- 8) G. W. BARR and R. O. STEARMAN: Aeroelastic stability characteristics of cylindrical shells considering imperfections and edge constraint, AIAA Paper, No. 68-285 (1968).
- 9) D. A. EVENSEN and M. D. OLSON: Nonlinear flutter of a circular cylindrical shell in supersonic flow, NASA TN D-4265 (1968).
- 10) D. A. EVENSEN: Nonlinear flexural vibrations of thin-walled circular cylinders, NASA TN D-4090 (1967).
- 11) 松崎雄嗣: 円筒殻の超音速パネルフラッター, 東京大学工学系研究科航空学課程修士論文 (1966-3) の第 I 部.
- 12) 松崎雄嗣, 小林繁夫: 薄肉円筒殻の非線形振動解析, 日本航空宇宙学会誌 Vol. 17, No. 187, pp. 308-315 (1969).
- 13) Y. MATSUZAKI and S. KOBAYASHI: A theoretical and experimental study of the nonlinear flexural vibration of thin circular cylindrical shells with clamped ends, Trans. Japan soc. Aero. Space Sci., 12, 21, pp. 55-62 (1969).
- 14) 松崎雄嗣, 小林繁夫: 両端固定円筒殻の超音速パネルフラッターの理論と実験, 日本航空宇宙学会誌 Vol. 17, No. 188, pp. 346-353 (1969).
- 15) ボゴリューボフ & ミトロポリスキー: 非線形振動論, 共立出版 (1961).

板翼の超音速フラッター速度の一計算法*

名 取 通 弘**・小 林 繁 夫***

A Method to Calculate the Supersonic Flutter Speed of Plate Wings

Michihiro NATORI and Shigeo KOBAYASHI

Abstract

A method to calculate the supersonic bending-torsion flutter speed of cantilever plate wings of low aspect ratio is presented. The deflection mode is assumed in a double power series expansion of spanwise and chordwise variables, and the flutter determinant is derived with the aid of the principle of minimum potential energy of the dynamic problem. The chordwise variable is measured from the midchord line along the stream direction for swept-back wings. For the aerodynamic force, the piston theory including the effect of wing thickness is used. Numerical computation is carried out for a cantilever trapezoid tested at the National Aerospace Laboratory. It has been observed that the ten terms approximation yields a good result in comparison with the twenty terms approximation. It has been clarified that the effect of aerodynamic damping on the flutter speed is very small. Reasonable results are obtained in comparison with the experimental results. Furthermore the present method is extended to cantilever plates partially clamped at the root.

1. 序 論

超音速流中の翼のフラッターは、超音速機設計上重要な問題であるにもかかわらず公表されている研究論文は意外に少ない。それは主として軍事機密として

公表を押えられていることによるものと考えられる。しかし基礎的なものは発表されており、H. ASHLEY and G. ZARTARIAN¹⁾ は空気力として piston theory を用いると解析が極めて簡単になることを示している。この piston theory 使用の可否については、H. G. MORGAN, H. L. RUNYAN and V. HUCKEL²⁾ が 2 次元翼について詳しい解析的検討を行ない、マッハ数 2 以上ではほぼ満足すべき結果を与えることを示している。H. G. MORGAN, V. HUCKEL and H. L. RUNYAN³⁾ はアスペクト比の小さい翼に適用出来るよう翼弦の変形を考慮した解法を示している。E. NAKAI, T. TAKAGI, K. ISOGAI and T. MORITA⁴⁾ は板翼についてマッハ数 1.5~4.0 の範囲で実験的研究を行ない、固有振動モードについての知識を用いて 3 自由度の問題として計算した理論値と比較して、理論値は実験値よりもフラッター動圧で 30% 程度高めであるという結果を示している。E. C. YATES Jr.⁵⁾ はマッハ数 2 までの翼の実験との比較を行ない、piston theory あるいは準定常 second-order theory による理論値が実験値より 38% 程度高い事を論じている。高いマッハ数の超音速流中のフラッターでは当然空力加熱の影響が問題になるが、この問題については文献 6)~9) の研究が発表されている。

フラッター速度の計算法としては、固有振動モードについての知識を用いて 2 ないし 3 自由度のフラッターの問題として取扱われる場合が多く、アスペクト比が大きい場合は実用上適当である。しかし本論文で取り上げているロケット尾翼のようにアスペクト比の小さい板翼の場合は、固有振動モードについて調べるこ

* 第 3 節までは昭和 43 年 7 月 6 日第 10 回構造強度に関する講演会で発表、第 4 節以降は昭和 44 年 7 月 3 日第 11 回構造強度に関する講演会で発表、昭和 44 年 9 月 19 日原稿受理

** 東京大学大学院工学系研究科航空学専門課程

*** 東京大学工学部航空学科

と自体がかなりやっかいなのと、何次の固有振動モードまでとれば良いかが不明確なので、本論文では著者の一人が先に板翼の固有振動解析に用いた方法¹⁰⁾ (すなわち midchord line に注目した冪級数展開法) を超音速フラッター速度の計算に拡張適用して、固有振動モードの知識を必要とすることなく、変分問題の直接解法によって直接求める方法を提案し、従来の計算法による値および E. NAKAI はか⁴⁾の実験結果と比較して十分実用性のあることを示す。空気力のより厳密な取り扱いとしては kernel function 法¹¹⁾等の数値解法があげられ、文献12) にはその概観がのべられている。本論文では計算方法の検討を主にしたので、空気力としては、これまでの多くの研究と同様に piston theory を用いた。なお本研究の最終的なねらいは空力加熱によって熱応力が発生した状態でのフラッター速度の計算法を示すことであるが、本論文はその前段階として空力加熱のない場合について述べたものである。

