およびミサイルの構造要素において、一様温度分布は實際上存在しないという事実起因する。温度変化の原因はもちろん構造材料の熱伝導度が有限であるためで、もし伝導度が無限大なら、全構造が瞬間的に同じ温度に達するであろう。

第 10 図

細長い構造要素内に熱が入り込んで行く際の、熱伝導度の有限性、否むしろそれが極度に遅いことを例証するために、熱伝導方程式の周知の解に基づく第10図が用意された。図中のいろいろの曲線は半無限棒の端から、異なった距離にある点で温度が時間とともに変化する様を示している。棒は一定断面と仮定され、断面 $x=0$ 以外の全表面は熱伝達から絶縁されていて、 $x=0$ から x の正方向に無限に長い棒は全体にわたって、時刻 $t=0$ では一定温度である。便宜上、その温度を温度目盛りの原点にとる。解析の際になされた仮定によれば、 $t=0$ で棒の端末 $x=0$ が突然 600°F に等しい温度まで上げられ、その後この端面に十分な熱を伝えて、この端面の温度を、伝導の結果棒に沿って熱の流れがあるにもかかわらず、600°F の一定値に保つようにする。曲線の示すところによれば、棒に沿っての熱の流れは非常におそく加熱端から 1 in の断面温度を 500°F に達せしめるのにほぼ 600 s 要する。600 s すなわち、10 min で加熱端面から 5 in の断面の温度は約 170°F までしか上昇せず、加熱端から 10 in の距離での温度上昇は 10 分後でもほとんど認

められない。

この結果は、初めは予想外のものであるが、実際の経験がこの結論を確認しているから、驚くにあたらない。もし熱が棒の中へこのくらいゆっくり入って来るものでなければ炉の中のまきを直すのに鉄の火掻棒を用いることが不可能であろう。

伝導熱伝達のおそいことこそ、超音速で飛ぶ航空機やミサイルの構造内に非常に大きな温度差が存在する理由である。第8図に示されたと同様の 20 kW 電磁誘導加熱器で加熱した翼模型により、大きな温度変動が例示される。模型は縦 6 in, 横 5 in, 高さ 2 in のスチール製箱型梁で壁厚は 0.024 in である。

第 11 図

Polytechnic Institute of Brooklyn での実験で実測された温度歴が第 11 図の曲線により示される。模型の外表面のみに熱を伝えるという点に関しては、誘導加熱は空力加熱と全く同様であるから、試験片の垂直ウェーブは電磁誘導により加熱されず、上・下外板により完全にしゃへいされている。最も急激な温度上昇は上下外板のウェーブから 4 in の距離の点で記録された。60 s ではほぼ 850°F の温度上昇があった。外板の中央は、この領域から熱が伝導により、ウェーブに伝達されるので、よりゆるやかに加熱された。中央点の温度上昇は 60 s ではほぼ 480°F であった。外板との接合部近くのウェーブの端では、それよりもわずかに小さい温度上昇が記録された。この違いは、1 つには 2 つの測定点の間の距離のためであり、また 1 つには外板とウェーブとの接触抵抗のためである。最後にウェーブの中央点の温度変化は極めて小さいようであ

る。

この非一様温度分布が熱応力を生ぜしめることは容易に理解される。熱い外板は伸びようとするが、冷たいウェーブに接合されている線に沿っては自由に伸びられない。ウェーブの拘束効果は外板に圧縮応力を生ずることになる。逆に外板の伸びようとする傾向はより冷たいウェーブを引っ張ることになり、かくてウェーブには引張り熱応力が生ずる。試験片の端面が第 8 図の実験装置における如く自由であれば、この端末断面には応力が働き得ない。したがって 2 つの端末断面間の中央である中央断面においてのみ、以上記述した熱応力がそのままの値で存在するが、すべての熱応力は端末では 0 になるのだから端末断面に向かって次第に弱くなる。

一次的効果に加えて自由端の今一つの結果は、端末断面を通しては、試験片に軸荷重が伝えられないことである。その結果、ウェーブ内の引張力の合力は 2 つの外板の総圧縮力に等しくなければならない。温度分布および材料特性がわかれば、端末の擾乱効果からずっと離れた中央断面での熱応力の値を決定するには、以上の条件で十分である。第 8 図の翼模型の如き 2 重対称の場合には熱応力に対する式は

$$\sigma = -\alpha ET + \frac{1}{A} \int_A \alpha ET dA \quad (3)$$

である。ここに σ は軸方向に働く熱軸応力、 α は熱膨脹係数、 E は適当な温度での材料のヤング率、 T は断面の各点での温度上昇、 A は模型の全断面積であり積分は全断面積にわたって行なわれる。金属の場合応力を (psi) 温度を (°F) で表わせば、積 αE の代表的値は 80~200 の間である。このことは 100°F の大きさの温度上昇により 10,000 psi の大きさの熱応力が生ずることを意味する。かくて比較的小さい温度変化でも相当の熱応力を生じ得る。この熱応力が十分大きいと、ある条件下では破壊を引き起こし得る。あるいは許容されない大きさのクリープ変形を引き起こすこともある。しかし、クリープは本論文の後の方で論ずる。

航空機およびミサイルの薄肉構造要素についての最大の危険性は、弾性または非弾性座屈の発生である。実際、第 8 図の翼模型はまず弾性座屈し、さらに引きつづき温度が上昇し、変形が進行すると第 12 図に示される如き永久変形に達する。この写真に示される種類、大きさの変形は、当然飛行する機械には許されない。何故ならそれらは、表面上の空気の流れを完全に変えてしまうからである。超音速翼内の熱応力および熱座屈についての詳細な理論的研究が、著者により J. A. S.⁽¹²⁾ に発表された。理論的結論の実験的検証は

Polytechnic Institute of Brooklyn において Anliker および Lederman⁽¹³⁾ により得られた。

第 12 図

第 13 図

解析は第 13 図に示される超音速翼構造の図式的断面から出発した。加熱率は隣り合うウェーブ間でそれほど変化しないと仮定した。簡単のため、2つの外板は平行であると考え、同じ条件が隣のウェーブとそれらをつなぐ外板からなる隣接の箱にも成立すると仮定した。この基礎の上に温度および応力の分布に対し、比較的簡単な解析的表示が導かれた。つぎの段階として外板の弾性安定が研究された。隣接するウェーブの間にある外板部分は長く狭い矩形板で、同じ荷重を受ける隣り合う外板はお互にそれほど影響し合わないから、端末は単純支持であると考えられた。非一様加熱により生ずる圧縮応力は板の幅 b にわたり次第に変化すると仮定された。

長手方向に圧縮応力を受ける長い矩形板は圧縮応力が長手方向に変化しない場合矩形に座屈するから、解析は幅 b および理論上与えられる波長に相当する長さ b/n の矩形板 (第 14 図) に限定することが出来た。

第 14 図

前に計算された如く、圧縮応力分布はフーリエ級数で表われ、フーリエ級数の数項に対し、限界荷重強さが計算された。

結果の示すところによると最も重要な応力分布は、工学上の精度内でフーリエ級数の初めの 2 項により近似出来る。すなわち一定平均応力に波長で板幅に等しい余弦函数を重ね合わせる。この比較的簡単な荷重場合に対し、座屈応力の非常に簡単な式が導かれた。

$$\sigma_{cr,av} = \sigma_{cr,0} \frac{1}{1 - (p/2)} \quad (4)$$

この式で $\sigma_{cr,av}$ は非一様応力分布の平均限界応力であり $\sigma_{cr,0}$ は同じ板が一様圧縮を受けたときの限界応力、 p は余弦級数の第 2 調波の振幅と平均応力との比である。

第 15 図

第 15 図は限界条件に相当する 3 つの応力分布を示し、同一尺度で書かれている。 $p=0$ の第 1 の場合は外板が強さ $\sigma_{cr,0}$ の一様圧縮応力を受けている。第 2 の場合は $p=1$ で、第 2 調波の振幅が平均応力に等しく、平均応力と第 2 調波の振幅とは、板の両端で加え合わされ、板の中央でおたがいに差し引くことを意味している。(4) 式に代入して見ると、平均限界応力は一様圧縮板の限界応力の 2 倍になる。第 3 の場合は $p=-1$ で、平均圧縮応力に等しい圧縮応力が板の両端で平均応力から差し引かれ、一方板の中央では平均応力の強さを 2 倍にすることになる。 $p=-1$ とすると (4) 式より、平均限界応力は一様圧縮板の限界応力の 2/3 に等しくなる。

この図で例示された結果は、数値的には推測出来なかったが、それらの示す傾向は容易に理解出来る。最大圧縮応力が支持端に沿って現われ、支持されていない板の中央が圧縮を受けないときはいつでも、座屈前に板により運ばれる全圧縮荷重は、一様圧縮の際板が座屈する荷重よりも相当増大する。 $p=-1$ のときはその逆が正しく、圧縮の大部分が板の支持されていない

い中央面に集中し、支持端は応力を受けていない。この場合板により運ばれる平均応力は一様圧縮板の座屈応力の2/3でしかない。

薄い殻の熱応力 薄い殻は航空機の最も重要な構造要素であり、多くのミサイルは基本的に薄い殻から出来ているから、殻内の熱応力およびその座屈の研究は現代の航空機およびミサイル構造設計者の最も重要な仕事の一つである。すべて薄い殻の中で、解析的取扱いの最も容易なのは円筒殻である。同様に、これは製造が容易なので実験研究に最も適している。

