繊維強化複合材料の強度理論*

林 毅**

The Fundamental Theory of Strength of Fiber-Reinforced Composite Materials

Tsuyoshi HAYASHI

1. 繊維強化複合材料の発展と繊維強化の機構

在来材料複合法の思想は1940年以来この30年間に画期的な発展をとげた。これを3期

I. 1940~1960 FRP の発展

II. 1955~1965 FW 法の発展

III. 1960~1970 FRM の発展

WRM, FRR の開発

に分けることができる。

1940年から1960年までの第I期には、繊維強化プラスチック (FRP: Fiber Reinforced Plastics) の工業用材料としての発達と定着があった。代表的なものにグラスクロス・エポキシ樹脂積層板より成る航空機構造部品や線巻き構造のロケット・チャンバーがあり、これらはいずれも比強度、比剛性がすぐれ、軽量化に役立ってきていることは周知のところである^{1)~3)}

今日グラス繊維とポリエステル樹脂またはエポキシ樹脂との組み合わせによって代表されるFRPが繊維分散強化材料として発展し、弾性率強度とも1945年初期のころよりは格段の進歩をとげた。初期のころFRPは主要構造部材以外の2次構造材としてしか使えないといわれたが、第II期の1955~1965年ごろまでの線巻き (Filament-Winding) 技術の確立¹⁾と、線巻きロケット・チャンバーの実現は、この材料が単に2次構造物から、主要構造用として実用性を獲得したものとして画期的な時期であった。人間衛星船の大気再入時における熱吸収材としてもやはりグラスクロス・エポキシまたはフェノール積層材が融燃材料 (ablation material) として最適であることが実証された

ことは興味深い。この第II期は正に、繊維強化複合材料 (FRCM: Fiber Reinforced Composite Material) が主要構造材料としての有用性を評価された時代としてその意義は誠に大きい。

繊維分散強化法のこのような発展は、それまで金属材料の強化法として専ら考えられていた粒子分散強化法の思想を変えずにはおかなかった。つまり強化用に入れる粒子の径は0.1~0.01ミクロンという微細であることが必要で、それによってマトリクスを10~25倍強化させ得るのであるが、それより大きい径の粒子では強化の効果が低いのである。そもそもこの粒子分散強化法の原理は粒子によって内部の転位 (dislocation) の移動が拘束され塑性変形が起こりにくいために強度が上がるとされている。ところがFRPやFWでは径5~10ミクロンのグラス・ファイバーを使い、たとえば断面積1cm²の棒内には1~2万本も束ねて入れることになるので、このような大きい径のものによって十分大きい強化率が得られるという事実は上記の原理と相反することであった。粒子分散強化原理とは全く異質の強化の原理がそこにあったのであった。つまり、繊維強化法ではマトリクス (強化される地材) は、繊維を適当にマトリクス内に無接触に位置づけし、繊維から繊維へと剪断応力の形で力を伝達する媒体 (バインダー; 結合材) として働くのである。これが粒子分散法と違った繊維強化原理なのである。

第III期の1960~1970年はこのような思想的発展に支えられて新しく繊維強化金属 (FRM: Fiber Reinforced Metal) が試作され発展してきた。針状単結晶 (Whiskers) によるウイスキー強化金属 (セラミック・ウイスキー; たとえばアルミナ Al₂O₃, シリカ SiO₂ などによって強化したアルミニウムなど) とか、ポロン繊維やカーボン繊維によって強化したチタニウムやアルミニウムなどのもつポテンシャルがクローズ・アップされた。宇宙工学・科学における、より軽量で高

* 本稿は1968年4月5日、日本航空学会年会における“Composite Materials”シンポジウムにおいて複合材料の強度理論と題し発表した内容にその後の著者の研究と文献をさらに引用加筆したものである。
昭和43年12月19日原稿受理

** 東京大学工学部航空学科

い耐熱性をもつ材料への強い要請は、高温強度の大きいウiskカースの開発とそれによる耐熱複合金属材料の研究を促さずにはおかなかった。ウiskカースについては1952年以来その成長法と特性の研究が続けられ⁹⁾、1961年に最初のウiskカー CM が作られた。1967年米国 GE の SUTTON は長さ 70mm のアルミナ・ウiskカース (Al_2O_3) の成長に成功した。以上のような高温でも弾性率と強度の大きいセラミック・ウiskカーやカーボン繊維の開発はこの第Ⅲ期発展の端緒となった。次いで1959年 JECH, WEBER, SCHWOPE ら¹⁰⁾は、繊維強化材料の特性は、連続長繊維と、短繊維のいずれを使ったものでも本質的に同じであることを実験的に発見し、これは1960年 MCDANELS, JECH, WEETON ら¹¹⁾によるタングステン繊維によって強化した銅についての実験で確認された。この発見は、長いウiskカースの製法が困難な現在でも、たとえ短かくても長いものと同様の強化が達成できることを示したものとて意義が大きい。

さらに MCDANELS ら¹²⁾は W-Cu 複合材料の実験によって複合則 (law of mixture) の成立を確認した。それまで FRP では、FW を除いては強化の解析理論に欠けていたのであった。FRCM の材料力学的問題としては (1) 繊維強化の理論、(2) FRCM の力学的特性の解析理論 (弾性、強度、疲れ、クリープ、破壊など) また FRCM 材で作った構造物の力学的問題としては (3) FRCM 構造の応力解析理論 (直交異方性、多方向異方性のあるものの)、(4) FRCM 構造の強度理論 (座屈理論など) のおのおのについて広く研究が特に米国、英国、日本にてすすめられてきた。特に (2) については、繊維ごとの振舞を解析するマイクロメカニクス (micromechanics) が最近ようやく盛んになりつつある。今後、分散繊維の挙動を詳しくとらえる理論的研究のコンピューターによる発展が期待される。問題 (3)、(4) については従来より確立されてきた直交異方性理論が役立つと同時に、また一般的な方向性をもつ構造についてもその確立が望まれている。顕微光弾性解析法は、マイクロメカニクスの有力な方法を提供する。このような解析理論はさらに、繊維強化の根本的なメカニズム、その破壊とクラック伝播の機構の解明に迫り、界面問題 (接着破壊と凝集破壊、化学的接着と破壊など) 粘弾塑性的振舞などの研究が行なわれるようになった。

一方において従来のゴムをコードで強化したタイヤ材料を含む、いわゆる繊維強化エラストマー (FRR-Fiber Reinforced Rubber) が、今日の新しい視野から見直され新しい発展を促されつつある。

FRCM はこのように柔かい材料から固い材料まで

ヤング率では $E=(1 \times 10^{-2} \sim 1 \times 10^4) \text{ kg/mm}^2$ 、温度域は $T=(-100 \sim 1, 500)^\circ\text{C}$ に亘って、目的に応じた適材を作りうる適応性をもつ点で、在来材料に欠けていたメリットによる合理性、高性能化、軽量化を約束しているといえよう。

この小論では頁数の制約から以下特に FRCM の強度理論の最も基本的な重要な一方向強化材料の強度理論を主として考察することにする。

2. 繊維強化の理論

一方向に平行に繊維を入れた“一方向強化材”(unidirectionally reinforced material) について考察する。線巻き構造、積層構造などの弾性、強度の推定の基礎になる最も簡単に重要な複合材料の基本形である。

2.1 連続繊維による一方向強化材 この材料から繊維に平行に切り出した板 (第1図(a)) が、繊維方向の引張力 P をうけると、繊維とマトリクスが十分よく結合している場合には、繊維もマトリクスも相互にすべることなく、同じ伸びひずみをうけるとしてよい。この系を (b) のような繊維 f とマトリクス m の2基材から成る系にモデル化しこれが同じ伸びひずみ ε を生ずるとし、各要素の弾性係数を E_f, E_m ; 断面積 A_f, A_m ; 引張応力 σ_f, σ_m をもつとすると、力のつりあいから

$$P = \sigma_c A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m$$

ここで σ_c はこの複合材料のうける平均引張応力、 $A = A_f + A_m$ = 全断面積、繊維とマトリクスの体積含有率 V_f, V_m は、この板の長さを l として

$$V_f = A_f l / (A l) = A_f / A, \quad V_m = A_m / A = 1 - V_f$$

よって上式とから

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (1)$$

繊維とマトリクスの応力・ひずみ曲線が第2図の f, m のように与えられるときは、弾性域 I における複合材としての平均弾性係数 E_c は $\varepsilon = \sigma_c / E_c = \sigma_f / E_f = \sigma_m / E_m$ を (1) に入れ

$$E_c = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2)$$

(1)、(2) を応力、弾性係数の複合則 (law of mixture) という。領域 II では m は塑性を示すので $\sigma_f = E_f \varepsilon, \sigma_m = \sigma_{my}$ (降伏点) であり、