第1図 翼平面形

2. 解析理論

第1図のような平面形の等方性変厚片持板を扱う。この系のポテンシャルエネルギー Π^* を撓み W で変分したものは

$$\delta \Pi^* = \delta \iint_S \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy - \iint_S p \delta W dx dy \quad (1)$$

と表わされる。ここで D は板の曲げ剛性、 ν はポアソン比を表わす。分布荷重 p は、空気力と慣性力とからなり、空気力としては翼厚の効果まで含めた piston theory を用いることによって、 p は

$$p = -\frac{\rho_\infty U^2}{2M} \left[4 + (\gamma + 1) M \frac{\partial h^*}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{U} \frac{\partial W}{\partial t} \right] - \rho h^* \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2)$$

と表わされる。ここで ρ_∞ , U , M は一様流の密度、速度、マッハ数、 γ は空気の比熱比 (以下1.4として数値計算する)、 ρ , h^* は翼の密度、厚さを表わす。フラッター速度および振動数を求めるのだから、 $W(x, y, t)$ は時間 t について

$$W(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (3)$$

と置いて解析を進める。 ω は円振動数である。(2), (3) 式を (1) 式へ代入し $e^{i\omega t}$ の項を分離したものを $\delta \Pi$ と記すと

$$\delta \Pi = \delta \iint_S \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy + \iint_S \frac{\rho_\infty U^2}{2M} \left[4 + (\gamma + 1) M \frac{\partial h^*}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{i\omega}{U} w \right) \delta w dx dy - \iint_S \rho h^* \omega^2 w \delta w dx dy \quad (4)$$

となる。

この片持ち板の境界条件は $x=0$ 辺で固定、他の3辺は自由である。翼弦中心線からの距離を z として、すなわち z は、

$$z = y - kx \quad (5)$$

ここで

$$k = \tan \Lambda \quad (6)$$

と表わされるが、この z と x によって、撓み形 w を幾何学的境界条件を満足するつぎのようなべき級数であ

らわす。

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_{mn}^* z^m x^n \quad (7)$$

w を x と y のべき級数でなくて x と z のべき級数であらわすと、各項の示す変形を容易に理解できるので、 w を有限項で近似する場合の項のとり方について合理的に考えることができる。 w を (7) 式のように与えると potential energy minimum の原理 $\delta \Pi = 0$ は $\partial \Pi / \partial a_{mn}^* = 0$ と等価になる。この条件は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}^*} = & \iint_S \frac{\partial}{\partial a_{mn}^*} \left[\frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \right] dx dy \\
& + \iint_S \frac{\rho_\infty U^2}{2M} \left[4 + (r+1) M \frac{\partial h^*}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{i\omega}{U} w \right] \frac{\partial w}{\partial a_{mn}^*} dx dy \\
& - \iint_S \rho h^* \omega^2 w \frac{\partial w}{\partial a_{mn}^*} dx dy = 0
\end{aligned} \quad (8)$$

と表わされる。そこで

$$\begin{aligned}
\xi &= x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/l, \\
\beta &= b^*/l, \quad \beta_0 = b_0^*/l, \quad \beta_1 = b_1^*/l, \\
h &= h^*/l, \quad h_m = h_m^*/l, \quad h_0 = h_0/l, \quad h_1 = h_1^*/l
\end{aligned} \quad (9)$$

と無次元量で表わし (ここで b_0^* , b_1^* はそれぞれ付け根および翼端の翼弦長の 1/2, h_m^* は各 ξ 断面での最

大翼厚で, h_0^* , h_1^* はその付け根および翼端での値を表わす.), また,

$$a_{mn} = l^{m+n} \times a_{mn}^* \quad (10)$$

と表わして (8) 式の計算を行なうと, つぎのような a_{rs} ($r=0 \sim \infty$, $s=2 \sim \infty$) を未知数とする連立方程式が導かれる。

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} a_{rs} [A_{mnrs} + C_1 \cdot M (F_{mnrs}^{1A} + M \cdot F_{mnrs}^{1B}) \\
+ i C_2 \cdot \omega (F_{mnrs}^{2A} + M \cdot F_{mnrs}^{2B}) - C_3 \omega^2 D_{mnrs}] = 0
\end{aligned} \quad (11)$$

ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} a_{rs} A_{mnrs} &= \frac{1}{2} \iint_S \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 \frac{\partial}{\partial a_{mn}} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right\} \right] d\xi d\eta \\
\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} a_{rs} F_{mnrs}^{1A} &= \frac{1}{2} \iint_S \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial a_{mn}} d\xi d\eta, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} a_{rs} F_{mnrs}^{1B} = \frac{1}{2} \iint_S \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial a_{mn}} d\xi d\eta \\
\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} a_{rs} F_{mnrs}^{2A} &= \frac{1}{2} \iint_S w \frac{\partial w}{\partial a_{mn}} d\xi d\eta, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} a_{rs} F_{mnrs}^{2B} = \frac{1}{2} \iint_S \frac{\partial h}{\partial \eta} w \frac{\partial w}{\partial a_{mn}} d\xi d\eta \\
\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} a_{rs} D_{mnrs} &= \iint_S \left(\frac{h}{h_0} \right) w \frac{\partial w}{\partial a_{mn}} d\xi d\eta \\
C_1 &= \frac{4\rho_\infty a_\infty^2 l^3}{D_0}, \quad C_2 = \frac{4\rho_\infty a_\infty l^4}{D_0}, \quad C_3 = \frac{\rho h_0^* l^4}{D_0}
\end{aligned} \quad (12)$$

A_{mnrs} などの値は翼平面形のほかに板厚の分布が与えられと数値積分により求めることができる。本論文では以下, 翼の平面形は前後線が直線で:

$$\beta/\beta_0 = 1 - r_\beta \xi, \quad r_\beta = (\beta_0 - \beta_1)/\beta_0 \quad (14)$$

最大翼厚 h_m^* のスパン方向の分布が直線形で:

$$h_m/h_0 = 1 - r_h \xi, \quad r_h = (h_0 - h_1)/h_0 \quad (15)$$

翼断面形が第 2 図のような general double wedge 形:

第 2 図 翼断面

$$\begin{aligned}
-\beta \leq \zeta \leq -(1-\kappa)\beta & \quad \text{では} \quad h/h_m = (\zeta + \beta)/\kappa\beta \\
-(1-\kappa)\beta \leq \zeta \leq (1-\kappa)\beta & \quad \text{では} \quad h/h_m = 1 \\
(1-\kappa)\beta \leq \zeta \leq \beta & \quad \text{では} \quad h/h_m = (-\zeta + \beta)/\kappa\beta
\end{aligned} \quad (16)$$

の場合について示す。また楔の角度 θ がスパン方向に一定の場合を取扱うことにすると

$$\kappa = \frac{1 - r_h \xi}{1 - r_\beta \xi} \kappa_0 \quad (17)$$

となる。ここで κ_0 は付根断面での κ の値である。(14)~(17) 式を用いて A_{mnrs} などはつぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned}
A_{mnrs} &= \int_0^1 A_\zeta d\xi \\
F_{mnrs}^{1A} &= \int_0^1 F_\zeta^{1A} d\xi, \quad F_{mnrs}^{1B} = \int_0^1 F_\zeta^{1B} d\xi \\
F_{mnrs}^{2A} &= \int_0^1 F_\zeta^{2A} d\xi, \quad F_{mnrs}^{2B} = \int_0^1 F_\zeta^{2B} d\xi \\
D_{mnrs} &= \int_0^1 D_\zeta d\xi
\end{aligned} \quad (18)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} p &= m+r, & K_i &= (1-\kappa)^i - 1 \\ a_0(\xi) &= \{n(n-1)s(s-1)\} \xi^{n+s-4} \\ a_1(\xi) &= \{-2k\{n(n-1)rs + mns(s-1)\}\} \xi^{n+s-3} \\ a_2(\xi) &= \{(k^2+\nu)\{m(m-1)s(s-1) + n(n-1)r(r-1)\} + 2(2k^2+1-\nu)mnr s\} \xi^{n+s-2} \\ a_3(\xi) &= \{-2k(k^2+1)\{m(m-1)rs + mnr(r-1)\}\} \xi^{n+s-1} \\ a_4(\xi) &= \{(k^2+1)^2\{m(m-1)r(r-1)\}\} \xi^{n+s} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