J. A. S.¹⁴⁾ に載せた論文において、著者は温度が軸方向にのみ変化するように加熱された円筒殻の熱座屈を研究した。更に円筒殻が一様に加熱され、熱膨張は殻の端末断面を支える2つの完全に剛な環によりさまたげられるという特別の問題も研究した。この条件では αET の大きさの高い圧縮応力が、殻の膨張を完全におさえている支持端末のごく近辺で予期される。また同時に、支持点からの距離とともに、この圧縮周応力は急速に弱まると考えられる。この予想は、第16図に示された如き解析の結果により支持される。この

第16図

グラフでは、圧縮周応力 σ_ϕ と理論的最大熱応力 αET との比が、支持点からの距離 x と2つの支持点間の距離 L との比に対して描かれている。応力分布曲線の形は、殻の性質を表す唯一のパラメーター β によってきまることがわかる。このパラメーターは次式で定義される。

$$\beta = \frac{1}{2} K \lambda \quad (5)$$

ここに

$$K = [3(1-\nu^2)]^{1/2} (a/h)^{1/2} \quad (6)$$

a は円筒中央面の半径、 h は壁厚、 $\lambda = L/a$ である。 β の小さい値は短くて比較的厚い円筒殻に相当し、 β の大きな値は長くて比較的薄い殻に相当する。

第16図に示されるパラメーター β の2つの値は

1.5 と 3.5 である。前者の場合その応力分布は曲線の中央部の小さな波は予見され得なかったけれども、工学者の予期をうらがきしている。 $\beta = 3.5$ のときは周応力曲線が軸と交わり、したがって円筒の中央部での周応力は圧縮ではなく、引っ張りであることになる。この結果は、直感的には、ほとんど予見出来なかったが、その正しさを疑う理由もない。第17図に熱応力分布に関する詳細な情報が構造パラメーター β の函数として与えられている。実線の1つは、円筒の中央

第17図

での圧縮周応力 σ_ϕ を最大理論周圧縮応力 αET で割った値を示す。非常に短く、壁の厚い円筒に対してはこの値は予想された如く1である。しかし、パラメーター β の増加とともに、圧縮応力は非常に急激に減少し、ほぼ $\beta = 1.5$ で0となる。パラメーター β のさらに高い値に対しては、第16図の2番目の曲線に関連して既に注意した如く、円筒中央の周応力は引っ張りである。圧縮応力は β の値の増加とともに徐々に減少し、 β が無限に大きくなるにつれ、漸近的に値0に近づく。円筒の応力分布は、さらに熱応力分布を表すフーリエ余弦級数のいろいろの成分の振幅により特長づけられる。余弦級数の第1項（定数項）を s_0 とする。この平均応力は極端に短い厚肉円筒に対し αET に等しい。 β の値の増大とともに急激に減少し、円筒が無限に長くなると0に近づく。 s_0 の値は $\beta > 1/2$ のとき、表示 $1/2\beta$ で非常によく近似されることは注目に値する。

第2のフーリエ成分の係数 s_2 は $\beta = 0$ に対し0である。 β とともに増大し、近似的に $\beta = 2$ で最大値となり、それから、 β の増加とともに徐々に減少する。 $\beta = 2$ 以上からは振幅 s_2 を表示 $1/\beta$ で十分近似出来る。図はまた級数の第4調波の振幅も含んでいる。原論文¹⁴⁾ では熱座屈の条件について、十分詳細な研究がなされている。以上述べた、加熱および支持の条件下

では、弾性領域内で熱座屈は起こらないことが見出された。円筒が非常に薄く長いときは容易に座屈するが、高度に圧縮された領域の幅は、非常に狭く、計算された座屈応力は材料の弾性限より、ずっと大きい。円筒殻が比較的厚肉で短いときは、最大応力、すなわち事実上の平均応力は高いが、支持間隔がせまく、殻の曲げ剛性が高いため、弾性限以下の応力での座屈は生じない。したがってこれらの条件下では、支持点近くに何らかの局部的しわが起り得ると結論され、またこのしわは永久的性質を持つと予想されるが、この種類の变形を弾性座屈の部類に入れるのは不適當である。

解析から導かれた第2の興味ある結論は、軸にわたっての分布がフーリエ余弦級数の最初の2項で十分正しく表わされる周圧縮応力を受ける薄い円筒殻の場合には座屈の際の平均圧縮応力が再び(4)式で計算出来ることである。前と同様に p は圧縮周応力分布の第2調波の振幅と、平均周応力との比であるが、今度は $\sigma_{cr,0}$ 一様周圧縮を受ける単純支持円筒殻の座屈応力を表わす。

Polytechnic Institute of Brooklynにおいて、いろいろの端末条件の下で、円筒殻を急激に加熱し、それに熱座屈を起こさせるように努力されたことは興味あることである。実験は出力20 kWの第2の電磁誘導加熱装置を用いて行なわれた。多くの試験装置を用い相当努力されたにもかかわらず、温度分布が軸対称のときは円筒殻に座屈を起こさせ得なかった。

同じようにして温度が半径方向のみに変化し、軸方向および周方向に一定であるような温度分布は決して座屈を起こさないという結論に達した。座屈の立場から危険な温度分布は、温度が周方向に変化するものだけである。したがってこの分布が解析的にも、実験的にもかなり詳細に研究された。

Nardo と Abir によってなされた研究^{(15),(16)}では応力は周方向に比較的ゆるやかに変化すると仮定された。応力は前に論じた2つの場合とちょうど同様に、フーリエ余弦級数で表わされた。理論結果の示すところによると、この条件下での弾性座屈応力は、軸方向に一様圧縮された円筒の十分確かな座屈式から計算され、そのようにして得られた値が圧縮応力の最大値として代入されねばならなかった。もちろん一様圧縮に対する係数の理論値は、実験では達せられないことが知られている。曲った殻に対しては、古典的微小変形理論は、実験研究の結果との一致を得るために、有限変形理論でおきかえられねばならないことが von Kármán⁽¹⁷⁾ とその共働者によって示された。Nardo および Abir により研究されたゆるやかに変化する軸応力の場合にも、修正係数を用いなければならず、その

係数は、微小変形理論の理論値 0.6 から 0.12~0.25 の間で変化する値にまで減らさねばならない。Nardo と Abir によって行なわれた有限個の実験はこの結論を検証した。

Hill⁽¹⁸⁾ の行なった、より最近の研究では、円筒殻の座屈を、殻の母線に沿った狭い細長い部分のみが加熱される場合について研究された。この条件の下では、大きな圧縮応力が狭く細長い部分に生じ、円筒の他の部分は事実上軸応力が存在しない。Hill の到達した興味ある結論は、座屈応力は再び古典的式で与えられることである。しかし、Hill の実験はこの場合、数値係数を小さくする必要のないことを示しているように見える。薄い殻の非常に狭く細長い部分は、ほとんど平板のように行動し、したがって殻の曲率に関する有限変形効果はあまり重要ではなくなると推察される。この結論の有用性のゆえにこの方面のさらに進んだ研究がスタンフォード大学で目下行なわれている。

著者の2人の学生 D. W. Hill と B. Ross⁽¹⁹⁾ はまた両端で応力0の円筒殻の熱応力を解析した。著者の厳密な理論から計算した応力と、方程式(3)に類似の式で予言された値との間にかんがりの違いがあることを彼らは見出した。長さが半径の9.3倍である円筒に対し、数値計算がなされた。しかし、このような構造要素に対して de St. Venant の理論が良い近似度を持つという工学的仮定は検証されなかった。第18図は周方向座標 ϕ により、軸圧縮応力の変化を無限に長い円筒に対し、方程式(3)と同じ式から計算したものと、 $L/a=9.3$ で特徴づけられる有限長、円筒に対し、厳密な理論から得られたものとの示している。2つの

第18図

曲線の間には相当な違いがある。特に、実際の円筒の加熱帯の中央での圧縮応力の最大値は、無限円筒の値の3/4強である。第18図の曲線は円筒の両端間の中央断面での応力を示す。最も強く圧縮された母線にその応力の変化は、第19図で表わされる。これもまた破線で示されている無限円筒に相当する値と比較出来る。したがって、この場合端末条件が円筒中央の熱応力分布に相当の効果を持つという結論に達する。

第19図

これは多分に、全く予想されなかったことではない。なぜなら、見たところ円筒は非常に細長く見えるけれども、円筒の全長は、その円周の長さのほぼ1.5倍でしかないからである。

この節を結ぶ前に球殻の熱応力について2, 3述べねばならない。このような殻は、一般に弾道ミサイルの円錐弾頭や液体燃料タンクの容器蓋や、固体推進剤ロケットエンジンのシリンダー・ヘッドに使用される。しばしば球の一部に、他の殻や、パイプを取り付けるために切り欠きが入られ、この条件の下で、切り欠きの縁は通常補強環で補強される。この結合部の構造設計者の直面する興味ある問題の一つは、溶接の結果、補強環の近くの薄い殻に生ずる熱応力の計算である。

第20図

第20図に結果が示されてあるが、その解析は溶接作業が終わった後、比較的厚い補強環は薄い球殻よりもゆっくり冷えるに違いないという観察から出発した。数値解を得るために、全構造が完全に弾性的になり応力0の状態になった。環が球殻の薄い壁よりも100°Fだけ温度が高いと仮定した。この仮定から、冷却過程が終わり、全構造が一様温度に達したとき、もし両者が自由に収縮しうるならば、補強環の半径は球

殻の切り欠きの半径よりも100 αR 短くなるであろう。しかし、2つの部材は溶接されているから、このような独立の収縮は不可能である。変形の適合条件が、冷却の過程において次第に大きくなる熱応力を強く要求する。

