ただし

$$M_{i,i} = M_i + 1/4 M_{i,i+1},$$

$$M_{i+1,i+1} = M_{i+1} + 1/4 M_{i,i+1}$$

$$(i=1, 3, 5, \dots, 2n-1)$$

$[C_h]$ は空気力マトリックスで次式で表わされる。

$$[C_h] = \pi \cos A \begin{pmatrix} \left(\frac{b_1}{b_r}\right)^2 \left(\frac{\Delta y_1}{s}\right) [C_h]_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{b_3}{b_r}\right)^2 \left(\frac{\Delta y_3}{s}\right) [C_h]_3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \left(\frac{b_{2n-1}}{b_r}\right)^2 \left(\frac{\Delta y_{2n-1}}{s}\right) [C_h]_{2n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{ただし } [C_h]_i = \begin{bmatrix} 1 & -b_i/c_i \\ 0 & b_i/c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{L}_h)_i & (\bar{L}_a)_i \\ (\bar{M}_h)_i & (\bar{M}_a)_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_i/c_i & b_i/c_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_h = L_h$$

$$\bar{L}_a = L_a - L_h (1/2 + a)$$

$$\bar{M}_h = M_h - L_h (1/2 + a)$$

$$\bar{M}_a = M_a - (L_h + M_h) (1/2 + a) + L_h (1/2 + a)^2$$

フラッタ方程式を解くことによりモード形および固有値が得られて、得られた固有値 $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ よりフラッタ振動数およびフラッタ速度が求められる。

L_h, L_a, M_h および M_a は非圧縮性の非定常二次元線型理論に基づく空力微係数⁹⁾で、フラッタ速度計算はこれらの微係数に対して文献9の数表を用いて航空宇宙技術研究所の計算型電子計算機を使用して行なった。

参考文献

- 1) Charles L. RUHLIN and Robert W. BOSWINKLE, Jr.: NACA RM L 57 E 23, July, 1957.
- 2) John L. SEWALL, Robert W. HERR and William B. IGOE: NASA TN D-178, March, 1960.
- 3) 中井暎一, 小原英, 島海良三, 安藤泰勝: 航空宇宙技術研究所資料 NAL TM-14, 1963年3月
- 4) 中井暎一, 高木俊朗, 安藤泰勝: 日本航空学会誌, 第14巻, 第145号, 1966年2月
- 5) 中井暎一, 橋爪宏, 中村泰治: 航空宇宙技術研究所報告 NAL TR-5, 1960年12月
- 6) 中井暎一, 橋爪宏, 高木俊朗, 安藤泰勝: 航空宇宙技術研究所資料 NAL TM-16, 1963年4月
- 7) William P. RODDEN: I. A. S., S. M. F. Fund Paper No. FF-23, May, 1959.
- 8) T. TEODORSEN: NACA Report 496, 1934.
- 9) B. SMILG and L. S. WASSERMAN: Air Force Technical Report 4798, July 1942.

円筒殻の超音速パネルフラッターの非線形解析*

松崎雄嗣**・小林繁夫***

Nonlinear Analysis of Supersonic Panel Flutter of Circular Cylindrical Shells

Yuji MATSUZAKI and Shigeo KOBAYASHI

Abstract

The nonlinear theoretical analysis of supersonic panel flutter of circular cylindrical shells is performed in order to compare with the authors' experimental results, which could not be explained by the linear analysis. The nonlinear

governing equation is solved approximately with the aid of the methods of averaging and numerical integration. The method of averaging is used in order to obtain the solutions of the steady-state vibration and examine its stability for small disturbances. The results of the numerical integration indicate that the calculated values of amplitudes, frequency and phase difference for the circumferential wave number which was observed in the experiment agree well with those obtained from the experiment. They also indicate that the flutter occurs for finite

* 昭和44年4月9日, 年会講演会において発表. 昭和44年9月19日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所, 本研究は東京大学大学院工学系研究科航空学専門課程在学中に行なったものである。

*** 東京大学工学部航空学科

disturbances in a certain region below the minimum value of the critical dynamic pressure predicted by the linear theory. The nonlinear theoretical analysis provides a good explanation for the experimental results both qualitatively and quantitatively.

1. 序 論

円筒殻の超音速パネルフラッターの研究の歴史的概説は著者らの前論文¹⁴⁾の序論に述べたので省略する。著者らは、実験結果を検討するためにはフラッター領域での振動特性を明らかにする必要があると考え、その目的で非線形解析を開始した。最初の研究報告は文献11)に記してあるが、その研究の過程で、円筒殻の非線形振動特性に関する従来の結論を訂正する必要があることを明かにし、さらに理論と実験との比較によって softening 型の非線形振動特性を持つことを確認した^{12), 13)}。

著者らの前論文¹⁴⁾に述べたように、著者らの行なった実験ならびに FUNG^{13), 4)}の実験結果を線形の解析結果と比較するとつぎの結論が得られる。実験で得られたフラッター限界値は線形の解析結果にかなり良く一致するが、フラッターモードの周方向波数および振動数は全く一致せず、実験で得られているフラッター振動数は、線形の解析で得られているどの周方向波数での振動数よりも低い。実験では、フラッター限界値からの振幅の増加は著しく、板厚の4~5倍に達している。以上の結論と先に述べた円筒殻の複雑な非線形振動特性を考え合わせると、フラッター特性を調べるためには、非線形解析が必要であることが明確になった。