と記して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_\zeta &= \left\{ \frac{\beta^{p+1}}{p+1} (1+K_{p+1}) (1-r_h \xi)^3 + \frac{\beta^{p+4}}{(\kappa_0 \beta_0)^3} \left(\frac{K_{p+4}}{p+4} - \frac{3K_{p+3}}{p+3} + \frac{3K_{p+2}}{p+2} - \frac{K_{p+1}}{p+1} \right) \right\} a_0 \\ &+ \left\{ \frac{\beta^{p-1}}{p-1} (1+K_{p-1}) (1-r_h \xi)^3 + \frac{\beta^{p+2}}{(\kappa_0 \beta_0)^3} \left(\frac{K_{p+2}}{p+2} - \frac{3K_{p+1}}{p+1} + \frac{3K_p}{p} - \frac{K_{p-1}}{p-1} \right) \right\} a_2 \\ &+ \left\{ \frac{\beta^{p-3}}{p-3} (1+K_{p-3}) (1-r_h \xi)^3 + \frac{\beta^p}{(\kappa_0 \beta_0)^3} \left(\frac{K_p}{p} - \frac{3K_{p-1}}{p-1} + \frac{3K_{p-2}}{p-2} - \frac{K_{p-3}}{p-3} \right) \right\} a_4 \quad \dots p: \text{偶数} \\ \frac{1}{2}A_\zeta &= \left\{ \frac{\beta^p}{p} (1+K_p) (1-r_h \xi)^3 + \frac{\beta^{p+3}}{(\kappa_0 \beta_0)^3} \left(\frac{K_{p+3}}{p+3} - \frac{3K_{p+2}}{p+2} + \frac{3K_{p+1}}{p+1} - \frac{K_p}{p} \right) \right\} a_1 \\ &+ \left\{ \frac{\beta^{p-2}}{p-2} (1+K_{p-2}) (1-r_h \xi)^3 + \frac{\beta^{p+1}}{(\kappa_0 \beta_0)^3} \left(\frac{K_{p+1}}{p+1} - \frac{3K_p}{p} + \frac{3K_{p-1}}{p-1} - \frac{K_{p-2}}{p-2} \right) \right\} a_3 \quad \dots p: \text{奇数} \\ F_\zeta^{1A} &= \begin{cases} 0 & \dots p: \text{偶数} \\ \frac{r}{p} \xi^{n+s} \beta^p & \dots p: \text{奇数} \end{cases} \\ F_\zeta^{1B} &= \begin{cases} \frac{(\gamma+1)h_0}{4\kappa_0\beta_0} \frac{r}{p} \xi^{n+s} \beta^p K_p & \dots p: \text{偶数} \\ 0 & \dots p: \text{奇数} \end{cases} \\ F_\zeta^{2A} &= \begin{cases} \frac{1}{p+1} \xi^{n+s} \beta^{p+1} & \dots p: \text{偶数} \\ 0 & \dots p: \text{奇数} \end{cases} \\ F_\zeta^{2B} &= \begin{cases} 0 & \dots p: \text{偶数} \\ \frac{(\gamma+1)h_0}{4\kappa_0\beta_0} \frac{1}{p+1} \xi^{n+s} \beta^{p+1} K_{p+1} & \dots p: \text{奇数} \end{cases} \\ D_\zeta &= \begin{cases} 2\xi^{n+s} \beta^{p+1} \left[\frac{\beta}{\kappa_0\beta_0} \left\{ \frac{K_{p+2}}{p+2} - \frac{K_{p+1}}{p+1} \right\} + \frac{1-r_h \xi}{p+1} (1+K_{p+1}) \right] & \dots p: \text{偶数} \\ 0 & \dots p: \text{奇数} \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

以上により (18) 式を SIMPSON の公式による数値積分で求めて A_{mnr} 等がきまる。

フラッター速度およびフラッター振動数は撓みを示す (7) 式のべき級数を有限項で打ち切って (11) 式に示される複素数の固有値問題を解くことによって求められる。すなわちちょうどフラッター速度では、 ω は実数であるから、この条件のもとに (11) 式の係数の行列式=0、すなわち

$$\begin{aligned} &|A_{mnr} + C_1 M(F_{mnr}^{1A} + M \cdot F_{mnr}^{1B}) \\ &+ i C_2 \omega (F_{mnr}^{2A} + M \cdot F_{mnr}^{2B}) \\ &- C_3 \omega^2 D_{mnr}| = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

したがって (21) 式左辺の実数部、虚数部を0ならしめるフラッターマッハ数 M_F およびフラッター円振動数 ω_F を求めればよいことになる。

3. 計算例および実験との比較

実験結果と比較できるようにするため、航空宇宙技術研究所で中井他によって行なわれた一連の実験の模

第3図 計算模型 (Model 85)
板厚 2 mm, 図の単位 mm

型のうちの一つ Model-85 を選び, その数値について計算を行なった. 模型材料は純マグネシウムで, その平面形および固定条件を第3図に示す. 数値は

$$E=4.0 \times 10^3 \text{ kg/mm}^2, \nu=0.33, \rho=1.775 \times 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{mm}^4, l=187 \text{ mm}, 2b_0^*=229.5 \text{ mm}, 2b_1^*=144.5 \text{ mm}, h^*=2 \text{ mm}, \text{前後縁のウェッジ幅}=1.73 \text{ mm}$$

で, したがって

$$k=0.22727, \beta_0=0.61364, \kappa_0=0.015094$$

$$h_0=0.010695, r_\beta=0.37037, r_h=0$$

$$w = \zeta^0 \{ a_{02}\xi^2 + a_{03}\xi^3 + a_{04}\xi^4 + a_{05}\xi^5 + a_{06}\xi^6 + \dots \} \\ + \zeta^1 \{ a_{12}\xi^2 + a_{13}\xi^3 + a_{14}\xi^4 + a_{15}\xi^5 + a_{16}\xi^6 + \dots \} \\ + \zeta^2 \{ a_{22}\xi^2 + a_{23}\xi^3 + a_{24}\xi^4 + a_{25}\xi^5 + \dots \} \\ + \zeta^3 \{ a_{32}\xi^2 + a_{33}\xi^3 + a_{34}\xi^4 + a_{35}\xi^5 + \dots \} \\ + \zeta^4 \{ a_{42}\xi^2 + a_{43}\xi^3 + \dots \} \\ + \dots \quad (23)$$

実線で囲んだような 10 項近似と点線で囲んだような 20 項近似との 2 通りの場合について計算を行なった.