熱応力は第20図の如き条件下で十分適用出来る浅い殻の理論に基づいて厳密に計算された。補強環の半径 R が6.5 in, 球殻の半径 r が15 in, 球殻の内厚が0.125 inの場合について数値計算がなされた。補強環は壁厚 $2h$, 深さ H と仮定された。材料特性は $E = 29 \times 10^6$ psi, $\alpha = 10^{-5}$ °F $^{-1}$ とした。初期温度差 ΔT は前に述べた如く100°Fとした。

解析の結果、環状補強材の応力は、殻内の応力に比べて、非常に小さかった。殻内の応力は、メンブラン応力として知られる殻壁内の平均軸応力(図では σ_n で示す)と壁厚に沿って直線的に変化するとして十分良く近似出来る曲げ応力 σ_b からなっている。一番外側の繊維内では、これら2つの応力は同符号となり、重ね合わされる。その大きさを補強環の深さ H と球殻の厚さ h との比の函数として第20図に描いてある。比 H/h の適度の値に対し、最大メンブラン応力は2,000 psi 程度の大きさであり、最大曲げ応力は20,000 psi 程度の大きさである。 $\Delta T = 100^\circ\text{F}$ 程度の大きさ、あるいはもっと大きな温度差でさえも、溶接構造においては容易に生じうるから、薄い球殻に補強材を溶接すると、かなりの熱応力を生じ、殻の構造保全を危くする可能性があると結論出来る。

航空機及びミサイル構造に及ぼすクリープの影響

クリープ試験 円柱棒の上端を剛な支持体に取り付け、その下端から重りを下げると試験片の温度が十分高ければ棒の長さは時間とともに増加しつづける。この現象はクリープと呼ばれる。十分高いというのは試験片を作る金属の融解温度の約25%から50%を意味する。錫、鉛、アルミニウムおよび鉄の融点は450°F, 600°F, 1,200°F, 2,800°Fであるから、絶対温度の50%は-5°F, 70°F, 370°F, 1,170°Fである。小さい応力が存在するときは、これらの材料で出来ている試験片は上述の温度以下では顕著なクリープ変形を示さない。温度が相当高いと、非常に小さな応力でさえも、2~3時間続けて負荷するならば、相当のクリープ変形に達する。

クリープ率が周囲の温度と融解温度との比に依存するという事実は、錫、鉛が室温で小さい応力の下で大きなクリープを示し、したがって構造材料として用いるのは不適当であり、一方アルミニウム合金や鉄は、顕著な永久変形の危険性なしに採用出来ることの理由を説明している。

第 21 図は Ohio, Columbus の Battle Memorial Institute で用いられている 1 組の引っ張りクリープ試験機の写真である。この機械では試験片の下端が固定され、荷重は上端に、てこによって加えられる。各試験炉でかこまれ（写真では開いてある）その温度は熱電対により注意深く制御される。

第 21 図

このような試験機で行なったクリープ試験の典型的結果が第 22 図の曲線である。このグラフには、荷重をかけると同時に瞬間的に起こる弾性変形は含まれていない。弾性的伸びに引きつづき、急速なクリープ変

第 22 図

形がおこり、その速度は時間とともに減少する。図の B 点に達するとクリープ率は一定となり、多くの場合長い間そのままである。図の C 点を越えると、クリープ率は再び増大し、試験片は終に破壊する。曲線 OB で示されるクリープ現象の部分を 1 次または遷移相クリープ、点 B, C の間の部分を 2 次または定常クリープ、点 C から後を 3 次クリープと名づけるのが普通である。クリープ各相の相対的重要さは、温度や試験応力と同様、材料、熱処理、変形の前歴、により大いに違う。概して数千時間も止めずに運動しなければならない蒸気タービンの円盤および翼では、2 次相が最も重要である。このように長時間にわたるとき他の 2 つの相について考えることは技術的興味がない。他方、

ミサイルにおける非常に高温、高応力での非常に急激なクリープの場合には、1 次相のみが重要であって、点 B, C 間の第 2 次曲線部分は事実上一つの点にちぢまってしまうかもしれない。

クリープ率 $\dot{\rho}$ と σ との関係は、通常次の 3 つの経験則の一つにより表わされる。

$$\dot{\rho} = A\sigma^n, \dot{\rho} = B\sigma^{1/k}, \dot{\rho} = C \sinh(\sigma/K) \quad (7)$$

ここに ρ はクリープ歪、その上につけた点は時間微分を、 σ は応力を示す。他の記号は定数である。累乗則は Bailey³⁾ と Norton²⁰⁾ の名をとって命名される。 n が奇数の整数のとき容易に用いられる。 n が奇数の整数でないときは、式が意味のある結果を与えるためには、少し修正しなければならない。指数則は物理的考察から導かれる。不幸にして、これも限界がある。この式によると棒に応力が加えられなくても、有限クリープ率を与え、また応力の符号が逆になっても、クリープ速度の符号は変化しない。この不備は、指数函数のかわりに $\sinh$ 函数を導入すれば補なえる。良く知られているように、この 2 つの函数は、応力の値が 1 より大きいとき、非常に良く一致する。 $\sinh$ 則は Prandtl と Nadai²¹⁾ により提案された。これは経験則であって、何ら理論的考察には基づいていない。

この 3 つのどの式においてもクリープ歪率は応力のみに依存している。もちろん、温度は一定で、どの試験においても同一であると仮定されている。この式は応力が一定であっても、時間とともにクリープ率に変化する 1 次クリープに対しては成立しない。1 次相クリープに対し、導かれた、より一般的式は

$$\rho = D\sigma^n t^{1/p} \quad (8)$$

ここに時間は $1/p$ というべきをもって現われ、 p の値は構造用金属に対し、普通 2~3 である。応力 σ の指数 n の値は温度によってきまり、2 から 50 まで変化しうる。この式は、非常にしょうずに熱処理および事前の冷間加工をしたある特殊の材料について、一定温度、一定応力のもとに行なわれた試験から導かれた。これらの条件のうちどれかが変われば、クリープ率もまた変化する。

上掲の式が、時間とともに応力の変化する場合にどのように一般化されるか明らかではない。(7) 式で与えられる 2 次クリープに関する限り、可変応力に対しても成立すると仮定することは、数学的に成立しないことはない。しかし、著者により、しばしば暗示されたのだが、(8) 式を同じようにして、可変応力条件に適用すると明らかな矛盾に達する。つぎのような実験を考えて見れば明らかである。時刻 $t=0$ で応力 σ_1 が加えられる。これを時刻 t_2 まで一定に保つ。そのときに応力を値 σ_2 に上げる。時刻 t_2 の無限小時間

前には応力は σ_1 で、無限小時間後には σ_2 になるから、荷重をかける無限小時間の間にクリープ歪は値 $D\sigma_1^n t^{1/p}$ から値 $D\sigma_2^n t^{1/p}$ に増加しなければならない。 σ_1 と σ_2 の差がかなり大きければ、式は、荷重の瞬間におけるクリープ歪に突然相当の飛躍がおこることを予言する。これはクリープ変形が徐々に進行するという実際上の経験に矛盾する。したがって (8) 式は荷重が突然変化する場合には使えない。

この困難さの簡単な解決は、状態の力学的方程式の考えを通じて行なえる。クリープ率は、クリープ応力および荷重歴の間に累積されたクリープ歪の函数でしかないと仮定出来る。(もちろん、一定温度 T が保持されると仮定する。) この仮定に基づき (8) 式のクリープ歪則は時間について微分され、このようにして得た新しい式と、(8) 式から t を消去出来る。この結果、つぎのような1次クリープ歪率に対する式が得られる²²⁾。

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{1}{\rho}\right) D^n \sigma^n \rho^{1-p} \quad (9)$$

この新しい式には時間は陽に現われない。応力 σ が急激に変化すると、クリープ歪率 $\dot{\epsilon}$ に突発的飛躍がある。これはもちろん、物理学上完全に許される。しかし、クリープ歪 ρ 自体は徐々に変化し続ける。状態の力学的方程式の概念は、構造内の応力および安定の研究上、非常に有益な概念であることがわかった。しかし、多くの例において材料の様相は、この概念からはずれていることが知られているから、注意深く用いなければならない。クリープ歪率は、クリープ歪 ρ と応力 σ のそのときの値に加えて、クリープ歪 ρ が累積される仕方、すなわち負荷歴に依存する。

第23図は、Polytechnic Institute of Brooklynの航空機構造実験室で2024-T4アルミニウム合金について行なわれた引っ張りクリープ試験から得られた、一

第23図

連の faired-in curves である²³⁾。比較的低い応力ではクリープ変形の第2次直線相が支配的であることが見られる。加えられる応力が増加するにつれて、クリープ率は増加し、曲がった1次部分がより大きな重要性を持つようになる。

実験結果のちらばり

構造に及ぼすクリープの効果の探求に興味を持つ研究者の遭遇する最大の困難の一つは、すべてのクリープ試験に伴う、異常に大きなちらばりである。ここで異常に大きいというのは、クリープ歪またはクリープ歪率で平均値の50%に達する変動を、またクリープ破損時間、クリープ座屈時間では100%さへも越す変動を意味する。平均からのこれらの偏差は、材料の弾性域内で構造要素を試験するとき、普通に遭遇するものよりずっと大きい。

少し考えて見れば、このより大きなちらばりは実際にはそれほど驚くべきものではないことがわかる。弾性域での変形は、材料の弾性率によってきまるが、これは結晶格子内原子がお互いに及ぼし合う平均の力の標準となる量である。弾性率が平均的過程の結果であるから、一つ一つの試験片についてのその値の変動は非常に小さい。これとは対照的に塑性およびクリープ変形の如き非弾性変形は、結晶構造の欠陥すなわち結晶内に見出される断層の数および分布に依存する。これらは試験片ごとに大きく変化し、よってクリープ特性もまた大きな変動を示す。

