響をうけて測定部のプラズマ電位をわずかに変化させるためと考えられる。そしてこの電流の大小や種類(イオンか電子)によってフロート電位のずれの大きさがかわるものと考えられる。しかしこの大きさはわずか(この実験ではつねに静電シールド板の電位を $-6V$ にしたのでそのずれは $0.4V$ 程度)であり、上に述べたイオン電流の不変、電子電流の減少、垂直探針の問題などの考察に対してこの影響を考慮する必要はない。

終わりにこの研究に対し有益な助言をいただいた東京大学教授木村逸郎先生、および実験をとにもおこなってくれた航空学科大学院生鈴木賢次郎君にあつく感謝の意をあらわす。

参考文献

- 1) TALBOT, L.: Theory of the Stagnation-Point LANGMUIR Probe, Phys. Fluids, Vol. 3(1960), p. 289.
- 2) LAM, S.H.: A General Theory for the Flow of Weakly Ionized Gases, AIAA J., Vol. 2(1964), p.

256.

- 3) SU, C.H.: Compressible Plasma Flow over a Biased Body, AIAA J., Vol. 3 (1965), p. 842.
- 4) KIMURA, I. and NEGISHI, N.: A Study on Probe Measurements of Flowing Partially-Ionized High-Density Gases, Journal of the Faculty of Engineering, University of Tokyo (B), Vol. 29 (1968), p. 261.
- 5) 例えば, CAMEL, A.B.: Plasma Physics and Magnetofluidmechanics, McGraw-Hill Inc., New York, (1963).
- 6) 例えば, GUTHRIE, A. and WAKERLING, R.K.: The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields, McGraw-Hill Inc., New York, (1963).
- 7) 木村, 神沢: 高圧プラズマの流れについて, 電磁流体力学シンポジウム講演原稿集(昭和42年度), 東京大学宇宙航空研究所, (1968), p. 167.
- 8) KIVEL, I.: Electron Scattering by Noble Gases in the Limit of Zero Energy, Phys. Rev., Vol. 116 (1959), p. 1484.
- 9) COHEN, A.J.: Anomalous Diffusion in a Plasma Formed from the Exhaust Beam of an Electron-Bombardment Ion Thruster, NASA TN D-4758, (1968).

熱伝達を伴うノズル流*

相原 康彦**・渡辺 泰夫***

Nozzle Flow with Heat Transfer

Yasuhiko AIHARA and Yasuo WATANABE

Abstract

This paper deals with the heat transfer in convergent-divergent nozzles.

A differential equation is derived in order to determine the heat transfer rate as a function of nozzle geometry in the subsonic part, and one dimensional nozzle flow equations including heat transfer and frictional drag are used for the analysis in the supersonic part of nozzles. The validity of these processes rests with some favourable comparisons with measurements.

The results are considered to be useful for the preliminary estimate of high enthalpy supersonic nozzle flow under the influence of heat transfer and frictional drag and the for the design of nozzles of minimum heat transfer.

The need for fundamental knowledge of boundary layer in such internal flow field is increased in order to develop this kind of problem.

1. 序 論

高温の気流が流路を通して運動する際に、壁への熱伝達を少なくすることは、熱損失を少なくすると同時に壁の材料の損耗を避ける上からも重要である。ロケットの内部流において、特にラバル管のスロートにおける熱伝達の増加に関連して、これは空気力学の研究者が解決すべき問題である。

熱伝達は、境界層を通して主流のもつエンタルピーが壁に移る現象であるから、境界層の性質や発達と密接な関係がある。境界層はラバル管内で流量が一定(アブレーションは考えない)である制約の下に発達するので、ラバル管断面の変化、または、ラバル管の形状によってその発達が定まることになる。したがって、熱伝達はラバル管形状に関連していることになり、両者の関係を調べるための研究は実験的にも理論的にも数多くなされている。たとえば、現在実験との比較に最も多く引用されている半実験式である BARTZ の式は、つぎのように表わされる¹⁾。

* 昭和44年4月17日原稿受理

** 東京大学工学部航空学科

*** 航空宇宙技術研究所空気力学第一部

$$C_H = \left[\frac{0.0346 \left(\tilde{\mu}_0^{0.2} C_p \right) \left(\tilde{P}_0 \tilde{q} \right)^{0.8} \left(\tilde{D}_* \right)^{0.1}}{\tilde{D}_*^{0.2} \tilde{P}_r^{8/15}} \right] \times \left(\frac{\tilde{r}_0}{\tilde{l}} \right)^{0.2} \left(\frac{\tilde{r}_*}{\tilde{r}_0} \right)^{0.05} \times \left(\frac{\tilde{A}_*}{\tilde{A}} \right)^{7/8} \varphi$$