第1図 一方向強化複合材(a)と、2基材モデル(b)

第2図 基材 (f, m) および複合材 (c) の
応力-ひずみ ($\sigma \sim \epsilon$) 曲線

$$\sigma_c = E_f V_f \epsilon + \sigma_{my}(1 - V_f) \quad (3)$$

$$E_c = E_f V_f \quad (4)$$

今、複合材の破壊が、各繊維の同時破断によっておこるとすると、複合材の引張強さは(3)から

$$\sigma_c = \sigma_{fi} V_f + \sigma_{my}(1 - V_f) \quad (5)$$

となる。ここで σ_{fi} は複合材を作るときと同じ処理を施した繊維の引張強さである。マトリックスが加工硬化を示す場合には一般に、

$$\sigma_c = \sigma_{fi} V_f + \sigma_m^*(1 - V_f) \quad (6)$$

と表わされる。 σ_m^* は繊維破断ひずみ ϵ_{fi} に対応するマトリックスの応力である。(5), (6) を強度の複合則という。第3図の直線 AC は(6)による $\sigma_c \sim V_f$ の直線関係を示す。引張強さは繊維含有率 V_f を大きくするほど大きくなる。

一般に σ_m^* はマトリックスの引張強さ σ_{mi} とは一致しない。 σ_{mi} と同じ強さ σ_c を与えるような V_f を最小繊維含有率といい

$$V_{f \min} = (\sigma_{mi} - \sigma_m^*) / (\sigma_{fi} - \sigma_m^*) \quad (7)$$

である。この σ_{mi} の点 B に対応する AC 上の点 B' を等破壊点 (Break-even point) という。繊維含有率をこれよりも大きくしないと、強化の効果がない。

V_f は最大 1.0 であるが、円形断面の繊維の場合 $V_{f \max} = 2\pi / (4\sqrt{3}) = 92.2\%$ となり、互に接触してしまう。実験によると脆い繊維では $V_f \geq 80\%$ では圧縮と曲げ強さは低下する。繊維が接触すると強さを失うので、 $V_f = 80\%$ は実用上の限界であろう。FW 材で

第3図 連続繊維による一方向強化材の引張強
さ σ_c と繊維容積比 V_f の間の複合則

第4図 繊維体積含有率 V_f による応力-ひずみ
曲線の破壊形式の変化

は $V_f = 65 \sim 70\%$ が普通である。

第4図は KELLY¹³⁾ の W-Cu 複合材の V_f を、0.08, 0.4, 0.8 にとって実験した応力 $\sigma_c \sim$ ひずみ曲線を示す。 $V_f = 0.08$ つまり繊維含有率の小さい場合には、引張りによって繊維には大きな応力がかかり、最も弱い繊維がまず破断し、それが受けていた荷重は他の繊維に配分され、つぎに弱いものが破断しつぎつぎと破断がすすむ。このようにして jig-jag をもつ曲線になる。この場合、マトリックスが荷重を受け取ることになり、複合材の引張強さとして

$$\sigma_c = \sigma_{mi}(1 - V_f) \quad (8)$$

を得る。(6)と(8)を等置して得られる V_f の値

$$V_{f \text{ crit}} = (\sigma_{mi} - \sigma_m^*) / (\sigma_{fi} + \sigma_{mi} - \sigma_m^*) \quad (9)$$

は、第3図における D 点の V_f の値であり、このような容積比をもつ複合材では、繊維の逐次破壊を生ずる。

MCDANELS ら^{11), 12)} や KELLY ら^{13), 14)} は平行に整列させたタングステン線 (W) のまわりに銅を鑄込んで作った W-Cu 複合材について、上述の複合則の成り立つことを実験的に確めた。第5図(a), (b) に見るように、複合則のよく成り立つことがわかる^{15), 16)}。

第6図(a), (b) はガラス・エポキシ複合材の例で $E_f = 7,400$, $\sigma_{fi} = 200 \text{ kg/mm}^2$, ポアソン比 $\nu_f = 0.22$, 比重 $\gamma_f = 2.60$, $V_f = 0.70$, $E_m = 350$, $\sigma_{my} = \sigma_{mi} = 8 \text{ kg/mm}^2$, $\nu_m = 0.35$, $\gamma_m = 1.15$, $V_m = 0.30$ としそれぞれ (a) 図 f, m の応力-ひずみ特性をもつとして、複合材の特性 c を求めている。引張強さは: $\sigma_c = 8 + 192 V_f$, 比重は $\gamma_c = \gamma_f V_f + \gamma_m(1 - V_f) = 1.15 + 1.45 V_f$ となるから、比引張強さは $\sigma_c / \gamma_c = (8 + 192 V_f) / (1.15 + 1.45 V_f)$ と表わされこれを (b) に示してある。V を大きくするほど比強度が大きくなる。 $V_f = 0.70$ のとき 65.6 kg/mm^2 である。

これまでの議論では、繊維はすべて連続で同じ強さをもち、引張り荷重にすべて平行であるという理想的な複合材について考えた。しかし上記の複合則(6)は、もしも繊維強度のムラ (バラツキ) や、繊維方

第5図 (a) McDANIELS ら [11] の W-Cu 複合材の引張強さと V_f との (b) KELLY [13] による W 脆性繊維 (径 0.5 mm) と銅の複合材の室温における引張強さ σ_c と V_f の関係 (1964)

第6図 グラス繊維・エポキシ樹脂強化材の特性例
向の不整を考えに入れるなら式中の σ_{fi} として

$$\sigma_{fi} = \beta \sigma_{fi} \quad (10)$$

とおけばよい。 σ_{fi} は、マトリックス中にある状態での繊維の強さの平均値 (束強度 bundle strength) で、 β は計算と実際の (有効な) 繊維応力との懸隔を示す係数である。このほか複合材料の強度に影響を及ぼす因子として (1) 繊維強度に影響する因子 (個々の繊

維の引張強さ σ_{fi} , 集団 (束) 強度 σ_{fi} , 製造時の取り扱いと工程の間の強度劣下, 体積含有率 V_f , 繊維の直径または長さとの関係, 強度と温度の関係, 破壊歪み (脆性か靱性繊維) ϵ_{fi} , (2) マトリックスの強度に影響する因子 (マトリックスの降伏強さ σ_{my} , 引張強さ σ_{mt} , 体積含有率 V_m , 荷重による変形に伴う加工硬化の量 $\sigma_{mt} - \sigma_m^*$, 強さ (特に剪断強さ) 対温度の関係, (3) マトリックスからファイバーへの力の伝達性に影響する因子 (CM 構成要素の応力-歪み曲線と弾性率比 E_f/E_m , E_f/G_m , マトリックス中に埋もれている状態でのファイバーの平均応力 $\bar{\sigma}_{fi}$, 繊維の体積含有率 V_f , マトリックスの剪断強さと剪断弾性率 G_m , 界面接着強さ τ , 繊維限界長さ l_c , 繊維の長さ l とアスペクト比 l/d , 繊維の方位角 θ , 複合材料の破壊モードと, 繊維破壊の統計的モード) の3つに分類できる。これらの因子の検討はここでは省略する。

2.2 不連続繊維による一方強化材 つぎに同じ長さの短繊維を平行に入れた一方強化材の板においては、各繊維の作用はおおのの間隔が余り狭くなければそれを取りまくマトリックスとの相互作用がおおのの独立と見做されるので、それを第7図(a)のように単純化ができて、このような2次元モデル化については林の解析的研究^{(18), (20), (21)}があり、光弾性的研究には林^{(18), (21), (27)}, 林・小山・近藤⁽²²⁾, Dow⁽²³⁾, HORRIDGE⁽²⁴⁾, SCHUSTER-SCALA⁽²⁵⁾, 河田⁽¹⁹⁾, MULLIN BERRY-GATTI⁽²⁶⁾, 河田⁽²⁸⁾のものがある。