この物理的理由に加えて、今一つクリープ実験のちらばりを説明する助けとなる数学的力学的理由がある。この第2の理由は、クリープ則の非線型性である。例えばクリープ則が指数 $n=5$ の累乗則で、クリープ率が表わされるとき、平均応力度が10%増加すると平均クリープ率で61%の増加となる。これに対し、10%の応力度の減少の結果は、41%の平均クリープ率の減少となる。これは例えば規定応力の1.10倍と0.90倍に同じ時間だけ負荷されるように上下に変動する応力の下では、平均クリープ率は平均応力に相当するクリープ率よりも(上例では10%)多くなることを意味している。 n の値は、作働条件下で、われわれの用いる材料について10の大きさの程度であることが多いから、取付けの小さな狂いや、規定応力を保つことの不正確さ、完全に中心に荷重をかけることからのさけられない偏りのため、クリープ率は予期されたものから、相当はなれたものになる可能性がある。

この点をさらに例をあげて説明するために、4つの表をここに示した。これらは、規定された試験条件からの不注意な偏りにより引きおこされる測定平均クリープ率の増加する値を計算したものである。

第1表では $\Delta \dot{\epsilon}$ は応力が公称値より2%増加することにより、生ずるクリープの増加である。クリープ率 $\dot{\epsilon}$ の増加百分率は指数 n が15のとき30であることがわかる。第2表は規定応力度が適当に保持されず、段階的に上下に5%ずつ変動するとき見られる平均

クリープ率の増加百分率を示す。規定試験水準の1.05倍になっている全時間が規定試験水準の0.95倍になっている時間と厳密に等しいと仮定されている。表において $\dot{\epsilon}_{ave}$ は実測される平均クリープ率であり、 $\dot{\epsilon}_n$ は公称応力水準に相当するクリープ率である。応力変動が上下に5%のとき実測平均クリープ率は $n=9$ で9.1%の増加となることがわかる。 $n=1$ の線型の場合は、平均クリープ率の増加は0であることに注意されたい。クリープ率が線型のときは、明らかに非線型効果は存在しない。

第1表 応力の2%増加に対するクリープ率の増加百分率

指数 n	1	2	5	10	15
$100(\Delta\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon})$	2	4	10	20	30

第2表 公称応力水準の5%変動の結果生ずる平均クリープ率の増加百分率

$n =$	1	3	5	7	9
$100 \frac{\dot{\epsilon}_{ave} - \dot{\epsilon}_n}{\dot{\epsilon}_n}$	0	0.75	2.5	5.3	9.1

第3表 $n=7$ のとき応力が正弦波として変動する結果生ずる平均クリープ率の増加百分率

$100R$	2	5	7	10	15	20
$100 \frac{\dot{\epsilon}_{ave} - \dot{\epsilon}_n}{\dot{\epsilon}_n}$	0.42	2.64	5.18	10.6	24.3	44

第4表 2°Fの温度上昇に対するクリープ率の増大百分率

$T^{\circ}\text{F}$	100	200	300	400	500	600
$100(\Delta\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon})$	21.1	15.1	11.4	8.9	7.2	5.9

第3表は応力が正弦則によって変化すると仮定されているほかは、第2表と同一の条件とする。クリープ則の指数は7と取る。記号 R は応力の正弦振動の振幅と規定された平均応力との比を表わす。この値が例えば10のとき、実測平均クリープ率の増加は10.6%である。最後に第4表において規定温度の2°Fの上昇の効果が表示されている。計算はアルミニウム合金に対してなされ、記号 T は試験片の規定温度を示す。その効果は、明らかに試験温度が低いほど大きい、なぜなら2°Fの変動は前者におけるより後者において大きな百分率となるからである。規定温度が2°Fという非常に小さな変動をしても、規定試験温度が200°Fのとき、観測平均クリープ率に15.1%の変化がおこ

ることが見られる。これは重大な誤差であるが、試験片の温度が極度に注意深く保持されないと、簡単に招くことになる。

ここに示された表は、1957年著者が行なった、William M. 記念講演から取った²⁴⁾。同じ論文に公称条件からの多くの他の変動が実測平均クリープ率におよぼす影響が論じられている。これに関連した問題がスエーデン、ストックホルムのF.K.G. Odqvist教授と彼の学生たちによって研究された。

クリープ破壊

一定荷重が高温で十分長い時間、引張り試験片にかけられるとき試験片はくびれて破壊することが観察される。クリープ試験の文献として、クリープ破壊の現象を取り扱った多くの論文がある。いろいろの材料がこのようにして破壊する時間のグラフが示され、集められた資料から経験式が推論された。しかし幾何学的、力学的考察に基づいて、資料とクリープ変形理論とを関係づけようとする努力は、ほとんどなされなかった。クリープ破壊の力学的説明の方法がAndradeによって、1910年にProceedings of the Royal Societyに出版されたところのクリープ現象についての草分けともいべき論文にすでに示されていたのであるから、これは多分に驚くべきことである。

この先導的仕事は1953年Journal of Applied Mechanicsに出版した論文において著者により受けつがれた。この論文では、クリープ変形は、棒の体積を変化しないで起こると仮定された。したがってクリープの結果、試験片が2%伸びると、その断面積は2%減少しなければならない。しかし、2%の断面積減少は、平均応力水準の2%増加を伴い、これはまたクリープ式の n の値が高いときはクリープ歪率にかなりの増加をもたらす。したがって、試験片の初期のゆっくりしたクリープ率は、初めは徐々に、そしてしだいに急激に加速され、ついにはクリープによる伸びが非常に大きくなって、極度に減少した断面に加わる平均応力が材料の破壊応力に達する。

ここに記述された物理的現象は方程式を用いて容易に数式化出来る。これらの方程式は難なく解かれ、つぎの非常に簡単な式になる。

$$t_{rupture} = 1/\dot{\epsilon}_0 n \quad (10)$$

(10)式において $t_{rupture}$ は破壊が起こるに必要な時間、 $\dot{\epsilon}_0$ は試験の最初の公称クリープ率、そして n はクリープ則の指数である。金属組織学的に安定な合金に対しては、このクリープ則は一般に実験とよく一致した結果を与える。事実上は同一の法則が、著者の理論が付けにされてから3年後にMonkmanとGrant²⁵⁾により試験法則として提案された。もちろんこの非常

に簡単な式は材料のクリープ特性が累乗則により表わされないときは用いられない。任意のクリープ則に対し成立するクリープ破壊現象のより詳細な解析が1958年スペインのマドリッドでの第1回国際航空科学会議において示された。

理論的に予言された破壊時間と、実験的に観測されたものとの比較が第24図に与えられる。くびれた試験片の形もまた理論から計算された。それは第25図に示される。くびれた形は試験で観測されるものと同じであることがわかる。

第24図

第25図

クリープ変形が応力分布に及ぼす効果

クリープの条件下で作働する構造要素の設計者が常に理解しているとはいえないが、最も簡単な可能な構造においても、クリープ変形が応力分布に重要な影響を持っていることは明らかである。完全弾性体内の応力分布は、物体のあらゆる微小部分で満たされていない平衡方程式と、これらの部分の変形の適合条件式により決定されることは周知のことである。各部分の変形はまた、応力-歪則により応力と関係づけられている。材料の温度がクリープ変形を起こすのに十分高いときは変形はもはや応力のみによるのではなく、応力が作用している時間にも依存する。同様に各部分の相対的変形は、弾性域において正しいフックの線型則がクリープ率の応力の累乗または指数関数とするクリープ則でおきかえられると大きく変化する。

る。不可避の結果として応力分布に重大な変化が生ずる。航空機構造の設計者は自分の設計の安全を確信するためには、この変化を知らねばならない。

クリープ則が応力分布に大きく影響する静的不静定構造の最も簡単な例は、余分の部材を持つ、骨組である。このような問題は著者により、昔の論文の一つに研究されている。その結果をここに示して、そこに展開された概念を例証しよう。第26図は6個の対称におかれた棒からなる骨組を表わす。棒の上端は剛な壁に取り付けられ、下端は荷重 P が加えられているところの継ぎ手につながれている。基本的な解析の結果、第27図に示される応力値が得られる。

第26図

第27図

この図において座標は棒内の応力を公称応力 $p/2A$ で割ったものである。ただし P は加えられる荷重、 A は各棒の断面積である。棒は垂直と 30° , 45° , 60° の角度をなしている。材料は定常クリープ変形のみを示し、弾性変形は起こさないと仮定され、(7)式の累乗則をクリープ則として採用した。横軸はクリープ則の指数 n の値である。図から3つの傾きの違う棒およびそれらと対称な棒における応力の差は、完全に弾性的な $n=1$ の場合非常に大きい。応力の違いは n の増加とともに急激に減少し、各応力は n が無限大に近づくにつれて、漸近的に同じ値に近づく。図から $n=3, 5, 7$ のクリープ則に相当する応力分布は、線型弾性的分布から非常に違うことが明らかになる。

変形が定常クリープ則で決定され、完全に弾性的な変形が無いときは、構造の応力分布はすべての時間に

において相似である。この理由から、この種の問題は、時間に独立な問題として取り扱う。解析において以前の論文で著者が証明したクリープ問題の弾性的類似系を使うことが出来る。ある条件下では、この類似系は、変形が一次クリープ則で決定されるときでも正しい。瞬間的弾性応答とクリープ変形の効果との間の干渉を研究するような工学者にとって重要な問題ではこのような単純化は出来ない

構造設計者に実用的興味のある第2の例は、材料が定常クリープ変形を示す場合、一定曲げモーメントを受ける梁の断面における応力分布の計算である²²⁾。第28図は解析の結果を示す。完全弾性梁の線型応力分布はクリープ則の指数 n が大きくなるにつれて、最外部繊維の繊維応力が減少して、曲線的応力分布に変化することが見られる