ここで、 C_H は熱伝達係数、 $\tilde{D}$ はノズルの直径、 $\tilde{r}$ はノズルの半径、 $\tilde{l}$ はノズル上流のダクトの長さ、 $\tilde{A}$ はノズル断面積、 $\tilde{\mu}$ は粘性係数、 $\tilde{C}_p$ は定圧比熱、 $\tilde{P}$ は圧力、 $\tilde{P}_r$ はプラントル数、 $\tilde{u}$ は流速、 $\tilde{q}$ は重力加速度、 φ は物性の温度による変化の補正項である。添字の、0, * は、それぞれ、ノズル上流の激み点状態、スロートを表わす。また、 $\tilde{r}_e$ は、スロート付近のノズル形状の流れ方向の変化を示す曲率半径である。この BARTZ の式においては、 C_H は $\tilde{A}^{-7/8}$ に比例しているが、ノズルの軸方向の長さに依存していないことは、境界層の発達を考える際に理解し難い感じを受ける。しかしながら、BARTZ の式がかなり良い精度で実験と一致することは事実であり、このような疑問や知識を前提としながら、議論をすすめたい。本論文では、局所的熱伝達とノズルの形状について、BARTZ の式に対応する関係式をまず導く。この妥当性について既存の実験データとの比較を行ない、つぎにスロートにおける局所熱伝達を少なくする見地、ノズル全体としての熱伝達を少なくする見地等からの検討を加える。流れが convergent-divergent ノズルを通過するために、問題が亜音速と超音速の領域にまたがっている。ここでは、便宜上、両領域について別々に議論することにしたい。

この研究の目的は、熱伝達とノズル形状の関係を調べることににより、熱効率の良いノズルを設計するための基礎を導くため、および、特に超音速の高エンタルピ流においては各種の実在気体効果が表われるので、内部流の研究の一環として研究が進められているが、その場合に粘性や熱伝達がどのくらい重要であるかを、あらかじめ調べるためである。

2. 記 号

- A: 超音速ノズル断面積
- a_n : (7) における無次元係数
- B: Δ で無次元化された境界層のエネルギー厚
- b: 温度回復係数
- C_1 : 積分定数
- C_f : 表面摩擦係数
- C_H : 熱伝達係数
- $\tilde{C}_p$: 定圧比熱
- K: $a_1 \pi \tilde{r}_* k / \tilde{m} \tilde{C}_p$
- $\tilde{k}$: 熱伝導係数
- $\tilde{m}$: ノズル内の単位時間当たりの流量
- M: マッハ数

- P_r : プラントル数
- $\tilde{P}$: 総圧
- $\tilde{p}$: 静圧
- $\tilde{q}_w$: 局所的な壁への熱伝達率
- $\tilde{q}_0$: $a_1 k (T_0 - T_w) / \tilde{r}_*$
- $\tilde{r}$: ノズル半径
- $\tilde{S}$: エントロピ
- T: 絶対温度
- $\tilde{u}$: ノズル軸方向の流速
- $\tilde{y}$: ノズルの壁からの垂直距離
- $\tilde{z}$: ノズル軸に沿う長さ
- γ : 比熱比
- $\tilde{\Delta}$: 熱境界層の厚さ
- $\tilde{\delta}$: 速度境界層の厚さ
- $\tilde{\rho}$: 密度
- σ : 円錐型ノズルの半頂角
- ϕ : 境界層のエネルギー厚

次元のある物理量の場合は～をつけて示す。

添字

W: 壁の状態

0: 激み点の状態

1: 主流の状態

*: スロート

M: スロートと超音速ノズル出口の中央の状態

3. 解 析

[A] 亜音速ノズル 文献1,2と同じく、基礎方程式として積分されたエネルギー方程式を用いる。すなわち、

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\tilde{q}_w}{\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1 \tilde{C}_p (T_0 - T_w)} \left[1 + \left(\frac{d\tilde{r}}{d\tilde{z}} \right)^2 \right]^{1/2} - \phi \left[\frac{1}{\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1} \frac{d(\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1)}{d\tilde{z}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{z}} - \frac{1}{T_0 - T_w} \frac{dT_w}{d\tilde{z}} \right] \quad (1)$$