著者らが非線形解析を進めている間に、EVENSEN and OLSON による非線形解析の論文^{7), 9)}が発表され、線形のフラッター限界値より低い動圧においても、フラッターの定常振動解 (limit cycle) が存在し、また OLSON and FUNG の実験⁴⁾で得られた周方向に移動 (travel) するフラッターの存在することが理論的に明らかにされたが、実験結果を定量的に説明するところまでは到達していない。

本論文は、非線形解析を行なうことによって著者らの実験結果を理論的に明らかにすることを主眼として、平均法ならびに数値積分法を用いて解析を行なった。新しい試みとして、平均法を拡張して定常振動解の微小擾乱に対する安定・不安定まで論じている。

2. 基礎方程式

有限変形理論における円筒殻の DONNELL 型の平衡方程式と適合条件式は¹²⁾,

第1図 座標と記号

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \Delta \Delta w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{P_a}{h} = 0 \quad (1) \\ \Delta \Delta F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

である。ここで、 P_a は空気力、 F は

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

なる応力関数である。空気力には2次元準定常空気力

$$P_a = \frac{2q}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{1}{U} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (4)$$

を用いることにする。ここで、 q は動圧

$$q = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (5)$$

である。境界条件は

$$w = 0 \quad (6.1)$$

$$x = 0, l: \quad M_x = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (6.2)$$

$$T_x = 0 \quad (6.3)$$

$$v = 0 \quad (6.4)$$

の場合を考える。振動波形は、軸方向に曲げの1次と2次のモードの2項近似を行ない、境界条件(6.1)式および周方向の変位の一価連続条件を満たすように仮定する¹²⁾。

$$\begin{aligned} w(x, y, t) \\ = \left[w_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + w_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} \right] \cos \frac{n y}{R} \\ - \frac{n^2}{4R} \left[w_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + w_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} \right]^2 \quad (7) \end{aligned}$$

ここでは、著者らの行なった軸方向に継ぎ目のある円筒殻の実験結果と比較することを目的としているので、継ぎ目のない円筒殻の場合に考えられる周方向の travelling wave については考慮しないことにする。(7)式は周方向の変位の一価連続条件を満たすために付け加えられた2乗の項のために、(6.2)式を満たしていないが、 w_1, w_2 が十分小さくなり、第1項に対して第2項を省略出来るときは、(6.2)式を満たすことになる。

(7) 式を (2) 式に代入して, F を求めると

$$\begin{aligned}
 F = & -EK^2 \left\{ \left[\frac{w_1^2 + 4w_2^2}{32K^4} + \frac{1}{4} w_1 w_2 \left(\frac{9}{(1+4K^2)^2} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{(9+4K^2)^2} \cos \frac{3\pi x}{l} \right) \right] \cos \frac{2\pi y}{R} \right. \\
 & + \frac{n^2}{R} \left\{ \frac{w_1}{(1+K^2)^2} \left[\left(\frac{R}{n^2} \right)^2 - \frac{1}{4} (w_1^2 + 5w_2^2) \right] \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{w_2}{(4+K^2)^2} \left[4 \left(\frac{R}{n^2} \right)^2 - \frac{1}{4} (5w_1^2 + 4w_2^2) \right] \sin \frac{2\pi x}{l} \right. \\
 & + \frac{1}{8} \frac{w_1}{(9+K^2)^2} (2w_1^2 - 9w_2^2) \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{11}{8} \frac{w_1^2 w_2}{(16+K^2)^2} \sin \frac{4\pi x}{l} + \frac{17}{8} \frac{w_1 w_2^2}{(25+K^2)^2} \sin \frac{5\pi x}{l} \\
 & \left. \left. + \frac{w_2^3}{(36+K^2)^2} \sin \frac{6\pi x}{l} \right\} \cos \frac{n y}{R} \right\} + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_x y^2 + \bar{\sigma}_y x^2 - \bar{\tau}_{xy} xy)
 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで

$$K = \frac{n l}{\pi R} \quad (9)$$

である. さらに周方向の変位の一価連続条件より

$$\bar{\sigma}_y = \nu \bar{\sigma}_x \quad (10)$$

が得られ, 境界条件 (6.3), (6.4) 式より

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\tau}_{xy} = 0 \quad (11)$$

が求まるが, このとき, 境界条件 (6.3), (6.4) 式は周方向に平均的にのみ満たされている. すなわち

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi R} [T_x]_{x=0, l} dy = 0, \\ \int_0^{2\pi R} [v]_{x=0, l} dy = 0 \end{cases} \quad (12)$$