著者は第7図(a)のような無限に広いマトリックス板が中に含ませた繊維の方向 (x) に一様引張応力 σ_m をうける場合の補強効果をしらべた^{(18), (20)}。繊維 (F) の長さ l , 断面積 A_f で厚さはマトリックス板 (M) と同じで t とする。 F は M と同様に伸ばされようとして抵抗する。今、界面では F は M と完全に接着してずれは起こらないとする。 M に生ずる応力場は2次元平面応力場と考えてよい。さて F の側面には M から第7図(b)のような分布剪断応力 τ をうけ、 M は F から dx 部分の両側面について合力 $\Delta P = 2\tau t dx$ の反力をうける。 ΔP の分布は F 中点に関し左右対称である。(a) の応力分布は (b) と (c) の合成と見做すことができる。ここで (c) は、中に繊維をもたないマトリックスだけの無限平板であって、繊維のあった位置に、繊維の代わりに反力 ΔP が分布して働くとしている。

第7図 繊維とマトリックスの相互作用

この分布力 ΔP と、元々かかっている一様引張応力 σ_m によって、 x 軸上の任意点 (x) に生ずる x 方向の伸び歪み $\varepsilon(M)$ は

$$M: \varepsilon(M) = \varepsilon_m - \frac{3+2\nu-\nu^2}{\pi E_m} \int_0^{l/2} \frac{\xi}{\xi^2 - x^2} \tau(\xi) d\xi \quad (11)$$

となる^{20), 29)}。ここで E_m, ν は M のヤング率とポアソン比, ε_m は一様応力 σ_m による伸び歪みで $\varepsilon_m = \sigma_m / E_m$ である。一方において、繊維 (F) の x 点の x 方向伸び歪みは

$$F: \varepsilon(F) = \frac{1}{E_f A_f} \int_x^{l/2} 2\tau d\xi \\ = \frac{2t}{E_f A_f} \int_x^{l/2} \tau(\xi) d\xi \quad (12)$$

ここで、先の仮定 M も F も相対的すべりはないとすると

$$\varepsilon(M) = \varepsilon(F) \quad 0 \leq x \leq l/2 \quad (13)$$

(11), (12), (13) より、つぎのような τ の積分方程式が得られる。

$$\int_0^1 \frac{u}{u^2 - p^2} \tau(u) du + \lambda \int_p^1 \tau(u) du = c \quad (14)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} x/(l/2) &\equiv p, \quad \xi/(l/2) \equiv u \\ \lambda &= \frac{\pi}{3+2\nu-\nu^2} \cdot \frac{E_m t l}{E_f A_f}, \quad c = \frac{\pi}{3+2\nu-\nu^2} \sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

この積分方程式を数値例

$$\begin{aligned} E_f &= 1,400, \quad E_m = 350 \text{ kg/mm}^2, \quad \nu = 0.3; \\ l &= 50, \quad t = 1 \text{ mm}, \quad A = 1 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

について数値的に解き第8図を得た。この解析では F の両端末には M から力が働かないとしている。界面剪断応力 τ は繊維末端で局所的に大きく、内方へ入ると急減し、それに応じて繊維応力 σ_f は飽和する。この σ_f の分布形はきわめて典型的なものである。これらの分布は基材の特性 λ, c に依存する。(b) はマトリクス内の繊維のすぐ外側と、 x 軸上の応力 $\sigma_x(x, 0)$ の分布と、対称 y 軸上の x 方向応力 $\sigma_x(0, y)$ の分布を σ_m との比で表わす。この $\sigma_x(x, 0)/\sigma_m$ の分布は、KELLY-TYSON (1965)¹⁴⁾ がその後3次元的に類推したものと同形である。

$\sigma_x(x, 0)$ は繊維末端から原点内方へ近づくと漸増するが、中央点ではなお依然として、一様応力 σ_m より小さい。一方繊維は中点で $\sigma_f/\sigma_m = 3.6$ で、マトリクスよりも高い応力をうけることがわかる。この間の特性はヤング率比 E_f/E_m が FRP のように 10~20 となるに従って一層顕著になる。中央対称断面 ($x=0$) のマトリクス応力 $\sigma_x(0, y)$ はこの例では繊維長さの $1/4$ 離れればほぼ σ_m に達し一様になるが、その

(a) 繊維応力と繊維に沿うせん断応力の分布

(b) マトリクス内の応力分布

第8図 数値例、繊維とマトリクス内の応力分布

分布の積分値と一様分布のそれとの差が繊維に伝達された力になる。

なお、 λ, c への依存性を近似的につかむため

$$\tau = au^n \quad (16)$$

と仮定して (14) に入れ、その式を $p=0$ (中央点) で満足させるように a をきめると

$$a = c \left/ \left(\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n+1} \right) \right. \quad (17)$$

繊維の引張応力は

$$\sigma_f = \frac{1}{A_f} \int_x^{l/2} 2\tau dx = \frac{(lt/A_f)}{\sigma_m} \int_u^1 \tau du \quad (18)$$

と表わされるからこれに (16), (17) を入れ

$$\sigma_f(u) = \frac{(lt/A_f)}{\sigma_m} \left[c \left/ \left(\frac{n+1}{n} + \lambda \right) \right. \right] (1-u^{n+1}) \quad (19)$$

もし直径 $d(=t)$ の繊維を使うときは $A_f \doteq t d$ だからまた $\nu=0.3$ において (16), (17), (19) から

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\sigma_m} &= \frac{(n+1)u^n}{\frac{E_m l}{E_f d} + \frac{n+1}{n} \frac{3+2\nu-\nu^2}{\pi}} \\ &= \frac{(n+1)u^n}{\frac{E_m l}{E_f d} + 1.12 \left(\frac{n+1}{n} \right)} \end{aligned} \quad (20)$$

$n=4$ とおくと

$$\frac{\sigma}{\tau_m} = \frac{5}{\frac{E_m l}{E_f d} + 1.40} \cdot u^4 \quad (21)$$

また

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_m} = \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{\frac{E_m l}{E_f d} + 1.40} (1 - u^5) \quad (22)$$

をうる。この結果は繊維アスペクト比 (l/d) と基材の弾性係数比 E_m/E_f を含む、きわめて簡単な実用式である。 $l \gg d$ (連続長繊維) の場合には $\tau \rightarrow 0$, $\sigma_f/\sigma_m \approx E_f/E_m$ となり合理的である。これは著者の求めた式である³³⁾。

ガラス繊維とエポキシ樹脂の組み合わせでは $E_m/E_f = 1/20$ であり、また $d = 9 \mu$, $l = 1 \text{ mm}$ の場合には、 $n = 4$ のとき $(\tau/\sigma_m)_{\max} = 0.72$, $(\sigma_f/\sigma_m)_{\max} = 16.0$ となる。これは τ , σ_f とともに大きい。なお n のみを 5, 6, 7, 20 と変えると $(\tau/\sigma_m)_{\max} = 0.87, 1.02, 1.17, 3.12$, $(\sigma_f/\sigma_m)_{\max} = 16.1, 16.2, 16.3, 16.5$ となり、 n によっては最大繊維応力はほとんど変わらないが、端部の最大剪断応力が $0.72 \sim 3.20$ とかなり変わる。この例では実際の τ の分布には高次近似 ($n \approx 20$) が近いようである。

つぎに 3 次元モデルによる解析については Dow²³⁾ の研究があるが、その思想に不明な点と間違いがあるのでここに著者の考えを交え誤りを正して紹介する。

一方向強化材の中に各繊維を包含するマトリクス円筒を考え、その一単位として第 9 図 (a) をとる。これは長さ l , 径 d の繊維 (F) が、直径 D なる同心マトリクス円筒 (M) に接着されており、外筒 M に一様引張応力が両端にかかる。このとき界面剪断応力 τ_0 と繊維応力 σ_f を求める。界面に働く剪断応力 τ_0 の影響は界面から M 内にも F 内にも及び、内部でも剪断変形がおこる。同時に M , F 円筒は軸荷重をうける。そこでこの剪断変形に関与する部分は M 円筒では界面 A_0B_0 から円 C_m まで、 F 円筒では界面 A_0B_0 からある円 C_f までの領域であるとする (第 9 図 (b))。この C_m, C_f 円としては、第 9 図 (b) のように、断面の扇形部分 A_0B_0BA , OA_0B_0 の面積の重心の軌跡をとることができる。そのおのおのに働く軸力は C_m, C_f 上に沿って働くからである。界面 A_0B_0 から円 C_m, C_f まで

の距離 p_m, p_f は

$$p_m = \frac{1}{3} (D^3 - d^3) / (D^2 - d^2) - \frac{d}{2}, \quad p_f = \frac{d}{6} \quad (23)$$