ここで、境界層の厚さは、軸対称ノズルの半径 $\tilde{r}$ に比べて十分に薄いものと考えられている。そこで、流量保存の関係を導入して、

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1 \cdot \pi \tilde{r}^2 = \tilde{m} \quad (2)$$

が得られる。これから、

$$\frac{d(\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1)}{d\tilde{z}} = -\frac{2\tilde{m}}{\pi} \cdot \frac{1}{\tilde{r}^3} \cdot \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{z}} \quad (3)$$

が得られ、(1)の右辺の[]における第1および第2項は $-1/\tilde{r} \cdot d\tilde{r}/d\tilde{z}$ となる。壁の温度 T_w を一様と考えると、(1)は次式のようにになる。

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{z}} \left(\frac{\phi}{\tilde{r}} \right) = \frac{\tilde{u}}{\tilde{m} \tilde{C}_p (T_0 - T_w)} \left(1 + \left(\frac{d\tilde{r}}{d\tilde{z}} \right)^2 \right)^{1/2} \tilde{q}_w \quad (4)$$

ここで、長さをスロートの半径 $\tilde{r}_*$ 、熱伝達率を $\tilde{q}_0$ ($\equiv k(T_0 - T_w)a_1/\tilde{r}_*$, a_1 は(7)を参照) で無次元化す

ると、(4)の無次元化方程式はつぎようになる。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dz} \left(\frac{\phi}{r} \right) = K \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} \dot{q}_w \quad (5)$$

ただし、 $K = a_1 \pi \tilde{r}_* \tilde{k} / \tilde{m} \tilde{C}_p$

(5)は、 $\dot{q}_w$ と ϕ の関係を示すもので、連立させる他の関係式が必要である。それは一般には運動量に関する式でなければならないが、この種の解析においては便宜上つぎのような方法がとられている。すなわち SIBULKIN²⁾ は、壁面上の摩擦力と $\dot{q}_w$ の間に REYNOLDS の類似が成り立つこと、および、 $\dot{q}_w / \tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1 \tilde{C}_p (T_w - T_\infty)$ が平板上の非圧縮乱流境界層と同じく COLBURN の式に従うこと、等を仮定して、(1)から温度境界層の厚さ $\tilde{\Delta}$ を計算した。一方、BARTZ¹⁾ は、本質的には SIBULKIN と同様であるが、COLBURN の式に、物性の温度変化による補正、 $\tilde{\phi}$ と運動量厚の違いによる補正、摩擦力の REYNOLDS 数による変化、等を考慮して(1)から $\tilde{\phi}$ を計算した。ただし、序論で示した BARTZ の式は、その計算結果に基づくというよりも、さらに直観的に導かれたものである。以上のように実験式を用いる場合でも、その是非についての裏付けは乏しい。そこで、ここでは実験式を用いることを避けて議論をすすめたい。

ϕ は定義により、

$$\phi = \Delta \int_0^\infty \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_1} \left(1 - \frac{T_s - T_w}{T_0 - T_w} \right) d \left(\frac{y}{\Delta} \right) \quad (6)$$

ここで、 T_s は境界層内の澁み点温度である。また、 y, Δ は $\tilde{r}_*$ で無次元化された量である。(6)で一般に、

$$\frac{T_s - T_w}{T_0 - T_w} = \sum_n a_n \left(\frac{y}{\Delta} \right)^n \quad (7)$$

とおく。 a_n は、境界条件および予想される分布から適宜決定される。その結果と、

$$y=0 \text{ で } \tilde{r}_* \tilde{q}_0 \dot{q}_w = \left(\tilde{k} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (8)$$

から、

$$\dot{q}_w = 1/\Delta \quad (9)$$

が得られる。さらに、

$$\tilde{\rho} / \tilde{\rho}_1 = T_1 / T \quad (10)$$

から密度分布が得られる。(6)で、 ϕ は主流のマッハ数 M を通して、圧縮性の影響を受ける。主流は断熱等エントロピ流と考えているので、圧縮性の影響は常に $1 + (\gamma - 1) M^2 / 2$ という形で表わされる。今、二原子気体を考えれば $\gamma = 1.4$ となり、 $M = 1$ としても、圧縮性の影響は 20% である。燃焼ガス等の多原子気体では γ が 1 に近いので、超音速における圧縮性の影響はそれほど重要でなく、超音速ノズルに関しては、近似的に $M = 0$ とおくことにする。多くの気体につ