ところで, (7) 式は境界条件 (6.2) 式を満たしていないので, 著者らの非線形振動解析¹²⁾と同様に, (1) 式の代わりに HAMILTON の原理

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_0}^{t_1} [T^*(\dot{w}) - U^*(u, v, w) + W^*(w)] dt \\
 = 0
 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, U^* , T^* はそれぞれ歪みエネルギー, 運動エネルギー, および

$$\delta W^* = \int_0^l \int_0^{2\pi R} (-P_x) \delta w dy dx \quad (14)$$

を用いて,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\omega_0^2} \left(\ddot{W}_1 + \frac{1}{8} \varepsilon \alpha_{11} \right) + \frac{\gamma}{\omega_0} \left(\dot{W}_1 + \frac{1}{8} \varepsilon \alpha_{12} \right) - \frac{8}{3} Q \left(W_2 + \frac{1}{5} \varepsilon \alpha_{13} \right) \\
 + (I_{10} + I_{11} W_1^2 + I_{12} W_2^2 + I_{13} W_1^4 + I_{14} W_1^2 W_2^2 + I_{15} W_2^4) W_1 = 0
 \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\omega_0^2} \left(\ddot{W}_2 + \frac{1}{8} \varepsilon \alpha_{21} \right) + \frac{\gamma}{\omega_0} \left(\dot{W}_2 + \frac{1}{8} \varepsilon \alpha_{22} \right) + \frac{8}{3} Q \left(W_1 + \frac{1}{5} \varepsilon \alpha_{23} \right) \\
 + (I_{20} + I_{21} W_1^2 + I_{22} W_2^2 + I_{23} W_1^4 + I_{24} W_1^2 W_2^2 + I_{25} W_2^4) W_2 = 0
 \end{aligned} \quad (15.2)$$

を得る. ここで $\dot{}$ は時間 t による微分を表わしており, また

$$\begin{cases} \alpha_{11} = (3W_1^2 + 2W_2^2) \ddot{W}_1 + 4W_1 W_2 \ddot{W}_2 \\ \quad + W_1 (3\dot{W}_1^2 + 2\dot{W}_2^2) + 4W_2 \dot{W}_1 \dot{W}_2 \\ \alpha_{12} = (3W_1^2 + 2W_2^2) \dot{W}_1 + 4W_1 W_2 \dot{W}_2 \\ \alpha_{13} = W_2 \left(W_1^2 + \frac{4}{7} W_2^2 \right) \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}: \alpha_{11}, \alpha_{12} \text{ において} \\ \quad W_1 \rightarrow W_2, W_2 \rightarrow W_1 \\ \alpha_{23} = W_1 \left(W_1^2 + \frac{4}{7} W_2^2 \right) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} I_{10} = (1+K^2)^2 + \frac{\alpha}{(1+K^2)^2} \\ I_{20} = (4+K^2)^2 + \frac{16\alpha}{(4+K^2)^2} \end{cases} \quad (17)$$

$$I_{ij} = \frac{3}{4} (1-\nu^2) K^4 \bar{I}_{ij} \quad (18)$$

$$\bar{I}_{11} = \frac{1}{K^4} - \frac{16}{(1+K^2)^2} + \frac{4\varepsilon}{3(1-\nu^2)K^4}$$

$$\begin{cases} \bar{I}_{12} = \bar{I}_{21} = \frac{4}{K^4} + \frac{81}{(1+4K^2)^2} + \frac{1}{(9+4K^2)^2} \\ \quad - \frac{40}{(1+K^2)^2} - \frac{160}{(4+K^2)^2} + \frac{41\varepsilon}{3(1-\nu^2)K^2} \\ \bar{I}_{22} = 16 \left\{ \frac{1}{K^4} - \frac{16}{(4+K^2)^2} + \frac{4\varepsilon}{3(1-\nu^2)K^4} \right\} \\ \bar{I}_{13} = 3\varepsilon \left\{ \frac{1}{(1+K^2)^2} + \frac{1}{(9+K^2)^2} \right\} \\ \bar{I}_{14} = 2\varepsilon \left\{ \frac{10}{(1+K^2)^2} + \frac{25}{(4+K^2)^2} - \frac{9}{(9+K^2)^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{121}{4(16+K^2)^2} \right\} \\ \bar{I}_{15} = \varepsilon \left\{ \frac{25}{(1+K^2)^2} + \frac{40}{(4+K^2)^2} + \frac{81}{4(9+K^2)^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{289}{4(25+K^2)^2} \right\} \\ \bar{I}_{23} = \frac{1}{2} \bar{I}_{14} \\ \bar{I}_{24} = 2 \bar{I}_{15} \\ \bar{I}_{25} = 48\varepsilon \left\{ \frac{1}{(4+K^2)^2} + \frac{1}{(36+K^2)^2} \right\} \end{cases} \quad (18')$$

$$Q = \frac{2q}{\sqrt{M^2-1}} \frac{l^3}{D\pi^4} \quad (19)$$

$$\gamma_c = \frac{M^2-2}{M^2-1} \left[\frac{\rho l}{\rho_m h} \frac{Q}{\sqrt{M^2-1}} \right]^{1/2} \quad (20)$$

$$\rho = \left(1 + \frac{\gamma^*-1}{2} M^2 \right) \frac{\sqrt{M^2-1}}{M^2} \frac{1}{\gamma^* R^* T} \frac{D\pi^4}{l^3} Q \quad (21)^*$$

R^* : 気体定数 ($2.868 \times 10^8 \text{ mm}^2 \text{ sec}^{-2} \text{ deg}^{-1}$)

γ^* : 気体の比熱の比 = 1.4

T : 貯気槽温度

$$\alpha = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \left(\frac{l^2}{hR} \right)^2 \quad (22)$$

$$W_1 = \frac{w_1}{h}, \quad W_2 = \frac{w_2}{h} \quad (23)$$

$$\omega_0 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho_m h}} \quad (\text{rad/sec}) \quad (24)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{n^2 h}{R} \right)^2 \quad (25)$$