第 28 図

柱のクリープ座屈

第 29 図は長時間にわたって一定荷重をうける柱の座屈の研究において Battelle Memorial Laboratory で用いられた試験装置の写真である。荷重は一定重量がつるされているこの方法で加えられる。柱はナイフエッジでその両端が支えられ、その温度は熱電対で制

第 29 図

御された炉により一定の高さに保たれる。柱の中央点の横変位が測定され変換器により時間の函数として記録される。

柱の中央点の変位の横方向速度は、柱試験の最初には、極めて小さいことが観測された。著者の立ち合った試験のいくつかにおいて指示器は 2~3 時間、肉眼で検出出来る変位は示さなかった。その時間の後、わずかのふれが見られ、それが非常に急激に増加して、数秒のうちに計器の針が目盛りの範囲をこえてしまった。したがって工学の立場からつぎのことがいえる。クリープをうける柱は、有限の寿命を持ち、それを越すとそれに働く荷重は一定に保たれていても、座屈してしまう

この現象は柱の様相の解析に当たって、完全に新しい概念を導入することに注目すべきである。室温での完全弾性または弾塑性座屈という、より良く知られている場合においては、荷重が増加したときのみ座屈がある。それをこえると、柱が直線を保てないという荷重の最大値が存在する。ほんの少しでもこの荷重を越えると、柱は破壊する。これとは対照的に非線型クリープ変形が存在すると、柱は荷重が十分長い時間柱に作用することが許されるかぎり、いかに小さい圧縮荷重の下でも座屈する。限界荷重の位置はしたがって限界時間により取ってかわられ、これはもちろん材料の幾何学的条件および力学的特性と同様に、加えられる荷重の函数である。

第 30 図

解析を簡単にするために通常第 30 図に示されるように柱を理想化する。柱はおのおのが図に拡大して断面が示されているように面積 $A/2$ の 2 つのフランジからなり一定断面積を持つと仮定される。2 つのフランジはウェップにより一定距離 h だけはなされていてウェップは引張りには剛性を持たないが、無限大の剪断剛性を持つ。さらに柱の中心線は点線で示されている

る如く、荷重 P がかけられると直線から偏っている。この線は振幅 y_{00} の正弦半波と仮定される。荷重がかけられると直線からの初期偏差は柱の弾性変形の結果、瞬間的に増大する。偏差の新しい振幅は y_0 で表わされる。それは弾性論から難なく計算出来る。荷重をかけるときに加わる応力が弾性限を越えるに十分大きくても、このような場合は少し難しい点はあるが新しい変形を計算出来る。

材料がクリープをうけると、2つのフランジのクリープ変形は、2つのフランジ内の応力が違うから、相異なった率で増加するであろう。柱の凹側のフランジでは応力が平均応力より高く、一方柱の凸側のフランジでは低い。したがって凸側フランジは、凹側フランジよりゆっくりと長さを減少し、長さの変化の差は、クリープ則の指数 n が大きいほど大きい。クリープにより生じた曲率の増加は当然柱の中心線の荷重 P が作用している直線からの偏差を増加させる。この直接的結果として、より大きな曲げモーメントが生じ、その結果、フランジ内の応力が増加する。応力が大きくなると、変形率はさらに大きくなり、この悪循環は無制限に大きな変形へと落着し、クリープ則が非線型の場合、有限時間内に柱の完全な破壊に達する。

第 31 図

この理論的考察の結論は、第 31 図に示される実験曲線でうづつけられる。これらの曲線で、 L は柱の長さ、 O はその断面の回転半径、 P は前と同様に加えられる荷重である。曲線は International Journal of Mechanical Sciences²³⁾ から採った。

クリープ座屈の最も最近の理論では、材料の完全な応力歪曲線が考慮されている。荷重 P により生ずる平均応力が材料の弾性限以下のときでも、平均圧縮応力および中心線が荷重直線からずれているために柱内に生ずる曲げ応力との和は、クリープ座屈過程の間に、はやかれおそかれ弾性限をこえる応力値になり、そして、おそらく材料の降伏応力にさえもなり得る。このような場合、増大した曲げに対する柱の各瞬間の剛性は減少する。各瞬間の曲げ剛性と完全弾性に相当する

ものとの比は、梁の reduced modulus と弾性率との比に等しい。理想化された梁の reduced modulus は、Engesser, von Kármán, および Southwell により提案された式からつぎのように計算される。

$$E_r = \frac{2EE_t}{E + E_t} \quad (11)$$

この式で tangent modulus E_t の値は凹側のフランジ最大応力に依存し、加えられる圧縮荷重 P の一定値に対し、この応力は柱の、弾性変形およびクリープ変形によって生じた直線からの偏差の関数であるから reduced modulus および柱の瞬時曲げ剛性は、荷重 P のかけられる時間とともに減少する。したがって、おそかれはやかれ reduced modulus が非常に小さくなって、それを von Kármán の座屈式に代入すると、加えられている荷重に等しい座屈荷重を示すような変形に到達する。これが起こったとき柱は座屈する。

最近のクリープ座屈の文献には、それ以上では柱が加えられている荷重に堪えられないという柱の中央点の変形の限界値が存在するという重要な証査がある。この限界変形は材料の応力歪曲線および柱の形状の関数であるが、材料のクリープ特性には無関係である。したがって限界変形は材料のクリープ変形を決定する法則の知識無しに計算出来る。他方限界時間は、クリープ率が柱の材料の応力および歪によって決まることに關する十分な情報が利用出来る場合にのみ決定されう。

第 32 図

第 33 図

加えられる荷重と初期偏心による限界時間の変動を指摘するために、第32図および第33図を Chapman, Erickson および著者²³⁾の論文から、ここに再掲する。第32図では理論と実験との比較もされている。

円筒殻のクリープ座屈

クリープ座屈問題の最後の例として、数年前に Polytechnic Institute of Brooklyn で著者およびその協力者によってなされた理論的および実験的研究についての消息をここに述べよう。この研究では直径16in 長さ40inの円筒殻が全円筒および全試験期間（あるときは数時間に及ぶ）にわたって 500°F の温度に ±3°F の精度内で保たれる炉の中で試験された。第34図は炉および試験装置の一部を示し、第35図はクリープ破壊後の円筒の写真である。柱の場合と同様に円筒殻は試験の初めは非常に小さい変形しか示さな

第34図

第35図

った。円筒の端末断面が温度および加えられる曲げモーメントによって数分あるいは数時間経過してから回転し始めた。回転率は初めは非常にゆっくりと増加し後には次第に急速になり、ついには円筒はいきなり破壊した。

理論的解析では円筒殻の破壊は, Brazier と von Kármán により、弾性域での薄い円筒殻の破壊について計算されたように初め円断面であったものが平たくなって擬似楕円断面になることにより始まるとの仮定

を行なった。この仮説に基づき、またクリープ変形は完全に2次すなわち定常型であるという仮定により、つぎの2つの連立非線型微分方程式を導くことが出来る

$$(\dot{k}r)^{1/n} = \frac{(M/hc r^2 \lambda J_1)}{1 - \frac{n+1}{n} \left(\frac{a}{r}\right) \left[1 + \frac{1}{n+1} \left(\frac{k}{\dot{k}}\right) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\right] (J_3/J_1)} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\dot{a}/r)^{1/n} = & \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)/n} (J_3/J_1^2) (Mk/\mu) r^n \\ & \times \frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{a}{r}\right) \left[1 + \left(\frac{k}{\dot{k}}\right) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\right] (J_3/J_1)}{1 - \frac{n+1}{n} \left(\frac{a}{r}\right) \left[1 + \frac{1}{n+1} \left(\frac{k}{\dot{k}}\right) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\right] (J_3/J_1)} \end{aligned} \quad (13)$$

ここに

$$J_q = 4 \int_0^{\pi/2} (\cos \phi)^{(n+q)/n} d\phi \quad (14)$$

M は加えられる曲げモーメント, r は殻の半径, h_c は進行する変形に対し殻の有効肉厚, a は殻の平たくなる振幅, k は円筒軸の曲率, λ は殻の無次元長さ, μ は曲げのクリープ則における経験定数, そして n はクリープ則の指数である。

方程式は手におえないように見え、円筒殻の限界時間に対する解析解は未だ見出されていないが、研究者が方程式を数値的に積分するのに難しいことはない。実際少しの訓練で、大学4年の学生が完全に積分を実行出来、どんな円筒に対しても、ほぼ2時間で限界時間が得られる。計算手段としては卓上計算機のみを用いた。

基本的仮定の簡単さにもかかわらず、理論と実験との比較的良好一致が Brooklyn で行なわれた研究で見出された。これは第36図のグラフに例証されている。

第36図

再突入飛行体の熱問題

熱吸収解 地球の大気圏外を航行する飛行体の再突入において構造設計者にとって全く新しい型の問題が生じて来る。このような飛行体のうちには弾道ミサイルの円錐弾頭や、地球表面と衛星または宇宙ステーションとの間を航行する往復飛行体および地球の大気あるいはおそらく他の惑星の大気に再突入することを要求される宇宙飛行体がある。弾道ミサイルの再突入の

場合は加熱率が本論文の最切に既に述べたように極度に高い。同時に強い加熱の全持続時間は非常に小さく一般にほんの数秒である。宇宙空間飛行体や補助推進される滑空体が大気に再突入するときは、さらにずっとゆっくり地球表面に降りることもありうる。特に操縦者が乗っている場合はそうであろう。このような場合、加熱率はずっと低くなるが、加熱持続時間は30minくらいになる。地球表面への接近方法がどんなものであっても、異常に大量の熱が飛行体に伝達されるから構造の完全と操縦者及び乗員の命を守るための手段がとられねばならない。この問題に対し、多くの解決法が提案されていて、その中で最初に成功裡に用いられたのが、いわゆる熱吸収である。