い良い近似で成り立つ $P_r = 1$ を仮定すれば、 $\delta = \Delta$ となり、(6)は

$$\phi = \Delta \cdot B(T_0, T_w) \quad (11)$$

となる。ここで、 B は(6)の積分に対応している。 B は一般には z の関数であるが、燃焼室等に直結する超音速ノズルの境界層は乱流と考えられるので、分布の z 方向の変化は通常重要視されない。速度分布および(7)の分布が乱流型の $1/7$ 乗分布の場合には、 B は $7/72$ となる。この考察は結果として、SIBULKIN らと同じく、運動量の式の代わりに、平板上の非圧縮性乱流境界層の概念を用いたことを意味している。ただし、実験式は用いないで、境界層の温度および速度の分布から壁における熱伝達率 $\dot{q}_w$ と、エネルギー積分 ϕ の両者が結びつけられるという関係を導入して、 $\dot{q}_w$ に関するつぎの方程式を導いた点が異なっている。(9)、(11)を用いて、(5)から $\dot{q}_w$ のみについての微分方程式が得られる。

$$\frac{d\dot{q}_w}{dz} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dz} \dot{q}_w + \frac{K}{B} \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} r^2 \dot{q}_w^3 = 0 \quad (12)$$

この解はつぎようになる。

$$\dot{q}_w = r^{-1} \left\{ \frac{2K}{B} \int_0^z \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} dz + C_1 \right\}^{-1/2} \quad (13)$$

ここで、 C_1 は積分定数であり、 $z=0$ における $\dot{q}_w$ が与えられた場合に決定する。

[B] 超音速ノズル 超音速ノズルについて用いたエネルギー方程式は、超音速についても成り立つが、[A]と同様の計算は、圧縮性の影響についての複雑な関係や超音速における乱流境界層についての一層不十分な知識を用いることなしには解析がすすめられない。超音速ノズルについては、境界層方程式を議論するよりも、SHAPIRO³⁾ が導いた非断熱、非等エントロピのノズル流の方程式から熱伝達を論ずる方が容易であり、境界層の知識を応用する場合も単に付加項にあてはめるだけである。

SHAPIRO は、熱伝達や粘性抵抗のある場合の一次元ノズル流についての基礎方程式をつぎのように与えている。

連続方程式

$$\tilde{m} = \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{A} \quad (14)$$

運動量の方程式

$$\frac{\gamma M^2}{2} \frac{d\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2} + \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}} + \frac{\gamma C_f M^2 d\tilde{x}}{\tilde{r}} = 0 \quad (15)$$

エネルギー方程式

$$\frac{dT}{T} + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{d\tilde{u}^2}{\tilde{u}^2} - \frac{d\tilde{q}}{\tilde{C}_p T} = 0 \quad (16)$$

状態方程式

$$\frac{d\bar{p}}{\bar{p}} = \frac{d\bar{\rho}}{\bar{\rho}} + \frac{dT}{T} \quad (17)$$

熱力学第二法則

$$\frac{d\bar{S}}{\bar{C}_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} \quad (18)$$

ここで、気体は完全気体と考えられている。(16)の左辺第三項の $d\bar{q}$ は系が単位時間に単位質量あたりに外系と交換する熱量で、正の場合には系のエネルギーが増加するように定義されている。上に導いた諸式と、マッハ数 M の定義から得られる

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{d\bar{u}^2}{\bar{u}^2} - \frac{dT}{T} \quad (19)$$

を用いて、ノズル流における物理量の変化はつぎのように記述できる。

$$\begin{aligned} \frac{dM^2}{M^2} = & -\frac{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} \frac{d\bar{A}}{\bar{A}} \\ & + \frac{(1+\gamma M^2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} \frac{dT_0}{T_0} \\ & + \frac{\gamma M^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} \frac{2C_f d\bar{z}}{\bar{r}} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{dT_0}{T_0} = \left[\frac{T_w}{T_0} - 1 + \frac{(1-b)(\gamma-1)M^2/2}{1+(\gamma-1)M^2/2} \right] \frac{C_f d\bar{z}}{\bar{r}} \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{p}_0}{\bar{p}_0} = -\frac{\gamma-1}{2} M^2 \left(\frac{dT_0}{T_0} + \frac{2C_f d\bar{z}}{\bar{r}} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\bar{p}}{\bar{p}_*} = \frac{\bar{A}_*}{\bar{A}} \frac{1}{M} \left(\frac{(\gamma+1)/2}{1+(\gamma-1)M^2/2} \right)^{1/2} \left(\frac{T_0}{T_{0*}} \right)^{1/2} \quad (23)$$

$$\frac{T}{T_*} = \frac{T_0}{T_{0*}} \frac{\gamma+1/2}{1+(\gamma-1)M^2/2} \quad (24)$$