さらに, (15)式では構造減衰を考慮し

$$\gamma = \gamma_c + \eta \Omega_{cr} \quad (26)$$

η : 構造減衰係数

Ω_{cr} : (34)式

とおいている。

3. 平均法を用いた近似解析

(15)式の近似解を

$$\begin{cases} W_1 = A_1(t) \cos[\omega t + \Phi(t)] \\ W_2 = A_2(t) \cos[\omega t + \Psi(t)] \end{cases} \quad (27)$$

と仮定して, 平均法¹⁵⁾を用いると次式をうる。

$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} \left[\frac{d\bar{A}_1}{dt} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{8} \bar{A}_2^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\bar{J} \right) \right\} - \frac{\varepsilon}{16} \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \frac{d\bar{\Phi}}{dt} \sin 2\bar{J} \right] + I(1) = 0 \\ - \frac{\bar{A}_1 \Omega}{\omega_0} \left[\frac{d\bar{\Phi}}{dt} \left\{ 2 + \frac{\varepsilon}{8} (3\bar{A}_1^2 + 2\bar{A}_2^2) \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \bar{A}_2^2 \frac{d\bar{\Psi}}{dt} \right] + I(2) = 0 \\ \frac{Q}{\omega_0} \left[\frac{d\bar{A}_2}{dt} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{8} \bar{A}_1^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\bar{J} \right) \right\} + \frac{\varepsilon}{16} \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \frac{d\bar{\Psi}}{dt} \sin 2\bar{J} \right] + I(3) = 0 \\ - \frac{\bar{A}_2 \Omega}{\omega_0} \left[\frac{d\bar{\Psi}}{dt} \left\{ 2 + \frac{\varepsilon}{8} (2\bar{A}_1^2 + 3\bar{A}_2^2) \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \bar{A}_1^2 \frac{d\bar{\Phi}}{dt} \right] + I(4) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

ここで, $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{\Phi}, \bar{\Psi}$ はそれぞれ A_1, A_2, Φ, Ψ の一周期についての平均値を表わし, また

$$\bar{J} = \bar{\Psi} - \bar{\Phi} \quad (29)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} I(1) = & \bar{A}_1 \gamma \Omega \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{8} \left(\frac{3}{4} \bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 + \frac{\bar{A}_2^2}{2} \cos 2\bar{J} \right) \right\} - \frac{\varepsilon}{8} \Omega^2 \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \sin 2\bar{J} \\ & - Q \bar{A}_2 \sin \bar{J} \left\{ \frac{8}{3} + \frac{2\varepsilon}{5} \left(\frac{\bar{A}_1^2}{3} + \frac{4}{7} \bar{A}_2^2 \right) \right\} + \frac{1}{8} \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \sin 2\bar{J} (2I_{12} + I_{14} \bar{A}_1^2 + 2I_{15} \bar{A}_2^2) \end{aligned} \quad (31 \cdot 2)$$

$$\begin{aligned} I(2) = & \bar{A}_1 \left[I_{10} - \Omega^2 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{3}{4} \bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 + \frac{\bar{A}_2^2}{2} \cos 2\bar{J} \right) \right\} \right] \\ & - \frac{\varepsilon}{16} \gamma \Omega \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \sin 2\bar{J} - Q \bar{A}_2 \cos \bar{J} \left\{ \frac{8}{3} + \frac{2\varepsilon}{5} \left(\bar{A}_1^2 + \frac{4}{7} \bar{A}_2^2 \right) \right\} \\ & + \frac{3}{4} I_{11} \bar{A}_1^3 + \frac{1}{2} I_{12} \bar{A}_1 \bar{A}_2^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\bar{J} \right) \\ & + \frac{\bar{A}_1}{8} \{ 5I_{13} \bar{A}_1^4 + \bar{A}_2^2 (I_{14} \bar{A}_1^2 + I_{15} \bar{A}_2^2) (3 + 2 \cos 2\bar{J}) \} \end{aligned} \quad (31 \cdot 2)$$

$$\begin{aligned} I(3) = & \bar{A}_2 \gamma \Omega \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{8} \left(\frac{3}{4} \bar{A}_2^2 + \bar{A}_1^2 + \frac{\bar{A}_1^2}{2} \cos 2\bar{J} \right) \right\} \\ & + \frac{\varepsilon}{8} \Omega^2 \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \sin 2\bar{J} - Q \bar{A}_1 \sin \bar{J} \left\{ \frac{8}{3} + \frac{2\varepsilon}{5} \left(\bar{A}_1^2 + \frac{4}{21} \bar{A}_2^2 \right) \right\} \\ & - \frac{1}{8} \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \sin 2\bar{J} (2I_{21} + 2I_{23} \bar{A}_1^2 + I_{24} \bar{A}_2^2) \end{aligned} \quad (31 \cdot 3)$$

$$I(4) = \bar{A}_2 \left[I_{20} - \Omega^2 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{3}{4} \bar{A}_2^2 + \bar{A}_1^2 + \frac{\bar{A}_1^2}{2} \cos 2\bar{J} \right) \right\} \right]$$