円錐弾頭が熱吸収原理にしたがって作られている弾道ミサイルは、厚い壁の熱容量を利用して、弾道ミサイルに伝達されるすべての熱を吸収するように、円錐弾頭の表面近くに、十分な材料を持っている。壁の設計においては、表面の到達する最高温度が、材料の融点よりも低くなければならないということが規定される。熱吸収材料は同時に円錐弾頭に働く圧力および慣性荷重に耐える構造要素としても働きうる。相互に助けあって、熱保護体は、それを十分に支持し得る内部構造部材を保護して、高温での材料の強度低下にもかかわらずその形を保たしめている。

熱保護体として働く材料の適合性は、材料の比熱、すなわち材料の熱を蓄積する能力によるところが大きい。しかし、材料の熱伝導度もまたほとんど同じくらい大切である。熱伝導度が小さいと、空気流によって生ずる熱は熱吸収材の中へ深く入り得ない。そうすると浅い層だけで、流れの境界層から円錐弾頭に伝達される熱を吸収することになり、熱保護体の内部の方が熱を蓄積するという立場からは不用になる。

円錐弾頭の壁の厚さにわたっての温度分布および蓄積される全熱エネルギーの計算は多くの仮定を行なえば、非常に簡単な方法で行ない得る。仮定としては、熱流の問題は一次元問題として取り扱うことが出来ることや、円錐弾頭の壁の内面の効果は無視され得ることなどがある。数学的用語を用いれば、後の方の仮定は壁を無限に厚いと考えるのと等しい。この問題の解はほぼ一世紀前に知られた。同様に銅、ベリリウム、インコネル、グラファイトに対し、次第に適切な材料特性が利用出来るようになった。初期温度 T_0 が 400°R であり、 $1,000\text{ BTU}/\text{ft}^2\text{s}$ の一定熱流があると仮定して、著者によって計算された数値結果が1958年9月マドリッドで開かれた第1回航空科学会議に提出された論文にある。その結果を第5表に与える。

この表において T_m は材料の融点である。 a はそ

第5表 熱吸収材としての4つの材料の適応性に関する資料

	Cu	Be	Inconel	C
$T_m, ^\circ\text{R}$	2442	2805	3030	7060
$a, \text{in}^3/\text{min}$	8.42	2.04	0.38	0.86
t_m, s	10.9	6.26	1.15	16.9
$X_{1/4}, \text{in}$	1.58	0.59	0.11	0.63

の拡散率、 t_m は規定された条件下で円錐弾頭表面が融点に達するまでに要する時間、そして終りに $X_{1/4}$ は、熱吸収材の温度が表面温度の1/4になる点の距離をインチ単位で示したものである。

この表から、全加熱時間が6sのとき熱吸収材が、銅、ベリリウムまたはグラファイトで出来ていれば、表面は融点に達しない。他方、インコネルが表面で融けるに要する時間は、6sのたった1/5で足りる。この理由は全く簡単である。インコネルは、銅、ベリリウムのいずれよりも、はるかに高い融点を持っているが、その非常に低い熱伝導度が熱を深い範囲で蓄積することを妨げている。熱が全部、非常に浅い層の中に蓄積されるから、当然表面は非常に熱くなる。

この点は、温度が表面温度の1/4である深さにより、さらに例証される。この深さは、インコネルの場合0.11inであるが、一方ベリリウムとグラファイトの場合それぞれ0.59inと0.63inである。浸透深さ1.59inにより示される如く、この一群の中で最良の伝導度を持つのは銅である。もちろん、与えられた結果は、熱吸収材の無限に厚い層に対してのみ厳密に正しい。しかし、得られた結果を工学的目的に対し、十分正しくするに要する厚さは1inで十分である。その深さでの温度はベリリウム、インコネル、グラファイトを用いた場合、表面温度の1/4より相当に低い。したがって加熱面から1inの所にある自由断面の効果は、熱伝導に重大な効果を持ち得ない。銅の場合には、1inの深さでの温度が、なお十分高いから、同じことはいえない。しかし、1.58inという値は10.9sの融解時間に対して計算されたものである。もしその条件を6s後に考えることで満足するならば、加熱面から1inの距離にある内壁の温度は十分に低いはずである。

したがって銅、ベリリウム、グラファイトは壁厚が1inならば、 $1,000\text{ BTU}/\text{ft}^2\text{s}$ の加熱率で6s間加熱されるとき、熱吸収材に伝達される熱エネルギーの吸収に満足なものであると結論される。これに対し、インコネル製のこのような熱保護体は全然満足すべきものではない。明らかにベリリウムの方が銅よりも、その重さがほぼ1/5しかないから、ずっと良い。同様

にグラファイトは有利に利用出来る。不幸にして、熱的考察のみで最良熱吸収材を決定するわけにはいかない。グラファイトは極度にもろく、酸化される。同様にベリリウムも最ももろい材料であるが、最近の努力により、そのもろさにもかかわらず、適当な形を作らせる工業的方法が開発された。

熱吸収問題のより詳細な解析が、最近 Stalder³³⁾ によりなされた。問題の設定にあたって、材料の物理特性の高温での変化を考慮した。同様に彼は再突入物体に対し、实际的な飛行経路を仮定し、再突入過程の間の淀み点温度および熱伝達係数の変化を考慮した。最後に彼は方程式を無限に厚い壁という簡単化の仮定をせずに有限壁厚に対し解いた。

第 37 図

第 37 図は、 $W/C_D A = 345 \text{ lb/ft}^2$ により特徴づけられる特定の円錐弾頭が $23,000 \text{ ft/s}$ の速度で大気中に再突入するという再突入壁に対し、回復温度 T_r と熱伝達係数 h を時間の函数として示す。ここに W は円錐弾頭の重量、 C_D は円錐弾頭の抵抗係数、 A は円錐弾頭の断面積である。空気に対しては回復温度は淀み点温度よりわずかに低い。それは境界層に生ずる摩擦熱および境界層での空気の有限熱伝導度を考慮したときの定常状態における完全に絶縁された壁の温度である。熱伝達係数 h は回復温度と壁の実際の温度との間の温度差が 1°F のとき、 1 ft^2 の表面に 1 時間に伝達される熱重を BTU で表わしたものである。

第 38 図にグラファイトの比熱と熱伝導度との値が与えられる。これらの値は、規定された初期条件および境界条件の存在のもとに微分方程式を数値積分する際に用いられた。グラファイトの厚さは 1 in とした。計算の最も重要な結果は第 39 図に与えられる。それらは加熱開始から経過した時間の間に 1 ft^2 を通して

第 38 図

第 39 図

伝達された全熱量のほか、壁の表面 ($x=0$) の温度および壁表面から 1 in の所の温度である。

Stalder は、厚さ 2 in のグラファイト熱保護体の場合到達される最高温度は材料の物理特性の変化を十分に考慮した場合 $2,200^\circ\text{R}$ であるのに比較して、平均値を用いたときは $3,460^\circ\text{R}$ になることに注目した。物理特性が温度とともにゆるやかに変化する銅の場合、この差はずっと小さい。

アブレーション

円錐弾頭の表面が融点に達してはいけないという要請は、弾道ミサイルの使命達成上必ずしも必要なことではないという提案があった。融解の過程が一樣で規則的方法で起こり融けた金属が風の流れて運び去られるかぎり、またもちろん再突入完結後、円錐弾筒の構造保全を保護するに十分な材料が残されるならば、表面が融けることを許しても全くさしつかえない。したがって融解過程を十分正確に計算出来、他に述べられた条件が充たされるならば、材料の一部が融けて、吹きとぶことを許すような、再突入問題の解決法に対し何ら障害は生じ得ない。

再突入過程の間に表面の一部が使い果たされるという設計の明白な有利さは、材料の固体相の熱容量ばかりでなく、融解過程の間に、材料により吸収される潜熱もまた利用することの可能性である。表面の一部が融解、昇華および燃焼によって使い果たされる現象はアブレーションの名のもとに知られるようになった。熱吸収設計と比較してアブレーション設計の効率が大きいことは第6表から明らかである。

第6表 融解または昇華の前後において、1ポンドのベリリウム、銅、グラファイトにより吸収される熱

	$c(T_m - T_0)$	$c(T_m - T_0) + L$
Be	1590	2090
Cu	215	306
C	3330	14180

第6表において c は材料の比熱、 T_m は材料の融点、 T_0 は材料の初期温度、そして、 L は材料の潜熱で、この量は BTU/lb で与えられている。表から、融解の潜熱を利用すると、材料によって吸収される全熱量は、ベリリウムの場合 31.5%、銅の場合 42.0%、グラファイトの場合 324% 増加する。もちろん、グラファイトは融けないで、昇華する。したがって、グラファイトに対して T_m は融解温度というより、むしろ昇華温度と見なされる。熱吸収の付加的利得は融けた材料が吹き飛ぶ前に融解温度以上に加熱されるならば実現される。この量は表を作製する際考慮されなかった。

第6表に与えられる値もまた表面が後退する速度および熱保護体の内部の温度分布についての詳細な解析がなされていないので、問題の大ざっぱな工学的近似である。ここでも全物理量は、考えられている全温度領域内で一定であると仮定された。定常状態の条件が考慮されるならば、同じような簡略法で、表示された3つの材料についてのアブレーション率が計算出来る。1,000 BTU/ft²s の加熱率として著者は銅、ベリリウム、グラファイトそれぞれに対し 4.2, 2.97, 0.364 in/min という値を得た。