これらの式において、 $\bar{A}$ または $\bar{r}$, C_f , b および T_w が与えられれば、数値計算が出来る。ここで、 b は回復係数で、つぎのように定義される。

$$b = \frac{T_{aw} - T}{\bar{u}^2/2\bar{C}_p} \quad (25)$$

つぎに、熱伝達率についての取り扱いがつぎのようにする。壁に対する熱流は、系の熱損失と考えて、熱力学の第一法則から $d\bar{q} = \bar{C}_p dT_0$ となる。流量は $\dot{m}$ であるから、 $d\bar{z}$ の幅で壁に対する熱伝達率はつぎの等式で表わされる。

$$\dot{m} \bar{C}_p dT_0 = C_H 2\pi \bar{r} (T_w - T_{aw}) d\bar{z} \quad (26)$$

ここで、REYNOLDS の類似

$$C_H/\bar{C}_p \bar{r} \bar{u} = C_f/2 \quad (27)$$

を導入すれば、(21), (25), (26) および (27) から、

$$\begin{aligned} \tilde{q}_w &= \frac{\dot{m} \bar{C}_p dT_0}{2\pi \bar{r} d\bar{z}} \\ &= \frac{\dot{m} \bar{C}_p C_f}{2\pi} \cdot T_0 \cdot \left[\frac{T_w}{T_0} - 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-b)(\gamma-1)M^2/2}{1+(\gamma-1)M^2/2} \right] \frac{1}{\bar{r}^2} \end{aligned} \quad (28)$$

が得られる。

4. 結果と検討

亜音速ノズルについての(13)式の妥当性を検討するために、第1,2図において、実験値との比較を行なった。実験は NASA で行なわれたもので、作動気体として約 540°K に加熱された空気を用いている⁴⁾(図で、縦軸は無次元、横軸は実際の長さで示されている)。(13)式では C_1 が未定なので、それぞれの実験において最も上流側のデータから C_1 を決定した。その結果、計算結果と実験結果の一致は満足すべき程度であることがわかる*。

第1図 亜音速ノズルの熱伝達

第2図 亜音速ノズルの熱伝達

* ここで $a_1=4$ とおいた。この数値は全く任意であるが、重要なことは一定の a_1 について実験値と計算結果がどの程度一致するかである。これは乱流境界層についての仮定を検討する手掛りとなるからである。

ここで、BARTZ の式による計算結果がどの程度実験値と一致するかも同図からわかる。BARTZ の式で何故 C_1 に相当する未定値がないのかは、同式(序論参照)を検討するとわかる。すなわち、 C_H はノズル上流のダクトの長さ $\tilde{l}$ の -0.2 乗に比例しており、このような形 (COLBURN によれば、平板前縁から $\tilde{l}$ の位置における乱流熱伝達率は $\tilde{l}^{-0.2}$ に比例する) で C_1 に相当する熱伝達率 $\dot{q}_{w0}$ を仮定していることになっている。BARTZ の式が応用される実際のロケット・ノズルにおいては、convergent 部分も divergent 部分も大部分が円錐状である場合が多い。そこで(12)式において、 $dr/dz = \text{const.}$ とし、 $\dot{q}_w = ar^n$ という関係を仮定して計算すると、 a と n はそれぞれつぎのように得られる。

$$a = \left\{ -\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dz} \right)}{\frac{K}{B} \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\}^{1/2}$$

$$n = -3/2$$

一方 BARTZ の式においては $\dot{q}_w \propto r^{-7/4}$ なので、上の計算と比較して円錐状亜音速ノズルに関して BARTZ の式が良い近似式であり得ることが理解できる。しかしながら、一般的に BARTZ の式が妥当であるという保証はない。