* 実験結果と比較するため, 等エントロピー流の仮定を用いた超音速風洞の ρ について扱う。この式については前論文¹⁴⁾を参照されたい。

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon}{16} \gamma Q \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \sin 2 \bar{J} + Q \bar{A}_1 \cos \bar{J} \left\{ \frac{8}{3} + \frac{2\varepsilon}{5} \left(\bar{A}_1^2 + \frac{4}{7} \bar{A}_2^2 \right) \right\} \\
& + \frac{1}{2} I_{21} \bar{A}_1^2 \bar{A}_2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2 \bar{J} \right) + \frac{3}{4} I_{22} \bar{A}_2^3 \\
& + \frac{\bar{A}_2}{8} \{ \bar{A}_1^2 (I_{23} \bar{A}_1^2 + I_{24} \bar{A}_2^2) (3 + 2 \cos 2 \bar{J}) + 5 I_{25} \bar{A}_2^4 \}
\end{aligned} \quad (31 \cdot 4)$$

与えられた動圧 Q に対して, (28) 式において時間微分の項を 0 とおいて, 定常振動解 $\bar{A}_{10}, \bar{A}_{20}, \Omega_0, \bar{J}_0$ が求められる. その定常振動解が安定なものであるか否かを調べるために, 微小擾乱を考え,

$$\begin{cases} \bar{A}_1 = \bar{A}_{10} + a_1^*(t) = \bar{A}_{10} + a_1 e^{\theta \omega_0 t} \\ \bar{A}_2 = \bar{A}_{20} + a_2^*(t) = \bar{A}_{20} + a_2 e^{\theta \omega_0 t} \\ \bar{\phi} = \bar{\phi}_0 + \phi^*(t) = \bar{\phi}_0 + \phi e^{\theta \omega_0 t} \\ \bar{\psi} = \bar{\psi}_0 + \psi^*(t) = \bar{\psi}_0 + \psi e^{\theta \omega_0 t} \end{cases} \quad (32)$$

とおき, (28) 式に代入し, 微小量 a_1, a_2 などに関する 2 次以上の項を無視すると, a_1, a_2 などに関する斉次の連立方程式が求まる. a_1, a_2, ϕ, ψ の全ては 0 でない条件, $[a_1, a_2, \phi, \psi \text{ の係数行列式}] = 0$, より求まる θ に関する 4 次の特性方程式の少なくとも 1 根が正の実数部分を持つとき, 微小擾乱は増加するので定常振動解は不安定と考えることにする.

ところで, 線形の解析で求まるフラッター限界値 Q_{cr} における各値は, (28) 式において時間微分の項を 0 とおき, $\bar{A}_1, \bar{A}_2 \rightarrow 0$ とすることにより

$$\left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1} \right)_{cr} = 1 \quad (33)$$

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{I_{10} + I_{20}}{2}} \quad (34)$$

$$\Delta_{cr} = \cos^{-1} \left[\frac{I_{10} - I_{20}}{\sqrt{(I_{10} - I_{20})^2 + 2 \gamma^2 (I_{10} + I_{20})}} \right] \quad (35)$$

$$Q_{cr} = \frac{3}{16} \sqrt{(I_{10} - I_{20})^2 + 2 \gamma^2 (I_{10} + I_{20})} \quad (36)$$

を得る. (36) 式は文献 3) で得られている結果に一致している.

4. 数値積分 RUNGE-KUTTA-GILL 法を用いた近似解析

第 3 節で行なった平均法を用いた近似解析の結果を確かめるためと, 有限な擾乱に対する振動解の存在を調べるために, 数値積分 RUNGE-KUTTA-GILL 法を用いて近似解析を行なう. (15) 式において,

$$\frac{dW_j}{dt} = V_j \quad (j=1, 2) \quad (37)$$

とおき, 2 元連立 2 階常微分方程式を 4 元連立 1 階常微分方程式に変換を行ない, $V_j, W_j (j=1, 2)$ に適当な初期値を与え, 振動解の存在およびその振幅, 振動数などを求める.

5. 数値計算および結果の検討

文献 14) の実験結果と比較するために, つぎの数値

$$\begin{aligned}
l &= 110 \text{ mm}, R = 55 \text{ mm}, h = 0.07 \text{ mm}, E = 1.28 \\
&\times 10^4 \text{ kg/mm}^2, \rho_m = 0.813 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-4} \cdot \text{sec}^2, \\
\nu &= 0.25, \eta = 0.002, M = 2.0, T = 300^\circ \text{K}
\end{aligned}$$

について, 電子計算機 HITAC 5020 を用いて計算を行なった.

5.1 相当長さ l^* の決定 実験に用いられた円筒殻の両端の境界条件は固定であるが, この解析では両端単純支持に相当する振動波形 (7) 式を用いて非線形解析を行なっている. そこで, 境界条件の違いを補正するために文献 12) で用いた両端固定円筒殻に対する軸方向の相当長さ l^* の考えをここでも用いることにする.