数値計算に当たって (21) 式における空気力による damping の項 F_{mnr}^2 による影響は小さいであろうことに着目して, まず, 第 1 次近似としてこの項を省略した計算を行なった. この項を省略すると, (21) 式の各項は実数となる. したがって, フラッターマッハ数 M_F はマッハ数 M を与えた時の (21) 式の根 ω を求め複素数の ω があらわれ始める限界 (そこで 2 つの固有振動数 ω_A と ω_B とが等しくなる) の M の値として求められる¹³⁾. 第 4 図にこのような考えで計算したマッハ数と固有振動数の関係を示す. この計算結果から求めたフラッターマッハ数 M_F およびフラッター振動数 f_F を第 1 表に示した.

第 1 表には, 中井他の実験結果と比較するため stiff-

と計算される. この超音速風洞の測定部の動圧 $q = \rho_\infty U_\infty^2/2$ の範囲は 0.8 kg/cm^2 ないし 1.5 kg/cm^2 の範囲である. したがって $\rho_\infty a_\infty^2$ としては

$$\rho_\infty a_\infty^2 = q/(M^2/2) \\ = \frac{[0.8 \text{ kg/cm}^2 \sim 1.5 \text{ kg/cm}^2]}{(M^2/2)} \quad (22)$$

の範囲の数値を用いなければならない. そこで $\rho_\infty a_\infty^2$ の値として第 1 表に示す 4 通りの値の場合について計算を行なった*.

撓み形としては

第 4 図 固有円振動数と Mach 数の関係
Model 85, $\rho_\infty a_\infty^2 = 3.334 \times 10^{-8}$
kg/mm² の場合

ness-altitude-parameter ($b_0^* \omega_2/a_\infty$) $\sqrt{\mu}$ の値を計算してあるが, これは,

$$\mu = \frac{\text{翼の全質量}}{\pi \rho_\infty \int_0^l b^{*2} dx} \quad (\text{質量比})$$

第 1 表 M_F および f_F

	$\rho_\infty a_\infty^2$ ($\times 10^{-8} \text{ kg/mm}^2$)	$\frac{b_0^* \omega_2}{a_\infty} \sqrt{\mu}$		M_F		f_F (cps)	
		10 項	20 項	10 項	20 項	10 項	20 項
Model 85	1.688	3.770	3.728	5.570	5.416	105.5	103.9
	2.615	3.029	2.995	3.905	3.789	107.8	106.0
	2.785	2.934	2.901	3.703	3.590	108.1	106.3
	3.334	2.683	2.653	3.183	3.084	108.8	107.0
	7.357	1.806	1.786	1.578	1.524	111.5	109.5
Model 90	1.688	3.461	3.422	4.914	4.772	95.13	93.66
	2.615	2.781	2.750	3.414	3.308	97.02	95.39
	3.334	2.463	2.435	2.768	2.679	97.85	96.20
	7.357	1.658	1.639	1.355	1.307	99.82	98.13

* 空气中を飛行する場合, 海面上での値は $\rho_\infty a_\infty^2 = 1.445 \times 10^{-8} \text{ kg/mm}^2$. 高度 1 万米では $\rho_\infty a_\infty^2 = 3.789 \times 10^{-8} \text{ kg/mm}^2$ である.

第5図 Stiffness-altitude parameter と Mach 数の関係，理論値と実験値

ω_2 : 2 次の固有円振動数 (振り 1 次)

として，

$$\frac{b_0^* \omega_2}{a_\infty} \sqrt{\mu} = \left[\frac{b_0^* \omega_2 \times \sqrt{\text{翼の全質量}}}{\sqrt{\pi \int_0^l b^{*2} dx}} \right] \times \frac{1}{\sqrt{\rho_\infty a_\infty^2}} \quad (24)$$

とあらわされ， $\rho_\infty a_\infty^2$ の値から求められる。また第1表には別の実験模型 Model-90 についての計算結果も付記した。この結果から導かれる $(b_0^* \omega_2 / a_\infty) \sqrt{\mu}$ と M_F との関係を第5図に示した。第5図は Model-85 の結果を示しているが，Model-90 の結果もこれとほぼ同一である。第5図には中井ほかの実験値および中井ほかが Model-90 について従来の計算法により3自由度のフラッター問題として求めた理論値を併せて記した。本計算法による値の10項近似と20項近似との差はごくわずかである。したがって項の数はほぼ十分であると考えられる。また本計算法による値は従来の計算法による値とくらべてわずかに実験値に近い程度で大差ない。したがって中井ほかが3次の固有振動モードまでを用いて計算したのは，使用モード数としては妥当であると考えられる。

実験とは傾向は良く一致しているが数値的には計算値の方が約20%位低く出ている。これでは，計算でフラッターが起きないことを保証した stiffness-altitude-parameter でフラッターが起きることになり，危険である。第5図に示した中井ほかの実験点は，(19)式に示したように風洞の動圧の変換範囲に限度があるため，第3図に示した模型だけでなく，板厚は同じで平

第6図 複素固有値問題における Flutter Point の決定
Model 85, $\rho_\infty a_\infty^2 = 3.334 \times 10^{-3} \text{ kg/mm}^2$,
 $a_\infty = 242.1 \text{ m/sec}$ の場合