一方、超音速ノズルについて得られた(28)式については、つぎのような場合を考える。すなわち、 T_w が T_0 に比べて十分に小さく、 b が1に十分近い場合には、近似的に、 $\dot{q}_w \propto \tilde{r}^{-2}$ となる。乱流境界層においては REYNOLDS 数の広い範囲にわたって $b=0.9$ であることが実験的に知られている。その他、壁への熱伝達によって気体の熱容量 $\tilde{m}\tilde{C}_p T_0$ が著しく変化しなければ、上記の近似が成り立つ。(28)式の絶対値の比較を行なうには、亜音速ノズルにおける経過等から T_0 の初期値を推定したり、 C_f の推定をしたりする必要がある、あいまいな要素が多いので、ここでは $\dot{q}_w$ の r への依存性のみを検討するととどめたい。第3図は、いくつかの既存の実験値^{5),6)} との比較を行なったものである。基準の熱伝達率 $\dot{q}_{WM}$ として、超音速ノ

第3図 超音速ノズルの熱伝達

ズルのスロートと出口のほぼ中央における半径 $\tilde{r}_M$ における値を用いることとし、 $\tilde{q}_w$ と $\tilde{r}$ をそれぞれ $\dot{q}_{WM}$ と $\tilde{r}_M$ で無次元化して、各実験値を同図に記入してある。計算値として、 $\dot{q}_w \propto \tilde{r}^{-2}$ および BARTZ の式で φ の補正を省略した場合の $\dot{q}_w \propto \tilde{r}^{-7/4}$ を記入すると、 $\dot{q}_w$ の $\tilde{r}$ への依存性は以上の粗い近似で得た結果でも、実験値との対応がかなり良好であることが認められる。

(20)~(22)から、粘性抵抗と熱伝達を伴う内部流のマッハ数 M 、激み点温度 T_0 、および激み点圧力 $\tilde{P}_0$ の分布が計算される。高エンタルピー超音速ノズル流の実験的研究が航空宇宙技術研究所空気力学第一部で行なわれており、そのためのノズル(第13図参照)の形状その他について計算を実行した結果を第4~12図に示す。ここで、 $T_w/T_0 \ll 1$ という近似がなされている。作動気体として窒素を用い、亜音速ノズルの上流の settling chamber で $\tilde{P}_0 = 1 \text{ ata}$ 、 $T_0 = 6,000^\circ\text{K}$ であると、熱力学的平衡状態で $\gamma = 1.18$ となる。反応が凍結されたと見なして、 γ はこの値を用いることにする。また、作動気体としてアルゴンを用いる場合には、同様に $\tilde{P}_0 = 1 \text{ ata}$ 、 $T_0 = 6,500^\circ\text{K}$ として、スロートの下流では $\gamma = 1.667$ を用いる。第13図からわかるように、実験に用いるノズルは超音速部分は半頂角 σ が 2.3° の円錐状である。第4~12図において $\tilde{z}_*$ は、半頂角 σ の円錐の頂点からスロートに相当する位置までの距離を示す。したがって、 $\tilde{z}/\tilde{z}_* = 1$ がスロートを表わし、1以上の部分が divergent 部となる。 $\sigma = 5^\circ$ についての計算は、開き角を大きくすることの効果を定量的に示すもので、熱伝達の少ないノズルの形状を決める場合の参考になるであろう。

第4~6図はノズル軸方向の M 分布である。ここで、 C_f として 0.001 と 0.003 を用いた。この数値は、 $\tilde{z}$ を特性長さとして選んだ REYNOLDS 数が 10^6 程度である場合に、ほぼ層流および乱流の C_f であると考えられるものである。 $C_f = 0$ は、REYNOLDS の類似から、 $C_H = 0$ でもあり、したがって断熱等エントロピのノズル流に相当する。第4,5図から、 γ が小さい方