同じ問題のより厳密な取り扱いが Landau³⁶⁾ によりなされ、彼は遷移問題を考慮し、第6表の値を求めた計算の基礎となっている無限厚板ではなく、有限厚さの壁を考えた。Landau の結果は次式で与えられるパラメーター m に依存する。

$$m = (\sqrt{\pi}/2)(C/L)(T_m - T_0) \quad (15)$$

$m=0$ および $m=\infty$ という限られた場合に対してのみ、厳密な形の解が得られる。 m の他のすべての値に対してはリレー計算器を用いて、方程式を数値積分

しなければならない。その結果は第40図に与えられる。アブレーション速度 ds/dt は、円錐弾頭の自由表面が、アブレーションの結果後退する速度である。第40図の縦座標は、この量を定常状態の条件に相当するアブレーション速度 V で割ったものである。この量

第40図

V は著者が簡単な工学的近似により求めたアブレーション速度と同じである。横座標 y は無次元時間である。アブレーション過程の最初から経過した時間を、表面を融解温度にまで達せしめるに要した時間で割り、1を引いたものである。これは、横軸の0点は表面材料がアブレーションし始めた時に相当することを意味する。 m の普通の値は5から無限大の間であるから、簡単な工学的近似から計算されたアブレーション速度と Landau により得られたさらに厳密な値との間の違いは、無次元時間 y が約 0.5 より大きければ小さい。

結 論

本論文において、私は航空機およびミサイル構造において最近起こって来た新しい問題を概観しようと試みた。この広い観察から力強く出て来るように思われる一つの結論は、過去の慣習的構造研究者は彼の遭遇する多くの新しい物理現象に困惑させられそうであることである。これらの問題を攻略するためには、今まで彼らの分野からずっと離れていた物理学および数学の部門の勉強をしなければならない。

特に空力加熱の影響および高温での材料特性を計算するために、熱伝達および固体状態の物理学についてもっと学ばねばならないであろう。クリープの現象においては、それを解くのに固体状態の物理学、冶金学、材料試験および応用力学の知識を必要とするような問題にぶつかる。彼の当面する特に興味をそそる新しい問題は再突入飛行体の表面のアブレーションである。

温度分布、蓄熱、融解、昇華および融けたり材料の昇華した表面からの除去の物理的過程は、第2次大戦の終わりには、航空機構造研究者の領域とは考えられていなかった。今日においてもこれらの過程が構造研究者により解析されるべきであると主張することは、おそらく正しいとされないであろう。しかし、それらが

空気力学研究者により取り扱われるべきであるというのと同じように不適当であろう。この解決には、確かに物理学特に熱力学の知識が流れ現象の知識と同様に必要である。しかし、アブレーションの影響で円錐弾頭の構造的保全の意味が広くなり、構造研究者がその過程を詳細に考えないわけにはいなくなる。この空気力学と構造の古典的領域の間にある無人の境地は、航空機およびミサイル工業に従事する物理学者により取り上げられうる。しかし現代の空気力学研究者や、現代の構造研究者が、これに含まれる現象の研究にあたることも同じくらい可能である。ミサイルおよび再突入機体を取り扱う構造解析の良き専門家はこの現象の解決に含まれる学問の基本的原理ぐらひは少なくとも習得しなければならないと私は確信する。もし私にこっけいな批評をさせていただくならば、構造と空気流との間の境界層は構造の一部が昇華し、空気の流れを汚染するとき、簡単には取り除かれたいといいたい。このような場合構造解析者は構造の拡張として、汚染された境界層の一部を要求してもさしつかえない。

以上述べた新しい問題は、すべて飛行体の空力加熱の結果、生じたものである。これこそ、温度が航空機およびミサイル構造の設計や解析において、重要な2つの新しいパラメーターの一つと考えられねばならない理由である。第2の新しいパラメーターは時間である。空力加熱の存在下では本当の定常状態の条件はほとんど維持され得ないし、構造は前もって決定された寿命に対し、設計されねばならない。

文 献

- 1) Baker, J.F., "The Design of Steel Frames", *Structural Engineer*, Vol. 27, p. 397, October 1949.
- 2) Kazinczy, Gábor, "Kísérletek befalazott tartókkal", *Betonszemle*, Vol. 2, No. 4, p. 68, April 1, 1914; see also *Welding Journal Research Supplement*, Vol. 19, No. 1, p. 14-s, January 1954.
- 3) Bailey, R.W., "Creep of Steel under Simple and Compound Stresses and the Use of High Initial Temperature in Steam Power Plant", *Transactions Tokyo Sectional Meeting of the World Power Conference*, Tokyo, October-November 1929, p. 1089.
- 4) Rhode, Richard V., "Some Observation on the Problem of Fatigue of Aeroplane Structures", *Proceedings of the Fourth Anglo-American Aeronautical Conference*, The Royal Aeronautical Society, London, 1953, p. 241.
- 5) Lundberg, Bo, "Fatigue Life of Airplane Structures", *Eighteenth Wright Brothers Lecture, Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 22, No. 6, p. 349, June 1955.
- 6) Weibull, Waloddi, and Odqvist, F.K.G., *Colloquium on Fatigue*, Springer, Berlin, 1956.
- 7) Bloom, Martin H., "External Sources of Heat", Chapter 2 of *High Temperature Effects in Aircraft Structures*, edited by N.J. Hoff, Pergamon Press, London, 1958, p. 14.
- 8) Hoff, N.J., "Thermal Problems in Aircraft Structures", *Advisory Group for Aeronautical Research and Development, Report 2*, NATO, Paris, France, June 1956.
- 9) Dryden, Hugh L., and Duberg, John E., "Aeroelastic Effects of Aerodynamic Heating", presented to the *Fifth General Assembly of the Advisory Group for Aeronautical Research and Development of NATO*, Ottawa, Canada, 10-17 June, 1955, *National Advisory Committee for Aeronautics*, 1955.
- 10) Hoff, N.J., "Structural Problems of Future Aircraft", *Proceedings of the Third Anglo-American Aeronautical Conference*, The Royal Aeronautical Society, London, England, 1951, p. 77.
- 11) Hoff, N.J., "The Structural Effects of Aerodynamic Heating", Chapter 1 of *Theory and Experiment in the Solution of Structural Problems of Supersonic Aircraft*, by N.J. Hoff, Martin Bloom, Frederick V. Pohle, Henry Oliver, I. Mirsky, William I. Berke, Alexander Chwick, William R. MacLean and S. Lederman, WADC Technical Report 55-291, Wright Air Development Center, March 1956.
- 12) Hoff, N.J., "Thermal Buckling of Supersonic Wing Panels", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 11, p. 1019, November 1956.
- 13) Anliker, M., and Lederman, S., "Experiments on Thermal Buckling of Supersonic Wing Panels", Chapter 2 of *Thermal Stresses and Thermal Buckling*, by Josef Singer, M. Anliker and S. Lederman, WADC Technical Report 57-69, Wright Air Development Center, April 1957.
- 14) Hoff, N.J., "Buckling of Thin Cylindrical Shell under Hoop Stresses Varying in Axial Direction", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, No. 3, p. 405, September 1957.
- 15) Abir, David, and Nardo, S.V., "Thermal Buckling of Circular Cylindrical Shells under Circumferential Temperature Gradients", *Journal of the Aero/Space Sciences*, Vol. 26, No. 12, p. 803, December 1959.
- 16) Abir, D., Nardo, S.V., and Hoff, N.J., "Thermal Buckling of Circular Cylindrical Shells under Circumferential Temperature Gradients", Section 2 of *Thermal Buckling of Circular Cylindrical and Conical Thin-Walled Shells*, WADC Technical Report 58-104, Wright Air Development Center, April 1958.
- 17) von Kármán, Th., Dunn, Louis G., and Tsien, Hsue-Shen, "The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 7, No. 7, p. 276, May 1940.
- 18) Hill, D.W., "Buckling of a Thin Circular Cylindrical Shell Heated along an Axial Strip", *SUDAER No. 88*, Stanford University, Stanford, California, December 1959.
- 19) Hoff, N.J., "Boundary Value Problems of the Thin-Walled Circular Cylinder", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 21, No. 3, p. 343, December 1954.
- 20) Norton, F.H., "The Creep of Steel at High Temperature", McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y., 1929.
- 21) Nadai, A., "The Influence of Time upon Creep, The Hyperbolic Sine Creep Law", *Stephen Timoshenko Anniversary Volume*, McMillan Co., New York, N.Y., 1938, p. 155.
- 22) Hoff, N.J., "Stress Distribution in the Presence of Creep", Chapter 12 of *High Temperature Effects in Aircraft Structures*, edited by N.J. Hoff, Pergamon Press, London, 1958, p. 248.
- 23) Chapman, J.C., Erickson, B., and Hoff, N.J., "A Theoretical and Experimental Investigation of Creep Buckling", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 1, Nos. 2/3, p. 145, April 1960.
- 24) Hoff, N.J., "Mechanics Applied to Creep Testing", the William M. Murray Lecture 1958, *Proceedings of*