面形を相似形に変えた5種類の模型についての測定結果である。固定金具の寸法は同一なので，固定部の長さの比率が異なっている。したがって実験値を Model 85 および Model-90 だけについての計算値と比較するのは不完全であるが，計算値が実験値とこの程度違うという大勢には変わらない。

4. 空力的減衰項の影響

空気力の減衰項を省略しないで(21)式の複素数の固有値問題としての計算は，第6図に示すように，(21)式の実数部=0を示す曲線と，(21)式の虚数部=0を示す曲線との交点として求められる。この計算に当たって，風洞実験を対象にした場合は，係数 C_2 の中の $\rho_\infty a_\infty (= \rho_\infty a_\infty^2 / a_\infty)$ すなわち a_∞ の値をどう扱うかという問題が新たに生ずる。超音速風洞では，一次元等エントロピー流の関係式を用いると，貯気槽温度を $T^\circ\text{K}$ ，気体常数を R ，空気の比熱の比 $\gamma=1.4$ と記して，測定断面での音速は

$$a_\infty = \frac{1}{\sqrt{f(M)}}, \quad f(M) = \frac{1+0.2M^2}{1.4RT} \quad (25)$$

と表わされ，さらに(22)式と(25)式とから

$$a_\infty = \sqrt{\frac{1.4RT}{1+0.4q/(\rho_\infty a_\infty^2)}} \quad (26)$$

と q と $\rho_\infty a_\infty^2$ の関係として表わされることが導かれる。そこで q として適当な値を選ぶこととし，そのため中井ほかの実験点の a_∞ と $\rho_\infty a_\infty^2$ との関係をプロットしてみると第7図のようになる。そこで各 $\rho_\infty a_\infty^2$ の値に対して代表点として A_0, B_0, C_0, D_0 点をとっ

第2表 M_F および f_F , 空力的ダンピングの影響 (Model 85 の場合)

	$\rho_\infty a_\infty^2$ ($\times 10^{-3}$ kg/mm ²)	a_∞ (m/sec)	M_F		f_F (cps)	
			10 項 (ϵ_M^* , %)	20 項 (ϵ_M , %)	10 項 (ϵ_f^{**} , %)	20 項 (ϵ_f , %)
A_0	1.688	201.7	5.539 (-0.56)	5.393 (-0.43)	111.2 (5.13)	109.3 (4.94)
B_0	2.615	226.6	3.919 (0.36)	3.805 (0.42)	112.1 (3.84)	110.1 (3.72)
C_0	3.334	242.1	3.211 (0.87)	3.114 (0.96)	112.6 (3.37)	110.5 (3.17)
D_0	7.357	283.4	1.651 (4.22)	1.597 (4.57)	113.8 (2.02)	111.7 (1.97)

$$* \epsilon_M = \frac{M_{F\text{damp}} - M_{F\text{no-damp}}}{M_{F\text{damp}}} \times 100$$

$$** \epsilon_f = \frac{f_{F\text{damp}} - f_{F\text{no-damp}}}{f_{F\text{damp}}} \times 100$$

第7図 風洞実験 Ref. 4) における a_∞ と $\rho_\infty a_\infty^2$ の関係第3表 M_F および f_F , a_∞ の影響
(Model 85 の場合)

	$\rho_\infty a_\infty^2$ ($\times 10^{-3}$ kg/mm ²)	a_∞ (m/sec)	M_F	f_F (cps)
A_1	1.688	194.0	5.395	109.3
A_0		201.7	5.393	109.3
A_2		206.0	5.392	109.3
C_1	3.334	237.0	3.115	110.5
C_0		242.1	3.114	110.5
C_2		248.0	3.112	110.5

て計算した。その結果を第2表に示した。さらに同一の $\rho_\infty a_\infty^2$ の値に対し a_∞ の値が変わった限界の場合として A_1, A_2, C_1, C_2 点についての計算結果を第3表に示したが、第3表は a_∞ の値のとり方による M_F , f_F の差は極めて小さいことを示している。したがって第2表の結果は妥当であることが結論される。第2

第8図 フラッターマッハ数に対する空力的減衰項の影響, Model 85, 10 項近似の場合

表に記した ϵ_M , ϵ_f は、空力的減衰項を考慮しないで求めた値が、考慮して求めた値にくらべてどれだけの差があるかを示したもので、さらにこの ϵ_M とマッハ数との関係を第8図に示した。この図から piston theory が有効とされるマッハ3～4で空力的減衰項の影響は非常に小さく、無視し得ることが結論される。この場合 ϵ_M が正ならば減衰項の省略は安全側の計算ということになる。しかし第8図は $M > 4.5$ で ϵ_M が負である事を示している。減衰項を省略したことが安全側の計算とは限らないということは注目すべき結果である。

5. 部分固定の影響

第3節で述べたように航技研で行なわれた実験模型は $x=0$ 断面の一部は固定されていない。したがって $x=0$ で全部固定とした第2節の解析法による結果と比較するのは不十分である。実験値と計算値との相違はこの事に基因するかも知れないということと、実際の翼でこのような固定条件のものもあり得るということで、第2節の計算法を部分固定の場合に拡張しよう。