F の中央断面から左方に x 軸をとり、 x 断面において、 M, F 各円筒の C_m, C_f 上および界面上の点の軸変位を u_m, u_f, u_0 とする。これらはいずれも軸対称変位である。

x 断面は変形後第 9 図 (c) のようになり $u_m u_0$ から M 内に $u_0 u_f$ から F 内にそれぞれ剪断歪み γ_m, γ_f を、したがって界面剪断応力 τ_0 をひきおこす。

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_m &= (u_m - u_0) / p_m, \quad \gamma_f = (u_0 - u_f) / p_f \\ \tau_0 &= G_m \gamma_m, \quad \tau_0 = G_f \gamma_f \end{aligned} \right. \quad (24)$$

M, F 各円筒の x 断面に働く軸力を P_m, P_f とすると、これらと界面剪断応力との釣合から

$$\left\{ \begin{aligned} dP_m/dx - \tau_0 2\pi r &= P_m' - \tau_0 2\pi r = 0 \\ P_f' + \tau_0 2\pi r &= 0 \end{aligned} \right. \quad (25)$$

各円筒の断面積を A_m, A_f , ヤング率を E_m, E_f とすると

$$P_m = E_m A_m u_m', \quad P_f = E_f A_f u_f' \quad (26)$$

(24) ~ (26) から u_m, u_f 以外の量を消去し次式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} u_m'' - \frac{\pi d}{E_m A_m} \left[\frac{G_m G_f}{p_m p_f} \right] \left(\frac{G_m}{p_m} + \frac{G_f}{p_f} \right) (u_m - u_f) &= 0 \\ u_f'' + \frac{\pi d}{E_f A_f} \left[\frac{G_m G_f}{p_m p_f} \right] \left(\frac{G_m}{p_m} + \frac{G_f}{p_f} \right) (u_m - u_f) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (27)$$

これらの差をつくると

$$(u_m'' - u_f'') - k^2 (u_m - u_f) = 0 \quad (28)$$

ここで

$$k^2 = \pi d \left(\frac{1}{E_m A_m} + \frac{1}{E_f A_f} \right) \frac{G_m G_f}{p_m p_f} \left(\frac{G_m}{p_f} + \frac{G_f}{p_f} \right) \quad (29)$$

(28) を解いて

$$u_m - u_f = A \sinh kx + B \cosh kx \quad (30)$$

境界条件は M の端部引張力を P , F の端部は自由として

$$\left\{ \begin{aligned} x=0 \text{ にて} \quad u_m &= u_f = 0 \\ x=l/2 \text{ にて} \quad u_m' &= \frac{P}{E_m A_m}, \quad u_f' = 0 \end{aligned} \right. \quad (31)$$

第 9 図 Dow の 3 次元モデルとその変形 M=マトリクス, F=繊維

を満足するように A, B をきめ

$$u_m - u_f = \frac{P \sinh(kx/2)}{E_m A_m k \cosh(kl/2)} \quad (32)$$

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{P \sinh(\lambda x/d)}{\left(A_f + \frac{E_m}{E_f} A_m\right) \cosh(\lambda l/2d)} \quad (33)$$

$$\sigma_f = \frac{P}{A_f + \frac{E_m}{E_f} A_m} \left(1 - \frac{\cosh(\lambda x/d)}{\cosh(\lambda l/2d)}\right) \quad (34)$$

ここで

$$\lambda^2 = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{G_f}{E_f} \left(1 + \frac{E_f A_f}{E_m A_m}\right) \left[1 + 2 \frac{G_f A_f}{G_m A_m} \times \left\{\left(1 + \frac{A_m}{A_f}\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{3A_m}{2A_f}\right)\right\}\right] \quad (35)$$

である。

以上の思想は一つのシア・ラグの考え方であることを著者は明らかにした。また Dow は円 C_m, C_f は断面2次モーメントからきめていて正しくなく、 k, λ の値が間違っている。以上の τ_0 や σ_f の分布は closed form に書いていてわかりよい。分布型は先の2次元モデルの場合と全く同様になる。

一方、光弾性解析法も CM の力学特性の研究に有用であって、先に引用した光弾性実験研究は、単一繊維まわりの応力分布をくわしくしらべており、上述の弾性解析の結果をよく説明している。

以上は問題の弾性解であるが、KETLY-TYSON¹⁴⁾ は、マトリックスが塑性域に入る場合を解析した。荷重を大きくすると、マトリックスは繊維端部から降伏を始め、次第に塑性域を広げ、ついに全域が降伏する。この状態では繊維応力 $\sigma_f(x)$ は第10図(b)から

第10図 繊維とマトリックスの相互作用

$$\pi r_f^2 (d\sigma_f/dx) = -2\pi r_f \tau_{my}$$

これより $\sigma_f(l/2) = 0$ として

$$\sigma_f = \frac{2\tau_{my}}{r_f} \left(\frac{l}{2} - x\right)$$

もしも繊維がある場所から降伏点 σ_{fy} に達して、塑性流れをひきおこすときは σ_f の分布は第10図(d)のようになり、 $\sigma_{fmax} = \sigma_{fy}$ となるような端末からの距離を $l_c/2$ とすれば

$$\begin{cases} l_c = (\sigma_{fy}/2\tau_{my})d \\ \frac{l_c}{d} = \frac{\sigma_{fy}}{2\tau_{my}} \end{cases} \quad (36)$$

を得る。 l_c を繊維の限界長さ (critical fiber length), l_c/d を繊維の限界アスペクト比 (critical aspect ratio) という。繊維が引張強さ σ_{ft} まで弾性で以後塑性流れを起こす材料では上式中の σ_{fy} には σ_{ft} を取ってよい。

たとえばガラス・エポキシ FRP では $\sigma_{ft} = 200 \text{ kg/mm}^2$, $\tau_{my} = 2 \text{ kg/mm}^2$ なるときは、 $l_c/d = 50$ となる。 $d = 10\mu$ ならば l_c は 500μ つまり 0.5 mm である。繊維を十分よく働かせるには繊維長 l をこの限界長さ l_c より大きくとらなければならない。

限界長さ l_c よりも長い等しい長さの繊維をたくさん分散させた一方向強化材では、各繊維が降伏点 σ_{fy} 以後、完全塑性を示す場合には繊維の軸方向引張応力の分布は第11図(b)のような台形になるのでその平均軸応力として

$$\sigma_{av} = \left[\sigma_{fy} \cdot \frac{l_c}{2} + \sigma_{fy}(l - l_c)\right] / l = \sigma_{fy} \left(1 - \frac{l_c}{2l}\right) \quad (37)$$

を得る。棒状材料の場合、任意横断面によって切られ

第11図 繊維限界長さ l_c と繊維平均応力 σ_{av}

る繊維数は平均としてどの横断面でも同じと考えてよいから、繊維の占める断面積 A_f 、残りを A_m とすれば、 A_f には一様に σ_{av} が、 A_m には応力 σ_m^* が働くとして、全断面 A についての平均応力 σ_c との釣り合い条件から

$$\sigma_c A = \sigma_{av} A_f + \sigma_m^* A_m$$

とかけ

$$\sigma_c = \sigma_{fy} \left(1 - \frac{l_c}{2l} \right) V_f + \sigma_m^* (1 - V_f) \quad (38)$$

を得る。これを短繊維による複合材の引張強さに関する複合則とよぶ。 σ_m^* は繊維の降伏ひずみに対応するマトリクス応力である。

第12図は l/l_c をパラミターとする $\sigma_c \sim V_f$ 曲線である。 $l/l_c = 1$ のとき $\sigma_{c \max} = \sigma_{fy}/2$ 、 $l/l_c = 50$ のとき $\sigma_{c \max} = 0.99 \sigma_{fy}$ であり、連続繊維の場合に近づく。

(38)式中 $l/l_c \rightarrow \infty$ のときは(38)は連続繊維の複合則(6)と全く同じになる。

KELLY-TYSON は上の結果を確かめるため、直径 0.2

第12図 不連続繊維による一方強化材の複合則

第13図 不連続タングステン線による一方強化銅の複合則に関する実験 (温度 250°C)

第14図 不連続タングステン線による一方強化銅の複合則に関する実験 (温度 600°C)

mm の W 線によって銅を強化した複合材料によって繊維アスペクト比 l/d を種々に変えた場合の $\sigma_c \sim V_f$ を実測し第13, 14図を得た。これらは複合則をよく実証した¹⁴⁾。