相当長さの決定にはいろいろ考えられるが, 両端固定円筒殻の各周方向波数のフラッター限界値に, 両端単純支持円筒殻の対応する周方向波数のフラッター限界値が一致するように有効長さを決めることにする. 文献 14) に示した両端固定の場合のフラッター限界値の式 (22) に $l = 110 \text{ mm}$ の値を用いた結果および本論文の (36) 式に相当長さ $l^* = l/1.1, l/1.2, l/1.3$ の各値を用いて計算した結果を第 2 図に示す. この図か

第 2 図 両端固定円筒殻と両端単純支持円筒殻に相当長さを用いたときの各方向周波数におけるフラッター限界値

第3図 平均法によって得られた定常振動解の軸方向1次のモードの振幅とその定常振動解の微小擾乱に対する安定・不安定

第4図 平均法によって得られた周方向波数 $n=14$ のモードの定常振動解

第5図 平均法によって得られた周方向波数 $n=20$ のモードの定常振動解

ら有効長さを $l^*=l/1.2=91.7$ mm とする。

5.2 平均法による定常振動解とその安定 定常振動解は (28) 式において、時間微分の項を 0 とおいて得られる 4 元連立非線形代数方程式を NEWTON-RAPHSON 法を用い、初期値として (33)~(36) 式の値を用いて求めることが出来る。得られた定常振動解の安定については、第 3 節で述べた方法を用いて調べた。

第 3 図に各周方向波数についての定常振動解 $\bar{A}_{10}$ のみを示し、その定常振動が微小擾乱に対して安定な場合は○印、不安定な場合は×印で記した。いずれの周方向波数とも、そのモードのフラッター限界値より低い動圧に定常振動解が存在しており、円筒殻の softening 型の非線形振動特性の影響によるものと考えられる。 $n=12, 13, 14$ のモードでは、そのモードのフラッター限界値より低い動圧においても、安定な定常振動解が得られているが、一方 n の値が 15 より大きいモ

ードではフラッター限界値より高い動圧においても、微小擾乱に対して定常振動解は不安定になっている。この図の範囲では示すことが出来なかったが、 $n=21, 24$ のモードでは、それぞれ $Q=1, 300, 1, 700$ 付近から定常振動解は安定になった。また $n=20, 21, 24$ のモードは、動圧の値が 0 の近くまで、定常振動解を持ち、しかも奇妙な曲線を示している。第 4, 5 図に、実験で得られた周方向波数 $n=14$ と最小のフラッター限界値を与える $n=20$ のモードの定常振動解の各値を示す。ここで注目すべきことは、最小のフラッター限界値 $Q_{cr}=280$ において、 $n=14$ のモードが定常振動解を持ち、しかも振幅、振動数、位相差が実験で得られている値に良く一致していることである。

5.3 数値積分 RUNGE-KUTTA-GILL 法による結果

平均法で得られた定常振動解の精度とその安定・不安定ならびに定常振動以外のフラッターが起こるか否

第1表 数値積分に用いた初期値とその結果
($n=14$ の場合)

Q	W_{1i}	W_{2i}	結 果
350	2.0	-2.0	減 衰
	4.0	-4.0	フラッター
500	0.1	-0.1	減 衰
550	0.1	-0.1	フラッター
600	0.1	-0.1	フラッター

ただし, $V_{1i} = V_{2i} = 0$ 第6図 数値積分法によって得られた周方向波数 $n=14$ のモードの振幅, 平均法による結果 (第4図) との比較 第7図 数値積分法によって得られた周方向波数 $n=20$ のモードの振幅, 平均法による結果 (第5図) との比較

かを検討するために, RUNGE-KUTTA-GILL 法を用い, (15)式をいろいろな初期値のもとに数値計算を行なった. 数値積分の刻みについては1周期を30~40等分しているの, 計算の精度は十分なものと考えられる.

$n=14$ の場合について, 数値計算に用いた初期値とその結果を第1表に示す. このモードのフラッター限界値 ($Q=530$) より高い動圧では, 小さい値の初期値 ($W_{1i}=0.1, W_{2i}=-0.1$) に対してもフラッターが生ずるが, フラッター限界値より低い動圧 ($Q=350$) では, 初期値の大きさによってフラッターが生じたり減衰したりすることがわかる. 第6, 7図には比較のために平均法で得られた $\bar{A}_{10}, \bar{A}_{20}$ をそれぞれ実線および

破線で, 数値積分法により得られた1次および2次のモードの定常な振動の振幅の値をそれぞれ■, ▲印で示してある. 振動が正弦波的でない場合には平均的な値を示し, □, △印を用いた. 平均法で得られた安定な定常振動解の振幅, 振動数, 位相差と数値積分法により得られた値は極めて良く一致している.

平均法により定常振動解が微少擾乱に対して安定であることが見出されている領域では, 数値積分法によっても定常なフラッター振動が得られた. 平均法による解析で微少擾乱に対して定常振動解が不安定な領域では, 数値積分法による解析結果は, 動圧が高いところでは平均値が定常振動解に近い唸りのある振動波形のフラッターが存在したが, 動圧を次第に下げると正弦波からのずれが徐々に大きくなり, 動圧をさらに下げると遂には初期値についてどのような考慮をしても減衰しない振動は得られなかった. 例えば, $n=14$ については $Q=280$ 以下においては計算した範囲ではフラッターは得られていない. また $n=17$ のモードでは, 少なくとも $Q=250$ まで唸りを伴ったフラッターの存在することが確かめられている. このことは, 上から動圧を徐々に下げると最小のフラッター限界値よりも低いところまでフラッターの存在することを意味し, また逆に下から動圧を上げたとき, 十分大きな擾乱が与えられると最小のフラッター限界値より低い動圧でもフラッターの生ずる可能性のあることを示唆している.

文献9)においても, 本解析と同様に数値積分法を用いて解析を行なっているが, フラッター限界値より高い動圧においても振動が0に収束したという不合理な結論を示している. 著者らの計算でも, フラッター限界値よりわずかに高い動圧では適切な初期値を与えないと, 初め振動が減衰し, しばらくして再び増加することがあったから, 多分その結論は計算の繰り返えしが十分でなかったために誤って下されたものか, あるいは計算違いのために生じたものと思われる.