第4図 円錐型超音速ノズルのマッハ数分布
 $\sigma = 2.3^\circ$, $\gamma = 1.18$

第5図 円錐型超音速ノズルのマッハ数分布
 $\sigma = 2.3^\circ$, $\gamma = 1.667$

第6図 円錐型超音速ノズルのマッハ数分布
 $\sigma = 5^\circ$, $\gamma = 1.667$

が熱伝達や粘性の影響が少ないことがわかる。また、 C_f が大きい方が等エントロピ流からのずれが大きいことは予想されることである。ここで、 b が 0.8 よりも 1 の場合、すなわち熱損失が大きい場合に M の値が等エントロピ流に近い理由は、気流の温度の減少が著しく、したがって音速が低くなって、 M としては大きいという結果となったものと解釈される (第5, 6図)。第5, 6図をみて、 σ が大きい方が同じ z/z_* について熱伝達や粘性の影響が小さいことがわかるが、これは両者とも散逸過程で影響を及ぼすものであることを考えれば当然である。定量的には、 b における 1 と 0.8 の違いよりも、 C_f における 0.001 と 0.003 の違いが、結果に著しい影響を持つことがわかる。熱伝達や粘性の影響により M はある値以上には達し得ないこともわかる。第7~9図は、第4~6図にそれぞれ対応する澱み点温度 T_0 の軸方向の分布である。定性的に M についてと同様な傾向が認められる。ここで、 T_0/T_{0*} が 1 からずれた分はスロートからその軸上の位置にいたるまでに流体が失った熱量に相当している。特に、第8図ではそのずれが顕著であるが、このような場合には、 $T_w/T_0 \ll 1$ という近似が成り立つ範囲がスロートの付近に限られるであろう。 M の場合

第7図 円錐型超音速ノズルの澱み点温度分布
 $\sigma = 2.3^\circ$, $\gamma = 1.18$

第8図 円錐型超音速ノズルの澱み点温度分布
 $\sigma = 2.3^\circ$, $\gamma = 1.667$

第9図 円錐型超音速ノズルの澱み点温度分布
 $\sigma = 5^\circ$, $\gamma = 1.667$

と異なる特徴は、当然であるが、 $b=1$ の場合の方が 0.8 の場合よりも断熱等エントロピ流からのずれが大きいことである。

第10~12図は、第4~6図 (したがって、第7~9図) にそれぞれ対応する澱み点圧力の軸方向の分布である。 $\bar{P}_0/\bar{P}_{0*}$ が常に 1 であるのは断熱等エントロピ流に相当し、1 からのずれは熱伝達と粘性による澱み点圧力の損失である。第10, 11図の比較から γ が小さい方が損失が少ないこと、第11, 12図の比較から σ が大きい方が損失が少ないこと、および $C_f=0.001$ と 0.003 の違いの方が、 $b=0.8$ と 1 の違いよりも結果

第10図 円錐型超音速ノズルの滞り点圧力分布
 $\sigma=2.3^\circ$, $\gamma=1.18$

第11図 円錐型超音速ノズルの滞り点圧力分布
 $\sigma=2.3^\circ$, $\gamma=1.667$

第12図 円錐型超音速ノズルの滞り点圧力分布
 $\sigma=5^\circ$, $\gamma=1.667$

第14図 高エンタルピ超音速室素流のノズル内静圧分布

への影響が大きいこと、などがわかる。

第13図は、現在航技研で行なわれている高エンタルピの超音速ノズル流の研究のためのノズルである。軸方向の物理量の変化を測定するために、静圧測定孔と気流の発光を分光器で観測するための観測孔が設けられている。作動気体として窒素を用いた同ノズルの静圧分布の測定結果と、計算結果を第14図に示す。この場合、熱伝達と粘性の静圧分布におよぼす影響が小さいことが計算からわかるが、実験結果もほぼこれを裏付けている。このノズルにおける種々の物理量の測定は現在続行中である。

最後に、この論文で調べた熱伝達とノズルの形状の関係をjを用いて、熱損失の少ないノズルの形状を論じてみたい。まず、亜音速部分について(13)式を応用する。亜音速ノズルの軸の無次元長さを L とすれば、スロートにおける熱伝達率は、

$$\dot{q}_{w*} = \left\{ \frac{2K}{B} \int_0^L \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} dz + C_1 \right\}^{-1/2}$$

となる。したがって、 $\dot{q}_{w*}$ を小にするためには、右辺

第13図 高エンタルピ超音速流実験用ノズル

の積分を大きくすればよい。ところでこの積分は、ノズルの壁に沿う、ノズルの入り口からスロートまでの長さを表わしているの、なるべく湾曲した分布のノズル形状が望ましいことがわかる。一方、亜音速部全体としての熱損失は、

$$\begin{aligned} & \int_0^L \dot{q}_w \cdot 2\pi r \sqrt{1 + (dr/dz)^2} dz \\ &= \int_0^L \frac{2\pi \sqrt{1 + (dr/dz)^2} dz}{\left[2K \int_0^z \sqrt{1 + (dr/dz)^2} dz / B + C_1 \right]^{1/2}} \\ &= \frac{2\pi B}{K} \left\{ \left[\frac{2K}{B} \int_0^L \sqrt{1 + (dr/dz)^2} dz + C_1 \right]^{1/2} - C_1^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