2.3 実験的に限界アスペクト比 l_c/d と界面剪断強度 τ を求める方法

1) 限界アスペクト比 l_c/d KELLY-TYSON¹⁴⁾ は複合則(38)

$$\sigma_c = \sigma_{fy} \left(1 - \frac{l_c}{2l} \right) V_f + \sigma_m^* (1 - V_f) \quad (38)$$

を V_f にて微分して得られる関係

$$\frac{d\sigma_c}{dV_f} = (\sigma_{fy} - \sigma_m^*) - \frac{\sigma_{fy} l_c}{2d} \left(\frac{d}{l} \right) \quad (39)$$

を利用して l_c/d を求める方法を提案している。つまり種々の V_f に対する複合材の引張強さ σ_c の資料をまず求めておき、それから $d\sigma_c/dV_f$ を実験値から計算し、それと d/l とをプロットすると、 d/l の原点におけるその曲線の slope から、 $\sigma_{fy} l_c/(2d)$ つまり l_c/d が求められる。

KELLY-TYSON¹⁴⁾ の W-Cu についての実験結果の第1表は l_c/d と界面剪断強さ τ を示す。

なお l_c/d を求めるのには引抜試験 (pull-out test) が利用される。強化用繊維 (または線) の先端をボタン状のマトリクスにけた孔へ通し溶融マトリクス材

第1表 KELLY-TYSON の W-Cu 一方強化材の実験から l_c/d と界面剪断強さを求めた結果。
W: 0.5 mmφ 線

温度 $T^\circ\text{C}$	$d\sigma_c/dV_f$ 対 d/l の曲線の初期スロープから求めた		引抜き試験から
	l_c/d	τ (ksi)	τ (ksi)
250	13.5	6.9	16.9
300	19.3	5.9	15.1
600	31.2	3.2	

をその間隙に注入してかためたのち、ボタンをおさえておいて、繊維（線）を引き抜くのである。ボタンの厚さ（ l ）を種々にとり、引抜力 P を測定すると、 $P \sim l/d$ のプロットができる。 d 一定とし l を小さいものから大きい方へ変えていくと、 P は初め小さく、次第に増して、ついに飽和しほぼ一定値に近づく。その遷移する初めの点の l/d をよめば、それが限界アスペクト比 l_c/d を与える。引抜荷重からは界面剪断強さ τ も求められる。

2) 界面剪断強さ τ 上述のボタン式引抜試験から τ を求めることができる。第1表の第4欄がその結果であるが、先の方法で求めたものの約 2~3 倍大きく出ている。微分の方法は精度を下げるので感心しない。むしろ引抜試験法の方が実用性をもつ。

3. 繊維強化材料の強度の方向性

まず、一方向強化材の板の引張強さ、圧縮強さ、その方向性を考察し、一般直交異方性材料の強度則を述べる。

3.1 一方向強化材の引張破壊モードと強さ 一方向強化材の引張強さはきわめて強い方向性をもつことはよく知られていたことであり、STOWELL-LIU³¹⁾, TSAI^{48), 49)}, KELLY-DAVIES³⁰⁾, 林³³⁾, 植村-山脇^{34), 52)}らの研究がある。

ある厚さの一方向強化材料の板を、繊維方向と角 θ をなす方向に引張る場合の強さをしらべる。つぎのような種々の破壊モードがある。

3.1.1 繊維の破断による破壊 繊維に直角な断面（第15図(b)の BC ）について垂直応力がその方向の引張強さ F_L に達するときの平均応力 σ_c を求めると

$$\sigma_c = F_L / \cos^2 \theta \quad (40)$$

3.1.2 マトリックスと繊維の界面剪断応力による破壊 繊維に平行な断面 AC （第15図(c)）において、繊維方向の剪断応力が、この方向の剪断強さ τ_1 に達して破壊する場合であって、複合材としての強さは

第15図 一方向強化材の破壊様式

$$\sigma_c = 2\tau_1 / \sin 2\theta \quad (41)$$

3.1.3 マトリックスの引張破壊 第15図(c)より、繊維に垂直な方向のマトリックス部の引張強さ F_T によって破壊する場合では、

$$\sigma_c = F_T / \sin^2 \theta \quad (42)$$

3.1.4 繊維軸まわりの剪断による破壊 一方向強化材の剪断強さとしては第16図(b)のように、繊維方向の剪断応力 τ_1 のほか、それに直角な方向の剪断応力 τ_2 に対するものもある。第16図(a)のような引張りによって生ずる τ_2 を求めるには角 φ で与えられる断面 $ACC'D'$ を考え、この断面上繊維方向の剪断応力成分 τ_1 とそれに直角方向の成分 τ_2 とを求めればよい。 φ は断面 $ACC'D'$ と試験片側面 $A'B'C'D'$ とのなす角であり、これは A, A' から $C'D'$ へ下した垂線の足 E において $AE, A'E$ の交角として与えられる。いま、 σ_c の働いている断面 $ABB'A'$ と、考えている面 $ACC'D'$ の各面積を A, F とすると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c A \cos \theta &= \tau_1 F, \quad A = F \sin \theta \sin \varphi \\ \sigma_c A \sin \theta \cos \varphi &= \tau_2 F, \quad \sigma_c A \sin \theta \sin \varphi = F_T \cdot F \end{aligned} \right\}$$

となり、これから

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= \tau_1 / (\sin \theta \cos \theta \sin \varphi) \\ \sigma_c &= \tau_2 / (\sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi) \\ \sigma_c &= F_T / (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

ここで τ_1, τ_2, F_T はそれぞれの強さを表わすすると、 τ_1 または F_T による破壊は $\varphi = \pi/2$ の断面で極小になり、それは式(41), (42)と一致する。 τ_2 によるものは $\varphi = \pi/4$ のとき最小となり

$$\sigma_c = 2\tau_2 / \sin^2 \theta \quad (44)$$

第16図 θ, φ に与えられる繊維を含む平面 $CDD'C'$ に沿う剪断 τ_2

第17図 一方向強化材の繊維角 θ と強さの関係

となる。普通 $\tau_1 > \tau_2$ で、 τ_2 自身がかなり小さい材料では、この破壊様式は注意を要する。この結果は著者の導いたものである。

第17図は以上の結果をまとめ $\sigma_c \sim \theta$ にプロットしたものである。これらの最も下位に出る部分が起こりうる破壊様式と破壊強さを与える。これから、繊維の破断による破壊を生ずる θ の範囲が非常にせまいことがわかる。その限界角 θ_{cr} は(40)と(41)の σ_c を等置して

$$\theta_{cr} = \tan^{-1}(\tau_1/F_L) \quad (45)$$

をうる。この限界角以上ではマトリクス部の剪断破壊強さ τ_1, τ_2 または繊維に直角な方向の引張強さ F_T による破壊を生ずる。 θ_{cr} は普通 $5^\circ \sim 10^\circ$ である。

植村らは一方向材、一方向巻き線巻円筒の各種荷重に対する強度実験(軸方向引張り、圧縮、振り)を行ない興味ある結果を得ている。

3.1.5 微視力学的考察の必要性 以上では、各断面に現われる応力の分布はすべて“一樣”であるとしているが、このことは試験片の両端つかみ部とか、自由辺の近傍において必ずしも一樣でない。のみならず、各種強さ F_L, F_T, τ_1, τ_2 などは“平均的強さ”であって、局部的な微視的なものをすべて平均した結果の値を意味するにすぎない。分散した繊維とマトリクスの力の授受の機構や、内部クラックの伝播、粘弾性的振舞、異方性の影響、初期応力などマイクロメカニクス(micromechanics)の理論とその実験法特に顕微光弾性手法の開発による解明の必要をここに強調しておきたい^{(18), (22), (27), (28)}。

3.1.6 確率論的強度論 これについては、ROSEN,

CORTEN, BASCOM, PAUL, KIES ら^{(35)~(40)}らの研究がある。この理論は破壊の確率過程を説明するのが目標である。一方向強化プラスチックでは最終破壊が、ランダムな繊維の破断と樹脂の割れとの累積の結果として起こる。繊維の破断とマトリクスの破断という二つの破壊の連鎖現象の研究が必要となろう。この破壊理論はまだ発展の途上にある。

3.2 一方向強化材の圧縮強さ Dow は、繊維がまわりのマトリクスによって弾性支持された細い柱として圧縮荷重に堪えること、圧縮破壊が、そうした細い柱の座屈によって起こることを初めて指摘した。しかし Dow は解析は行なわなかった。

その後 ROSEN⁽⁴¹⁾ は第18図のように規則的に並んだ柱をもつCM材料が圧縮によって起こる座屈を(a)伸張モードと(b)剪断モードの2つに分け、弾性支持をうける板状の柱として座屈解析を行ないつぎの結果を得ている。