6. 実験結果との比較

文献14)の実験結果をまとめると, 動圧を下からスイープしたとき, フラッター限界値は線形理論の最小のフラッター限界値にはほぼ一致し, 軸方向には曲げの1次と2次のモードが連成し, その位相差は振動波形を(27)式のように仮定すると 180° に近く, 周方向モードの波数 n は14, 振動数は500~600 cps, 振幅は板厚の5倍程度に達しており, 不規則な振動である.

一方第5節の計算結果を整理すると, 最小のフラッター限界値は $n=20$ において得られ $Q=280$ であり, その動圧では周方向波数 n の値が14より大きいモー

ドのフラッターが十分大きな擾乱に対しては可能である。その振動波形は唸りを伴ったものである。ところで実験で得られた $n=14$ のモードは、線形解析によるとフラッター限界値は $Q=528$ であるが、非線形解析の結果最小のフラッター限界値の付近で唸りを伴ったフラッターが有限な擾乱に対しては可能であり、振動数は約 850 cps, 軸方向1次と2次のモードの振幅は板厚の約5倍、その位相差は 160° である。

すなわち、非線形解析によって得られた $n=14$ のモードの、最小フラッター限界値の付近での各値は実験値に良く一致しており、しかも他のいずれの周方向波数モードのものよりも良く一致している。したがって、もしも最小のフラッター限界値の付近で $n=14$ のモードが他のいくつかのフラッター可能なモードに対して優越することを、解析的に示すことが出来れば、実験結果を理論的に完全に説明出来たことになるが、この点については未解決のままである。

7. 結 論

円筒殻の超音速パネルフラッターについて、著者らの行なった両端固定円筒殻の実験結果を説明するために、両端単純支持円筒殻について非線形解析を行ない、数値計算では境界条件の相異を相当長さで補正してつぎの結論を得た。

1) 平均法による解析の結果、各周方向波数ともその波数のフラッター限界値より低い動圧に定常振動解の存在することが確認された。その定常振動解は動圧の高いところでは微少擾乱に対して安定であるが、動圧の低いところでは不安定になり、その安定限界はその周方向波数のフラッター限界値と無関係である。

2) 数値積分法によって得られた定常振動解の値は平均法の結果と極めて良く一致した。また平均法で微少擾乱に対して安定な定常振動解の得られた領域には定常なフラッターが存在し、不安定な領域では、動圧の高い部分には唸りのあるフラッターが存在し、動圧を下げると次第に唸りが増加し、やがてフラッターが存在しなくなることが明らかになった。このフラッターの存在しなくなる限界も各周方向波数についてその線形のフラッター限界値と無関係であり、平均法によって得られた定常振動解の曲線の最小の動圧よりも高い。

3) 非線形解析の結果、線形の解析で得られる最小のフラッター限界値よりかなり低い動圧まで、いくつかの周方向波数ではフラッターが可能であることが明らかになった。このことは最小のフラッター限界値より低い動圧においても、十分大きな擾乱が与えられればフラッターの生ずる可能性を示すものである。

4) 以上の結論を総合すると、フラッターの発生ならびに特性はつぎのように説明されるものと考えられる。動圧を下からスweepさせた時、最小のフラッター限界値において、そのフラッター限界を与える周方向波数のモードが微少擾乱に対して不安定になり、増加して有限の値に達する。このとき、フラッター限界値はこの動圧よりも高いが、この動圧で有限な擾乱によってフラッター可能な周方向モードのうち、実験で得られた周方向モードが励起され、そのモードの優越したフラッターが生ずる。この過程は瞬間的に起こるので、最小のフラッター限界値を与える周方向モードのフラッターは実験では見ることは出来ない。

本解析では、平均法を用いて定常振動解を求め、さらに微少擾乱に対する安定を調べ、その結果を数値積分法で裏付けることが出来た。平均法は非線形項が微少な範囲において数学的証明がなされているが、本解析のように非線形項の小さくない場合にも平均法を適用出来ることが明らかにされたものと考えられる。

未解決のまま将来に残された問題は、与えられた動圧において周方向のいくつかのモードでフラッターが可能であることが本解析で示されたが、そのうちのどのモードが選択されるのかを解析的に決定することである。また著者らは動圧を下からスweepする実験のみを行なったが、逆に動圧を上から下げて、フラッターの停止する限界を実験で調べてみる必要がある。

終わりに臨み、本研究を御指導いただいた東京大学工学部航空学科林毅教授に厚く感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) R. O. STEARMAN, M. H. LOCK and Y. C. FUNG: Ames test on the flutter of cylindrical shell, GALCIT ASD, SM 62-37 (1962).
- 2) Y. C. FUNG: Some recent contribution to panel flutter, AIAA J., 1, 4, pp. 898-907 (1963).
- 3) S. KOBAYASHI: Supersonic panel flutter of unstiffened circular cylindrical shells having simply supported ends, Trans. Japan Soc. Aero. and Space Sci., 6, 9, pp. 27-35 (1963).
- 4) M. D. OLSON and Y. C. FUNG: Supersonic flutter to circular cylindrical shells subjected to internal pressure and axial compression, AIAA J., 4, 5, pp. 858-864 (1966).
- 5) M. D. OLSON and Y. C. FUNG: Comparing theory and experiment for the supersonic flutter of circular cylindrical shells, AIAA J., 5, 10, pp. 1849-1856 (1967).
- 6) L. L. CARTER and R. O. STEARMAN: Some aspects of cylindrical shell panel flutter, AIAA J., 6, 1, pp. 30-37 (1968).
- 7) D. A. EVENSEN and M. D. OLSON: Circumferentially travelling wave flutter of a circular cylindrical shell, AIAA J., 6, 8, pp. 1522-1527 (1968).