第9図のような部分固定の境界条件に対応して撓み形を

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_{mn}^* z^m x^n + w_a(x, z) \quad (27)$$

第9図 部分固定平板翼

S_1 領域;

$$w_a(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m0}^* z^m + x \sum_{m=0}^{\infty} a_{m1}^* z^m \quad (28.1)$$

S_2 領域;

$$w_a(x, z) = 0 \quad (28.2)$$

と仮定する。ここで S_1 領域と S_2 領域の境界 $z=c^*$ なる直線上で、板の変位および傾斜の連続の条件から

$$z=c^*; w_a=0, \frac{\partial w_a}{\partial x}=0, \frac{\partial w_a}{\partial y}=0 \quad (29)$$

が成立たなければならない。(28.1) 式を (29) 式に代入して、 x のいかにかかわらず成り立つための条件として

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m0}^* c^{*m} &= 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_{m1}^* c^{*m} = 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0}^* m c^{*m-1} &= 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{m1}^* m c^{*m-1} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

が導かれる。つまり a_{m0}^* , a_{m1}^* は全く任意ではなくこの4つの条件を満たさなければならず、したがって未知数の数は4つ減少することになる。

第2節と同様の計算を行なうことによりフラッター

$$\left. \begin{aligned} b_0(\xi) &= [2k\mu_r \{ns(n-1)r\}] \xi^{n+s-3} \\ b_1(\xi) &= [-2(2k^2+1-\nu)\mu_r \{mnrs\}] \xi^{n+s-2} \\ b_2(\xi) &= [2k(1+k^2)\mu_r \{mrs(m-1)\}] \xi^{n+s-1} \\ c_0(\xi) &= [2k\mu_{mn} \{ns(s-1)m\}] \xi^{n+s-3} \\ c_1(\xi) &= [-2(2k^2+1-\nu)\mu_{mn} \{mnrs\}] \xi^{n+s-2} \\ c_2(\xi) &= [2k(1+k^2)\mu_{mn} \{mrn(r-1)\}] \xi^{n+s-1} \\ d_1(\xi) &= [2(2k^2+1-\nu)\mu_{mn} \{mnrs\}] \xi^{n+s-2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここで

$$\left\{ \begin{aligned} p=2, \quad q=0, 1; \quad \mu_{pq} &= c \\ p=3, \quad q=0, 1; \quad \mu_{pq} &= c^2 \\ q \geq 2 &; \quad \mu_{pq} = 0 \end{aligned} \right. \quad (36)$$

を用いて

第10図 部分固定平板翼

行列式(21)式に到達するが、この場合の A_{mnrs} などの計算式は、ここでは w_a として

$$w_a = \sum_{r=0}^3 a_{r0} \xi^r + \xi \sum_{r=0}^3 a_{r1} \xi^r \quad (31)$$

を用いた場合について示す。8個の未定係数は(30)式の条件を用いてつぎの4個にまとめられる。

$$\begin{aligned} w_a &= (\xi-c)^2 a_{20} + (\xi-c)^2 (\xi+2c) a_{30} \\ &+ \xi [(\xi-c)^2 a_{21} + (\xi-c)^2 (\xi+2c) a_{31}] \end{aligned} \quad (32)$$

ここで $c=c^*/l$

A_{mnrs} などの計算式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{mnrs} &= \int_0^u A_c d\xi \\ F_{mnrs}^{1A} &= \int_0^u F_c^{1A} d\xi, \quad F_{mnrs}^{1B} = \int_0^u F_c^{1B} d\xi \\ F_{mnrs}^{2A} &= \int_0^u F_c^{2A} d\xi, \quad F_{mnrs}^{2B} = \int_0^u F_c^{2B} d\xi \\ D_{mnrs} &= \int_0^u D_c d\xi \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここで上限 u は第10図に示すように $z=c^*$ 線が前縁を切るか切らないかによって

$$\left\{ \begin{aligned} |c| \leq \beta_1; \quad u &= 1 \\ |c| > \beta_1; \quad u &= d \equiv (c+\beta_0)/\beta_0 r_\beta \end{aligned} \right. \quad (34)$$