(a)の伸張モード(extensional mode)に対し、平均圧縮強さとして

$$\sigma_c = 2V_f[V_f E_f E_m / 3(1 - V_f)]^{1/2} \quad (46.1)$$

(b)の剪断モード(shear mode)に対しては圧縮強さとして

$$\sigma_c = G_m / (1 - V_f) \quad (46.2)$$

を得ている。

この結果を第19図の E, S_1 として示す。 S_2 は、織

第18図 ROSEN のモデルと座屈モード

第19図 一方向強化材の圧縮強さ σ_c の座屈形式と V_f との関係

維の弾性限界を越えた効果を考慮に入れた曲線であり途中から S_1 より枝分れしている。この結果は実験と余りよく一致しない。

林^{(42)~(44)}は剪断変形を伴う圧縮不安定に関する研究から次式を提案している。

$$\sigma_{cr} = G_m \quad (47)$$

たとえば第20図(a)のような四辺を剛な部材のピン結合によって囲まれた厚さ t 、剪断弾性係数 G の“剪断壁”(剪断だけをとる板場)をもつモデルについて、圧縮力 P の安定限界をしらべると、今これが γ だけずれた位置に対するポテンシャル・エネルギーの変化を0とおき

$$\frac{1}{2} G \gamma^2 a b t - \frac{P}{2} a (1 - \cos \gamma) \times 2 = 0$$

γ は小さいとして、座屈荷重

$$P_{cr} = G b t, \quad P_{cr}/b t = G \quad (48)$$

を得た。さらに木材角柱のような場合(第20図(b))にも(c)のようなずれ不安定を示す圧縮応力

$$\sigma_{cr} = G_m \quad (49)$$

を得た。最近 FOYE⁽⁴⁵⁾ は別の考えで同様な式を導いた

が彼は G の σ_c 依存性などは考えていない。林は多くの材料について G は圧縮応力 σ の関数であることから

$$\sigma_{cr} = G_m(\sigma_{cr}) \quad (50)$$

を得た。複合材のマトリックスがこのような不安定限界に達したとすると、繊維は直線状に保つ能力を失うので、繊維は横に倒れるか、ともにずれ破壊を誘起して破壊に導く。つまり圧縮強さは

$$\sigma_c = G_m(\sigma_c) \quad (51)$$

にて与えられる。第19図の S_3 がこの関係を示す。マトリックスの剪断弾性率の圧縮応力依存性については資料がほとんどない。ただこの理論を裏づけする最近の牧の研究⁽⁴⁶⁾を引用したい。牧はポリエステル樹脂とガラス・ロービングから一方向巻きの板を作り、繊維方向の曲げ試験を行ない、曲げ強さ σ_b を求めた。一方ポリエステル樹脂だけの注型円筒を作り振り試験を行なって G_m を測定した。これら2つの実験を、種々の硬化時間に対して系統的に行ない第21図を得た。横軸は20°Cにおける硬化時間である。この図には ROSEN のシアモードの式(46)もプロットしてある。この結果

第20図 圧縮によるシア不安定現象

第21図 Glass-roving-Polyester 一方向巻きの板の曲げ強さ σ_b , Polyester 注型品の G_m と硬化時間 (hr)

は曲げ強さ σ_b と G_m とは硬化時間の広い領域に亘って非常によく一致したが ROSEN とは大きい懸隔を示した。一方向強化材の曲げ破壊が曲げによる圧縮側の破壊によって起こるとしてよく、 σ_b と G_m との一致は、圧縮破壊に対する (51) 式の正当性を示すものと考えてよい。

3.3 直交異方性板としての強度則 これまでは、一方向強化材の考察を行なったが、一方向材の積層板、グラスクロス積層板、フィラメント・ワインディング材などの中で“直交異方性材料”として取り扱えるものが多数見受けられる。つぎにこれらの材料に対する巨視的強度理論を考えよう。この巨視的理論は、現象論的接近に基礎をおくものであって、変形や破壊の形式については直接には論及しない。そうして一つの降伏とか破壊に対する規範を立てるものである。よく使われるものに最大応力説、最大歪み説、最大仕事説がある。今まで述べたものは最大応力説であった。つぎには組み合わせた応力にも適用できる最大仕事説に基づく強度則を述べる。

3.3.1 一様材質の直交異方性材料の強度則 HILL⁴⁷⁾ は等方性材料に対する MISES の最大仕事説を直交異方性材料に拡張したが、それを一方向強化材に適用した TSAI⁴⁸⁾⁴⁹⁾, TSAI-AZZI⁵⁰⁾, TSAI-ADAMS-DONER⁵¹⁾らの研究があり、さらに MISES の降伏条件をより一般化した最近の HOFFMAN⁵²⁾ の研究がある。

直交異方性対称軸方向に XYZ 軸をとり、それに關する応力成分を $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})$ とすると、MISES 則を拡張した HILL の降伏条件 (最大仕事条件) は

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (52)$$

と表わされる。 $F \sim N$ は異方性を表わす係数で、これらは XYZ 方向 (主方向ともよぶ) の単軸引張降伏点応力 X, Y, Z およびそれらの間の剪断降伏点応力 U, V, W によって表わされる。 XYZ 方向にそれぞれ単独に $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ をかけた場合は、それぞれ

$$(G+H)X^2=1, (F+H)Y^2=1 \\ (F+G)Z^2=1$$

が成り立たなければならない。これから

$$\left. \begin{aligned} 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} & 2G &= \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \\ 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

一方、剪断応力をそれぞれ単独にかけた場合から

$$2L=1/U^2, 2M=1/V^2, 2N=1/W^2 \quad (54)$$

としてきまる。ある材料について実験によって $X \sim W$

第22図 一方向強化材、繊維方向がX

の6個の単一応力に対する強さが求められれば (53), (54) を (52) に入れて、任意の応力状態 $(\sigma_x \sim \tau_{xy})$ の6成分) に対する降伏条件が求められる。

一方向強化材料については、繊維方向に X 軸をとった場合、特性は YZ 面内では等方性になるので

$$X; Y=Z, U; V=W \quad (55)$$

となり (第22図), 降伏条件は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{2}{Y^2} - \frac{1}{X^2} \right) (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2X^2} (\sigma_z - \sigma_x)^2 \\ & + \frac{1}{2X^2} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \left(\frac{\tau_{yz}}{U} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{zx}}{W} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{W} \right)^2 \\ & = 1 \end{aligned} \quad (56)$$

となる。

航空・宇宙用構造では薄肉板材として使われる場合が多い。つまり平面応力場の降伏条件を求めておくことと便利である。面内に XY 軸を、厚さ方向に Z 軸をとると

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (a)$$

として (52), (53), (54) から

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_x}{X} \right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_x \sigma_y \\ & + \left(\frac{\sigma_y}{Y} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{W} \right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (57)$$

X 軸方向に繊維を入れた一方向強化板の中央面内に XY 面をとると、 XY 面内の平面応力場 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ に対して、

$$\left(\frac{\sigma_x}{X} \right)^2 - \frac{Y}{X} \left(\frac{\sigma_x}{X} \right) \left(\frac{\sigma_y}{Y} \right) + \left(\frac{\sigma_y}{Y} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{W} \right)^2 = 1 \quad (58)$$

を得る。(57) において $Y=Z$ とおけばよいからである。これは (56) において平面応力場の条件 (a) を入れても、もちろんこの式が導かれる。

引張りと圧縮で異なる強さをもつ材料では σ_x, σ_y の正負に応じてそれらの強さを使い分けることを TSAI が提案している。

XY を L, T 方向、 X, Y, W を F_L, F_T, S と書き変えると (58) 式は

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_L}\right)^2 - \frac{1}{r} \left(\frac{\sigma_L}{F_L}\right) \left(\frac{\sigma_T}{F_T}\right) + \left(\frac{\sigma_T}{F_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{S}\right)^2 = 1 \quad (59)$$

となる。ここで

$$r \equiv F_L/F_T, \quad s \equiv F_L/S \quad (60)$$

対称軸 LT と角 θ をなす任意の直交座標軸 (x, y) に関する平面応力 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ に対する降伏条件は、それをまず等価な (L, T) 軸に関する応力状態 $(\sigma_L, \sigma_T, \tau_{LT})$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^2 & m^2 & -2lm \\ m^2 & l^2 & 2lm \\ lm & -lm & (l^2 - m^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (61)$$