- 8) G. W. BARR and R. O. STEARMAN: Aeroelastic stability characteristics of cylindrical shells considering imperfections and edge constraint, AIAA Paper, No. 68-285 (1968).
- 9) D. A. EVENSEN and M. D. OLSON: Nonlinear flutter of a circular cylindrical shell in supersonic flow, NASA TN D-4265 (1968).
- 10) D. A. EVENSEN: Nonlinear flexural vibrations of thin-walled circular cylinders, NASA TN D-4090 (1967).
- 11) 松崎雄嗣: 円筒殻の超音速パネルフラッター, 東京大学工学系研究科航空学課程修士論文 (1966-3) の第 I 部.
- 12) 松崎雄嗣, 小林繁夫: 薄肉円筒殻の非線形振動解析, 日本航空宇宙学会誌 Vol. 17, No. 187, pp. 308-315 (1969).
- 13) Y. MATSUZAKI and S. KOBAYASHI: A theoretical and experimental study of the nonlinear flexural vibration of thin circular cylindrical shells with clamped ends, Trans. Japan soc. Aero. Space Sci., 12, 21, pp. 55-62 (1969).
- 14) 松崎雄嗣, 小林繁夫: 両端固定円筒殻の超音速パネルフラッターの理論と実験, 日本航空宇宙学会誌 Vol. 17, No. 188, pp. 346-353 (1969).
- 15) ボゴリューボフ & ミトロポリスキー: 非線形振動論, 共立出版 (1961).

板翼の超音速フラッター速度の一計算法*

名 取 通 弘**・小 林 繁 夫***

A Method to Calculate the Supersonic Flutter Speed of Plate Wings

Michihiro NATORI and Shigeo KOBAYASHI

Abstract

A method to calculate the supersonic bending-torsion flutter speed of cantilever plate wings of low aspect ratio is presented. The deflection mode is assumed in a double power series expansion of spanwise and chordwise variables, and the flutter determinant is derived with the aid of the principle of minimum potential energy of the dynamic problem. The chordwise variable is measured from the midchord line along the stream direction for swept-back wings. For the aerodynamic force, the piston theory including the effect of wing thickness is used. Numerical computation is carried out for a cantilever trapezoid tested at the National Aerospace Laboratory. It has been observed that the ten terms approximation yields a good result in comparison with the twenty terms approximation. It has been clarified that the effect of aerodynamic damping on the flutter speed is very small. Reasonable results are obtained in comparison with the experimental results. Furthermore the present method is extended to cantilever plates partially clamped at the root.

1. 序 論

超音速流中の翼のフラッターは、超音速機設計上重要な問題であるにもかかわらず公表されている研究論文は意外に少ない。それは主として軍事機密として

公表を押えられていることによるものと考えられる。しかし基礎的なものは発表されており、H. ASHLEY and G. ZARTARIAN¹⁾ は空気力として piston theory を用いると解析が極めて簡単になることを示している。この piston theory 使用の可否については、H. G. MORGAN, H. L. RUNYAN and V. HUCKEL²⁾ が 2 次元翼について詳しい解析的検討を行ない、マッハ数 2 以上ではほぼ満足すべき結果を与えることを示している。H. G. MORGAN, V. HUCKEL and H. L. RUNYAN³⁾ はアスペクト比の小さい翼に適用出来るよう翼弦の変形を考慮した解法を示している。E. NAKAI, T. TAKAGI, K. ISOGAI and T. MORITA⁴⁾ は板翼についてマッハ数 1.5~4.0 の範囲で実験的研究を行ない、固有振動モードについての知識を用いて 3 自由度の問題として計算した理論値と比較して、理論値は実験値よりもフラッター動圧で 30% 程度高めであるという結果を示している。E. C. YATES Jr.⁵⁾ はマッハ数 2 までの翼の実験との比較を行ない、piston theory あるいは準定常 second-order theory による理論値が実験値より 38% 程度高い事を論じている。高いマッハ数の超音速流中のフラッターでは当然空力加熱の影響が問題になるが、この問題については文献 6)~9) の研究が発表されている。

フラッター速度の計算法としては、固有振動モードについての知識を用いて 2 ないし 3 自由度のフラッターの問題として取扱われる場合が多く、アスペクト比が大きい場合は実用上適当である。しかし本論文で取り上げているロケット尾翼のようにアスペクト比の小さい板翼の場合は、固有振動モードについて調べるこ

* 第 3 節までは昭和 43 年 7 月 6 日第 10 回構造強度に関する講演会で発表、第 4 節以降は昭和 44 年 7 月 3 日第 11 回構造強度に関する講演会で発表、昭和 44 年 9 月 19 日原稿受理

** 東京大学大学院工学系研究科航空学専門課程

*** 東京大学工学部航空学科