となり、これを少なくするためには、 $\dot{q}_w$ の場合には大きくすべき積分を小さくすることが要求される。すなわち、亜音速部全体としての熱損失を少なくするためのノズル形状は円錐形である。

つぎに超音速部分について (28) 式を考えることとし、ふたたび、 $T_w/T_0 \ll 1$, $b=1$ という場合を想定すれば、すでに得られたように $\dot{q}_w \propto r^{-2}$ となり、実験的にもほぼこの関係が成り立っている。したがって、局所的な熱伝達率も、超音速部分全体としての熱損失も、 r が大きいノズルほど小さいことが直ちにわかる。すなわち、ノズルの形状としてはスロートから急に拡大された形状が望ましい。ただし、この結論は一次元気体力学を根拠としており、実際はもし急な流れの膨張を行なえば、PRANDTL-MEYER の関係からわかるように、局所的なマッハ数が大きくなり、ノズル出口におけるマッハ数を越える可能性をもたらす。その場合には、ノズル内で再圧縮が避けられず、壁面上の境界層は逆圧力勾配力のために剥離や遷移を生ずるであろう。したがってこのようなことのない範囲で r を大きくとるべきである。

以上を総合して、ノズル形状としては、亜音速部分は総じて円錐形とし、スロートの近辺では丸味を持たせ、超音速部分では、ノズル内での再圧縮がない程度に急に広げるのがよいことになる。

5. 結 論

熱伝達と粘性の影響を考慮した亜音速と超音速のノズル流についての計算からつぎの結論が得られた。

第15図 熱損失を少なくする見地からのノズル形状 (概念図)

1. 境界層のエネルギー積分方程式から、亜音速ノズルについての熱伝達率に関する微分方程式が得られた。その解は、ノズル入り口の熱伝達率と与えられれば、実験値と良好な一致を示す。また、BARTZ による半実験公式についての検討も同式を用いてすることが出来る。

2. 超音速ノズルについては、局所的熱伝達率はほぼ断面の半径の自乗の逆数に比例する。このような熱伝達や粘性のために、マッハ数、激み点温度や圧力は、断熱等ポテンシャル流の場合よりも低下する。その場合には、温度回復係数における 1 と 0.8 の違いよりも、表面摩擦係数における 0.001 と 0.003 の違いの方が結果への影響が著しい。したがって、境界層を層流に保つことが効率の良いノズルのために肝要である。

3. 熱損失の少ないノズルの形状についての考察がなされ形状が提案された。

4. この論文の過程でなされた乱流境界層についての仮定は、平板境界層における従来の知識に基づいている。ノズル流自体における基礎的な知識が要求される。また、高エンタルピ超音速ノズル流については、実在気体効果を取り入れなければならず問題は複雑になるが、この論文の延長として将来手掛けていきたい。

この論文の作成にあたり、実験や作図等で、航空宇宙技術研究所空気力学第一部の平林則明技官と小山久夫君の御協力を得たことを付記して、厚く感謝する次第である。

参考文献

- 1) BARTZ, D.R.: Turbulent Boundary-Layer Heat Transfer from Rapidly Accelerating Flow of Rocket Combustion Gases and of Heated Air, Advances in Heat Transfer, New York, Academic Press (1966).
- 2) SIBULKIN, M.: Heat Transfer to an Incompressible Turbulent Boundary Layer and Estimation of Heat Transfer Coefficients at Supersonic Nozzle Throats, J. Aeron. Sci. 23(2), pp. 162-172 (1956).
- 3) SHAPIRO, A.H., and HAWTHORNE, W.R.: The Mechanics and Thermodynamics of Steady One-Dimensional Gas Flow, J. Appl. Mech., 69, pp. A-317-A-336 (1947).
- 4) BOLDMAN, C.R., NEUMANN, H.E. and SCHMIDT, J.F.: Heat Transfer in 30° and 60° Half-Angle of Convergence Nozzles with Various Diameter Uncooled Pipe Inlets, NASA TN D-4177 (1967).
- 5) BACK, L.H., MASSIER, P.F. and GIER, H.L.: Convective Heat Transfer in a Convergent-Divergent Nozzle, Intern. J. Heat Mass Transfer, 7(5), pp. 549-568 (1964).
- 6) 五代富文, 湯沢克宜, 伊藤克弥, 西村久男: 固体ロケットモータのノズルにおける熱伝達の実験的研究—プロペラント内へ添加されたアルミニウムの影響—, 航技研報告 TR-147 (1968).