- the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. 17, No. 2, p. 1, 1960.
- 25) Isaksson, A., "Creep Rates of Eccentrically Loaded Test Pieces", Transactions of the Royal Institute of Technology, No. 110, Stockholm, Sweden, 1957.
 - 26) Andrade, E.N. da C., "On the Viscous Flow of Metals and Allied Phenomena", Proceedings of the Royal Society, London (A), Vol. 84, No. A 587, June 1910, p. 1.
 - 27) Hoff, N.J., "The Necking and the Rupture of Rods Subjected to Constant Tensile Loads", Journal of Applied Mechanics, Vol. 20, No. 1, p. 105, March 1953.
 - 28) Monkman, F.C. and Grant, N.J., "An Empirical Relationship between Rupture Life and Minimum Creep Rate in Creep Rupture Tests", Proceedings of the American Society of Testing Materials, Vol. 56, p. 593, 1956.
 - 29) Hoff, N.J., "Structures and Materials for Finite Lifetime" in Advances in Aeronautical Sciences, Proceedings of the First International Congress in the Aeronautical Sciences, Pergamon Press, London, England, 1959, Vol. 2, p. 928.
 - 30) Hoff, N.J., "Stress Distribution in the Presence of Steady Creep", Proceedings of the Conference on High-Speed Aeronautics, Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, N.Y., 1955, p. 271.
 - 31) Hoff, N.J., "Approximate Analysis of Structures in the Presence of Moderately Large Creep Deformations", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 12, No. 1, p. 49, April 1954.
 - 32) Hoff, N.J., "Buckling at High Temperature", Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 61, No. 563, p. 758, November 1957.
 - 33) Fraeijs de Veubeke, B., "Creep Buckling", Chapter 18 of High Temperature Effects in Aircraft Structures, edited by N.J. Hoff, Pergamon Press, London, England, 1958, p. 287.
 - 34) Erickson, Burton; French, Francis W.; Patel, Sharad A.; Hoff, N.J. and Kempner, Joseph, "Creep Bending and Buckling of Thin Circular Cylindrical Shells", National Aeronautics and Space Administration Technical Note NASA TN D-429, Washington, D.C., June 1960.
 - 35) Stalder, Jackson R., "The Useful Heat Capacity of Several Materials for Ballistic Nose Cone Construction", NACA Technical Note 4141, November 1957.
 - 36) Landau, H.G., "Heat Conduction in a Melting Solid", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 8, No. 1, p. 81, April 1950.
 4. Double row of General Electric Company fused quartz heating lamps at Langley Field. (Courtesy of NASA)
 5. Radiant heating oven at Wright Air Development Center. (Courtesy of U. S. Air Force)
 6. Model in NACA supersonic blow-down wind tunnel. (Courtesy of NASA)
 7. Convair solar furnace. (Courtesy of Convair)
 8. 1 kW induction heater at Polytechnic Institute of Brooklyn.
 9. Variation of elastic modulus with temperature. (Courtesy of NASA)
 10. Temperature history of semi-infinite steel bar. Initial temperature $T_{t=0}=0$; temperature of end $x=0$ is $T=600^\circ\text{F}$ when $t>0$. (Courtesy of The Royal Aeronautical Society)
 11. Variation of temperature in model of wing heated in induction heater. (Courtesy of Wright Air Development Center)
 12. Buckled shape of wing model after heating. (Courtesy of Wright Air Development Center)
 13. Schematic cross section of supersonic wing.
 14. Plate subjected to variable compression.
 15. Equivalent buckling stress distributions. (From Journal of Applied Mechanics)
 16. Axisymmetrically heated cylindrical shell. Variation of hoop stress in axial direction. (From Journal of Applied Mechanics)
 17. Axisymmetrically heated cylindrical shell. Variation of hoop stress with parameters of cylinder. (From Journal of Applied Mechanics)
 18. Cylindrical shell heated along a generator. Variation of axial compression with circumferential coordinate ϕ . (From SUDAER No. 88)
 19. Cylindrical shell heated along a generator. Variation of axial stress along most highly compressed generator. (From SUDAER No. 88)
 20. Spherical shell with reinforcing ring.
 21. Tensile creep test machines. (Courtesy of Battle Memorial Institute)
 22. Creep strain ρ plotted against time t .
 23. Creep curves for 2024-T4 aluminum alloy at 500°F . (From International Journal of Mechanical Sciences)
 24. Creep rupture of 99.6% Al rods. Full lines represent experimental values of minimum creep rate and rupture time; dotted line is calculated rupture time. (From Journal of Applied Mechanics)
 25. Necking of tensile test specimen. At $t=0$ diameter of specimen is assumed to be $1/2\%$ smaller in middle than at ends; t_{cr} is calculated critical time for creep rupture. (From Journal of Applied Mechanics)
 26. Six-bar framework. (From Proceedings of the Conference on High-Speed Aeronautics)

CAPTION OF FIGURES

1. Equilibrium temperatures with radiation cooling on an insulated flat surface at zero angle of attack. (Courtesy of Pergamon Press)
2. Heat transfer rate at the stagnation point of a blunt body of one foot nose radius travelling at a satellite velocity of 26,000 ft/sec. as a function of air density ratio. The value T_{eq} is the surface temperature which will radiate heat at a rate q for an emissivity equal to unity. (Courtesy of Pergamon Press)
3. Laminar heat transfer rate distribution over a blunt body with $T_w/T_e \ll 1$ and $Ms \sin \theta_e \gg 1$ (s represents the distance from the stagnation point measured along the generator). (Courtesy of Pergamon Press)

27. Forces in bars in function of exponent in creep law. (From Proceedings of the Conference on High-Speed Aeronautics)
28. Stress distribution in bent beam of solid rectangular cross section in the presence of fully developed creep. (Courtesy of Pergamon Press)
29. Column in oven. (Courtesy of Battle Memorial Institute)
30. Idealized column.
31. Typical plots of deflection versus time for columns. (From International Journal of Mechanical Sciences)
32. Critical time versus load in creep buckling. (From International Journal of Mechanical Sciences)
33. Variation of critical time with amplitude of initial deviations. (From International Journal of Mechanical Sciences)
34. Oven for heating cylindrical shells. (From NASA TN D-429)
35. Circular cylindrical shell after collapse under constant bending moment. (From Journal of the Royal Aeronautical Society)
36. Experimental and theoretical creep collapse times of cylinders. (From Journal of the Royal Aeronautical Society)
37. Recovery temperature and heat transfer coefficient as functions of time for re-entry of nose cone. (From NACA TN 4141)
38. Specific heat c and conductivity k of graphite as functions of temperature. (From NACA TN 4141)
39. Temperature at surface and at depth of 1 in., and total heat transferred through 1 sq. ft. of surface as functions of time. (From NACA TN 4141)
40. Velocity of ablation according to Landau. (From Quarterly of Applied Mathematics)

抄 録 (続 き)

(354 頁より続く)

出来ないから、音速における様子ははっきりしない。遷音速線型理論をこの他二三の問題に適用して理論の限界を合わせ考えた上で、2次元および軸対称模型に対する多孔ならびに有溝壁の風洞効果の計算に用いた。その際導入される常数 K を決めるのに、模型上での値は従来のものを用いるが、模型から十分遠方の壁における境界条件には、壁の付近でとるべき K の値として K_w なる値を使うことにし、音速での無限気流の場に対する漸近解を参考として決めた。上の理論は一般に模型の寸法が風洞高さに比べて十分小さい場合にはよいが、他方模型がかなり大きい場合には、厚み比の2乗に関して展開する方法を用いるとよい。計算したのは迎角が零の場合であるが、揚力が働く場合にも拡張出来る。実験値は主として、わが国における遷音速の大型風洞建設の予備実験用として著者が航技研に作った、 10×10 cm 程度の小型風洞の干渉計写真によるものから採用した。音速に近い流れの風洞効果について二三要約すると、(1) 翼型については blockage ratio が 1% 程度ならば、著者の理論でよく説明出来る。(2) conecylinder 模型の実験から見る如く、blockage ratio が 1% 以内ならば、前方衝撃波の位置は壁によって変わらない。(3) 理論の予想する如く、厚い物体ほど、風洞効果は少ない。このことは回転対称模型では blockage ratio よりむしろ fineness ratio の方が重要な要素であることをうら書きする。(4) 模型の形によって、たとえば最大厚の位置が前方にあるほど干渉は小さい。

4. 拡散炎の研究 斎間 厚 *Investigations on the diffusion flame.* 57-66. 燃料に市販のプロ

パン・ガスを使用した円筒形の拡散炎の中の流れの構造を知るために、火炎中の全圧分布、静圧分布、平均流速分布、温度分布、密度分布、イオン電流分布等の測定を行なった。流速分布の測定は“particle track”法にて行なった。温度分布測定は細い熱電対線を直線状に張ったものを使用し、測定値に輻射による補正を行なった。密度分布の測定は、冷却した細い管にて火炎中のガスをサンプリングして、そのガス中の水蒸気および炭化水素はシリカゲルに吸着させ、吸着量を化学天秤にて測り、残りのガスをブンゼン・シリング式のガス比重計にて比重測定を行ない、両者から密度を求めた。以上の測定値から主流方向および半径方向の乱れをレイノルズ応力から求めた。火炎中の各断面のモーメントの総和をとると、火炎に沿って変化がほとんどない。火炎中の温度分布にて、各断面の最高値はほぼ一定で、燃料と1次空気の混合比(可燃範囲外にある)を変えても変わらない。このことは最高温度を示す位置における燃料の濃度が一定値を持つことを示している。この関係から燃料の乱流拡散係数を求めることが出来る。また最高温度の位置の燃料の濃度も同時に求まり、プロパン・ガスの場合は可燃範囲の最も濃い値に近い値を示す。火炎の高さの中ほどの断面にてシリカゲルに吸着された重量の分布は火炎の中央部と火炎面の存在する位置付近とに山を生じ、炭化水素量と水蒸気量とを分離して求めることが出来る。それゆえ各断面に存在する燃料の量と、水蒸気の量が求まり、それから各断面における燃料の燃焼量および水蒸気の発生量が求まる。燃料の燃焼量と水蒸気の発生量との比は化学的な割合を満足する如き値を示す。燃焼量は乱流拡散係数とその断面の最高温度の位置の円周長さとの積に比例する。イオン電流の変動は流れの乱れとは直接的関係を示さない。