に直し、これを(59)に入れればよい (第23図)。

ここで $l = \cos \theta$, $m = \sin \theta$ 。

以上で F_L, F_T, S は降伏点としてきたが、引張強さ・剪断強さを取ることもできよう。特に脆性破壊をする材料ではそうとてよいし、他の材料でも近似的には許されよう。引張強さ F_L, F_T は角 $\theta = 0^\circ$ と 90° 試験片の単軸引張試験から求められ、 S は周方向巻きのみをもつ線巻き円筒の捩り試験から求められる。TSAI はガラス繊維とエポキシ樹脂の一方強化材について

第23図

第24図 一方強化材の引張強さ、圧縮強さおよび弾性率 E_x と繊維角 θ との関係実験と理論との比較

一連の実験を行ない上式を検証している。実測より

$$F_L = 105, F_T = 2.8, S = 4.2 \text{ kg/mm}^2$$

をえた。種々の角度 θ に切った試験片の x 軸方向引張試験を行ない第24図を得ている。 σ_x のみの場合の強度則は上式から

$$(F_L/\sigma_x)^2 = l^4 + (s^2 - 1)l^2m^2 + r^2m^4 \quad (62)$$

でこれを同図実線で示してある。

一方において先に3.1で述べた強度則はこの例では

$$\sigma_c = 105/\cos^2 \theta, \quad \sigma_c = 8.4/\sin(2\theta)$$

$$\sigma_c = 2.8/\sin^2 \theta$$

であり、この関係を同図鎖線で示してある。図からわかるように、これらの破壊法則、破壊形式は実験をよく説明する。(62)式はこれらの包絡線状に出ており、下界を与えている。これらの公式では破壊形式は与えられない。

同図中には圧縮強さの実験値も示されているが、比較の実線は、 L, T 方向の圧縮強さ F_L', F_T' を用いた強度則：

$$(F_L'/\sigma_x)^2 = l'^4 + (s'^2 - 1)l'^2m'^2 + r'^2m'^4 \quad (63)$$

を示す。ここで $r' = F_L'/F_T'$, $s' = F_L'/S$ 。実測によって得た $F_L' = 105$, $F_T' = 14$, $S = 4.2 \text{ kg/mm}^2$ (先と同じ) を用いている。圧縮の場合も実験値と公式とはよく一致する。

HOFFMAN の方法⁵²⁾：最近 HOFFMAN は、引張り・圧縮とで強さが違う材料の強度則を、一つの式で表わすことを提案した。それには、(52)式に、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の一次項を含ませて

$$\begin{aligned} & c_1(\sigma_x - \sigma_z)^2 + c_2(\sigma_z - \sigma_x)^2 + c_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ & + c_4\sigma_x + c_5\sigma_y + c_6\sigma_z + c_7\tau_{yz}^2 \\ & + c_8\tau_{zx}^2 + c_9\tau_{xy}^2 = 1 \end{aligned} \quad (64)$$

を使えばよい。9個の c_i は、 X, Y, Z 方向の引張、圧縮とそれらの間の剪断の9個の単純応力に対する強度 $F_{ix}, F_{cx}; F_{iy}, F_{cy}; F_{iz}, F_{cz}; F_{xyz}, F_{yxz}, F_{ixy}$ が与えられれば、つぎのようにきまる。脚符 t, c, s は引張、圧縮、剪断を表わす。

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} [(F_{iy}F_{cy})^{-1} + (F_{iz}F_{cz})^{-1} \\ & - (F_{ix}F_{cx})^{-1}] \\ c_2, c_3 & \text{は上式の } X, Y, Z \text{ の順列を変えたもの。} \\ c_4 &= (F_{ix})^{-1} - (F_{cx})^{-1}, \quad c_5, c_6 \text{ も同様} \\ c_7 &= (F_{yz})^{-2}, \quad c_8, c_9 \text{ も同様} \end{aligned} \quad (65)$$

一方向強化材料の板の場合には、繊維方向 (L) とそれに直角方向 (T) を板面内にとるとき、平面応力 $(\sigma_L, \sigma_T, \tau_{LT})$ に対する強度則として (64), (65) から、次式が導かれる。

$$\frac{\sigma_L^2 - \sigma_L\sigma_T}{F_{iL}F_{cL}} + \frac{\sigma_T^2}{F_{iT}F_{cT}} + \frac{F_{cL} - F_{iL}}{F_{iL}F_{cL}} \sigma_L$$

$$+\frac{F_{cT}-F_{tT}}{F_{tT}F_{cT}}\sigma_T+\frac{\tau_{LT}^2}{F_{sLT}^2}=1 \quad (66)$$

F につけた脚符 t, c, s の意味は前と同じであり、脚符 L, T は対称軸方向 (L, T) を意味する。

(x, y) を (L, T) に対し θ だけ傾いた任意直交座標とし、 xy 座標に関する応力状態 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) を、主方向 (L, T) に関する等価な応力状態 ($\sigma_L, \sigma_T, \tau_{LT}$) に変換する式(61)を式(66)に使うと、この ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) に対する強度則が導かれる。

一方向強化ガラス・エポキシ FRP 板の一例として

$$F_{tL}=110 \text{ kg/mm}^2, F_{cL}=71, F_{tT}=2 \\ F_{cT}=14, F_{sLT}=7 \text{ kg/mm}^2 \quad (67)$$

なる場合の、任意角 θ 方向の引張、圧縮強度を上式から計算し、実験結果と比較したのが第 25 図である。計算では $\sigma_y=\tau_{xy}=0$ とし σ_x の 2 次式が(66)から得られる。それより正負 2 根が求められて正値が引張、負値が圧縮強さを与えるのである。

なお、剪断応力 τ_{xy} のみの場合をしらべて見ると、(61)から

$$\left. \begin{aligned} \sigma_L &= -2lm\tau_{xy}, \tau_T = 2lm\tau_{xy} \\ \tau_{LT} &= (l^2 - m^2)\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

であるのでこれを(66)に入れ

$$\left[\frac{8l^2m^2}{F_{tL}F_{cL}} + \frac{4l^2m^2}{F_{tT}F_{cT}} + \frac{(l^2 - m^2)^2}{F_{sLT}^2} \right] \tau_{xy}^2 \\ + 2lm \left[\frac{F_{tL} - F_{cL}}{F_{tL}F_{cL}} - \frac{F_{tT} - F_{cT}}{F_{tT}F_{cT}} \right] \tau_{xy} = 1 \quad (69)$$

これに上記数値(67)を入れると

$$\left[7.05l^2m^2 + (l^2 - m^2)^2 \right] (\tau_{xy}/F_{sLT})^2 \\ + 6.07lm(\tau_{xy}/F_{sLT}) = 1 \quad (70)$$

$l = \cos\theta, m = \sin\theta$ であり θ の種々の値に対する τ_{xy} を計算すると、この場合にも正負の値を得る。この場合の角 θ は L 軸から x 軸へ anti-clockwise にはかる方向を正としているので、 $\tau_{xy} > 0$ の場合がいわゆる“逆剪断” (inverse shear), $\tau_{xy} < 0$ の場合が“順剪断” (normal shear) に対応する。計算の結果を第 26 図に示す。直交異方性板の剪断にこの 2 種類が存在し、両者の違うことは、既に著者らの研究によって明らかに

第 26 図 順剪断と逆剪断強さ

第 27 図 順剪断と逆剪断の実験と計算
●, ▲……実験値

されているが、本例でも、図示のように方向によって大差のあることは注意を要すると同時に、興味あることである。

植村らもガラス・ロービング・エポキシの一方向巻き FM の強度をしらべており、

$$F_{tL}=F_{cL}=55, F_{tT}=1.5, F_{cT}=8, \\ F_{sLT}=4 \text{ kg/mm}^2 \quad (71)$$

を得ており、振り剪断実験値と比較している。上式(69)と植村ら⁵³⁾の実験とを比較したのが第 27 図である。この場合、逆剪断の方はよく合うが順剪断の場合が非常に違い違うのは、実験の方は座屈を伴うためと考えられる。

いずれにしても荷重の方向が違う強度を、一つの式で計算できるのが HOFFMAN の式の特長であろう。

TSAI の強度則などは、一方向強化材の板を何層か積層して作った積層板の面内荷重に対する強度や破壊様式をしらべるのにも役立つ。 TSAI は直交三層積層板の解析で、理論的にニー現象 (Knee phenomena) の起こる解明と強度計算法を示し、引張破壊強度は実験とよく一致することを見出した。そこでは各層ごとに上述の強度則を適用したのである^{48), 49)}。

なお積層板や直交異方性外板をもった一般の構造では、座屈によって強度を失う可能性をもつ。座屈現象は構造力学の重要な課題であるがここではふれない。

第 25 図 一方向強化材の単純引張りおよび圧縮強さと HOFFMAN の式の比較

第2表 ウィスカース複合材料によるロケット用球形
pressure vessel の軽量化予想

材 料	比 重 r	引張強さ σ_t kg/mm ²	弾性率 E kg/mm ²	比・引張 強 さ σ_t/r kg/mm ²	チタニウム合金製 に対する 他のもの の重量比
1. チタニウム合金 による現在の最 良値	4.7	140	12,000	30	1.00
2. グラスファイバ ー・プラスチック 複合材料による 現在の最良値 重量含有率: グ ラスファイバー 80%, プラスチ ック20%	2.2	100	4,500	45	0.67
3. カーボンウィス カース複合材料	1.7	600	60,000	350	0.09

注: 3. のカーボンウィスカース複合材料の引張強さ 600
kg/mm² は控え目の値

4. 結 論

FRP から FRM や FRR への繊維強化複合材料の
発展の過程を概観し、繊維強化機構と、強化理論、強
度理論を概説したがなお他の力学特性についてもふれ
るべきものが少なくない。FRCM が、現在航空宇宙
工学において果しつつある軽量化と、耐熱性向上への
可能性は今後ますます重要性を増すことであろう。第
2表は、現用の Ti 材料、グラス・エポキシ線巻き材
料と、将来十分の可能性をもって予見されるカーボ
ン・フィラメント線巻き構造によるロケット・チャン
バーの軽量化を示すものである。炭素繊維による線巻
きは、近い将来現在の重量を 1/10 にしてしまう。一
方、FRM 等耐熱材料の開発が急速にすすみつつあり、
この5年後には Jet engine の耐熱部、SST 構造の主
翼胴体構造材、原子力関係耐熱構造材料として実用さ
れる見通しである。強度理論もまた micromechanics
の進歩によってますます精密化されていくことであ
ろう。

文 献

- 1) D. V. RASATO & C. S. GROVE: Filament Winding, Interscience Publisher (1964).
- 2) American Society for Metals 発行: Fiber Composite Materials. (1965).
- 3) L. HOLLIDAY: Composite Materials, Elsevier Publ. Comp. (1966).
- 4) G. S. HOLISTER & C. THOMAS: Fibre Reinforced Materials, Elsevier Publ. Comp. (1966).
- 5) 林毅篇: "軽構造の理論とその応用" 下巻, 第16章, 日科技連出版社 (1966).
- 6) L. J. BROUTMAN & R. H. KROCK: Modern Composite Materials, Addison-Wesley Publ. Comp. (1967).
- 7) R. T. SCHWARTZ and H. S. SCHWARTZ: Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites, Interscience Publisher. (1968).
- 8) L. R. MCCREIGHT, H. W. RAUCH & W. H. SUTTON: Ceramic & Graphite Fibers and Winding (A survey of Technology) Academic Press. (1965).
- 9) S. S. BRENNER, Jour. Appl. Physics. 27, 1484 (1956).
- 10) R. W. JECH, E. P. WEBER & A. D. SCHWOPE, Met. Conf. Vol. II "Reactive Metals" Interscience Pub. (1959), p. 109.
- 11) D. L. McDANIELS, R. W. JECH. & J. W. WEETON, "Metal Progress" 78 (Dec. 1960), 118.
- 12) D. L. McDANIELS, R. W. JECH. & J. W. WEETON, "Stress-Strain Behavior of Tungsten-Fiber-Reinforced Copper Composite" NASA, TN, D-1881 (1963).
- 13) A. KELLY, Proc. Roy. Soc. A 282 (1964), 63.
- 14) A. KELLY & W. R. TYSON "Fiber Strengthened Materials" High Strength Materials, 2nd International Materials Conference (1965) 578, Berkely, Calif. V. F. ZACKAY, ed. John Wiley & Sons. Inc.
- 15) J. W. WEETON & R. A. SIGNORELLI, NASA, TND-3530, (1966).
- 16) A. KELLY & G. J. DAVIES, Met. Rev. 10-37(1965), 1.
- 17) H. L. COX, Brit. J. Appl. Physics, 3 (1952-3), 72.
- 18) T. HAYASHI, Proc. of Symposium on "Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity" in Warsaw (sponsored by IUTAM) (1958) 501.
- 19) 河田, 日本航空学会誌 4, 31 (1956), 197.
- 20) T. HAYASHI, Proc. 5th Inter. Symposium on Space Technology and Science, Tokyo (1963), 683.
- 21) T. HAYASHI, Proc. 4th Inter. Symposium on Space Technology and Science, Tokyo (1962), 156.
- 22) 林, 小山, 近藤: 日本航空学会誌, 15 (1967), 145.
- 23) N. F. DOW, General Electric Company, Mssile and Space Division, Report No. R 63 SD 61 (1963).
- 24) G. A. HORRIDGE, Brit. J. Appl. Phys. 6 (1955), 314.
- 25) D. M. SCHUSTER, & E. SCALA, Trans. Met. Soc. AIME 230 (1965) 1935.
- 26) J. MULLIN, J. M. BERRY & A. GATTI, General Electric Tech. Inf. Series, R 67 SD 51 (1967).
- 27) 林: 応用物理, 31-10 (1962), 808.
- 28) 河田ほか: 第2回宇宙航空工学における FRP シンポジウム報告集 (1967-12), 65.
- 29) S. TIMOSHENKO, "Theory of Elasticity" McGraw-Hill (1936).
- 30) W. R. TYSON & G. J. DAVIES, Brit. J. Appl. Phys. 16-2 (1965), 199.
- 31) E. Z. STOWOLL & T. S. LIU, J. Mech. Phys. Solids, 9-4 (1961), 242.
- 32) A. KELLY & G. J. DAVIES, Met. Rev. 10-37(1965), 1.
- 33) 林: 日本機械学会誌, 71-593 (1968-6).
- 34) 植村ほか2名: 第2回宇宙航空工学における FRP シンポジウム予稿集 (1967-12).
- 35) B. W. ROSEN, AIAA J., 2-11 (1964-11), 1965.
- 36) C. A. BOUC, Proc. 19th Conf. SPI Reinforced Plastics Division (1964), Section 19-G.
- 37) H. T. CORTEN, "Micromechanics and Fracture Behavior of Composites," Chapter 2, "Modern Composite Materials" ed. by L. J. BROUTMAN and R. H. KROCK, Addison-Wesley Publ. Comp. (1967).
- 38) W. D. BASCOM, Proc. 20th Conf. SPI Reinforced Plastics Division (1965), Section 15-B.
- 39) J. T. PAUL Jr. & J. B. THOMPSON, Proc. 20th Conf. SPI Reinforced Plastics Division, (1965),

Section 12-C:

- 40) J. A. KIES, U. S. Naval Research Labo Rep. 5763 (1962).
 - 41) B. W. ROSEN, General Electric Co. M. S. D. Technical Information Series, R 64, SD 80 (1964).
 - 42) 林, 第 4 回応用数学および力学講演会 (昭 24. 7. 24).
 - 43) T. HAYASHI, Joint Meeting of AIAA, Roy. Aero. Soc and Japan Soc. Aero. & Space Sci. (1965-11)
 - 44) T. HAYASHI, On the Shear Instability of Structures caused by Compressive Load Proc. 16. Japan Nat. Congr. App. Mech. (1966), 149.
 - 45) R. L. FOYE, "Compressive Strength of Unidirectional Composites", paper presented at AIAA (1966-1).
 - 46) 牧: 構造用複合材料研究会 (1968-3).
 - 47) R. HILL, The Mathematical Theory of Plasticity (1950), Oxford Univ. Press, London.
 - 48) S. W. TSAI, NASA Report CR-71 (1964).
 - 49) S. W. TSAI, NASA Report CR-224 (1965).
 - 50) S. W. TSAI & V. D. AZZI, AIAA J., 4-2 (1966), 296.
 - 51) S. W. TSAI ほか 2 名, NASA Report CR-620 (1966).
 - 52) O. HOFFMAN, J. Composite Materials, 1-2 (1967), 200.
 - 53) 植村, 山脇: 第 3 回宇宙航空工学における FRP シンポジウム予稿集 (1968-12-5) .
-