である。 A_c などは(19)式の $a_0(\xi)$ などのほかに

(a) 1次振動 10項近似 45.42 cps
 20項近似 45.31
 部分固定 14項近似 45.32

(b) 2次振動 10項近似 124.9 cps
 20項近似 123.5
 部分固定 14項近似 124.5

(c) 3次振動 10項近似 260.0 cps
 20項近似 255.9
 部分固定 14項近似 259.4

第11図 翼弦の正規化変位, Model 90の場合

実線: 10項近似完全固定
 破線: 20項近似完全固定
 点線: 14項近似部分固定

第12図 節線, 完全固定と部分固定の比較

$$\begin{aligned}
A_c &= \int_{-\beta}^v \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 \{ a_0 \zeta^{m+r} + a_1 \zeta^{m+r-1} \\
&\quad + a_2 \zeta^{m+r-2} + a_3 \zeta^{m+r-3} + a_4 \zeta^{m+r-4} \} \\
&\quad + \{ b_0 \zeta^m + b_1 \zeta^{m-1} + b_2 \zeta^{m-2} \} \\
&\quad + \{ c_0 \zeta^r + c_1 \zeta^{r-1} + c_2 \zeta^{r-2} \} + d_1 \} d\zeta \\
F_{\zeta}^{1A} &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^v r (\zeta^{r-1} - \mu_{r1}) f_{mn} \xi^{n+s} d\zeta \\
F_{\zeta}^{1B} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{4} \int_{-\beta}^v \frac{\partial h}{\partial \eta} r (\zeta^{r-1} - \mu_{r1}) f_{mn} \xi^{n+s} d\zeta \\
F_{\zeta}^{2A} &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^v f_{mn} f_{rs} \xi^{n+s} d\zeta \\
F_{\zeta}^{2B} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{4} \int_{-\beta}^v \frac{\partial h}{\partial \eta} f_{mn} f_{rs} \xi^{n+s} d\zeta \\
D_c &= \int_{-\beta}^v \frac{h}{h_0} f_{mn} f_{rs} \xi^{n+s} d\zeta
\end{aligned} \quad (37)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
q \geq 2; \quad f_{pq} &= \zeta^p \\
p=2, \quad q=0, 1 \\
\left\{ \begin{array}{l} S_1 \text{ 領域}; f_{pq} = (\zeta - c)^2 \\ S_2 \text{ 領域}; f_{pq} = 0 \end{array} \right. \\
p=3, \quad q=0, 1 \\
\left\{ \begin{array}{l} S_1 \text{ 領域}; f_{pq} = (\zeta - c)^2 (\zeta + 2c) \\ S_2 \text{ 領域}; f_{pq} = 0 \end{array} \right.
\end{aligned} \right\} \quad (38)$$

積分の上限 v は

$$v = \left\{ \begin{array}{l} c: (m=2, n=0, 1, \quad r, s \text{ 任意}) \\ \quad (m=3, n=0, 1, \quad r, s \text{ 任意}) \\ \quad (r=2, s=0, 1, \quad m, n \text{ 任意}) \\ \quad (r=3, s=0, 1, \quad m, n \text{ 任意}) \\ \beta: n, s \text{ 共に 2 以上の場合} \end{array} \right. \quad (39)$$

ここで n および s がともに 2 以上の場合の $A_c, F_{\zeta}^{1A}, F_{\zeta}^{1B}, F_{\zeta}^{2A}, F_{\zeta}^{2B}, D_c$ は (20) 式に示したものと同等である。それ以外の 8 つの場合だけ h の分布 (16) 式を (37) 式に代入して求められる。

前節で空力的減衰項の影響が小さいことが明らかにされたので、部分固定の影響を数値計算するに当たって、空力的減衰項を省略して、実数の固有値問題とし

第4表 部分固定の影響
14 項近似, 空力的ダンピング項省略

	$\frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\times 10^{-3}}$ (kg/mm ²)	$\frac{b_0^* \omega_s}{a_\infty} \sqrt{\mu}$	M_F	f_F (cps)
Model 85	1.688	3.758	5.516	104.7
	2.615	3.020	3.866	106.9
	3.334	2.675	3.149	108.1
	7.357	1.801	1.561	110.6
Model 90	1.688	3.450	4.846	94.57
	2.615	2.772	3.364	96.37
	3.334	2.455	2.726	97.21
	7.357	1.653	1.333	99.22

て計算した。計算結果を第4表に示した。この結果をプロットすると、第5図の完全固定の計算結果とほとんど同一で、わずかに実験値側である。この程度の部分固定ではその影響が非常に小さいことが明らかにされたものと考えられる。この理由を理解する助けとして振動モードがどの程度変わるかの計算結果を第11図、第12図に示した。これらの図から、部分固定の影響は固定されない部分にのみあらわれているにすぎないことがわかる。すなわち振動モード、振動数ともにあまり影響を受けていないからフラッター速度も余り変わらないと考えられる。

6. 結 論

板翼の超音速フラッター速度を、固有振動モードに関する知識なしに直接求める方法を提案し、従来の計算法による計算値や実験値と比較した結果、このような計算法が十分実用性をもつことが示されたものと考えられる。本論文では板翼について示したが、このような計算法は構造翼にも適用することができる。実験値と計算値との差は、本論文では追求しなかつた空気力として piston theory を用いたことによるものと考えられる。今後の課題として、計算精度を高めるためには空気力の取り扱いについて検討しなければならない。

本研究を御指導いただいた林毅教授に厚く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) H. ASHLEY and G. ZARTARIAN: Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician. J. A. S., Vol. 23, No. 12, pp. 1109-1118 (1956-12).
- 2) H. G. MORGAN, H. L. RUNYAN and V. HUCKEL: Theoretical Considerations of Flutter at High Mach Numbers. J. A. S., Vol. 25, No. 6, pp. 371-381 (1958-6).
- 3) H. G. MORGAN, V. HUCKEL and H. L. RUNYAN: Procedure for Calculating Flutter at High Supersonic Speed Including Camber Deflections and Comparison with Experimental Results. NACA TN-4335 (1958-9).
- 4) E. NAKAI, T. TAKAGI, K. ISOGAI and T. MORITA: Experimental and Calculated Results of Supersonic Flutter Characteristics of a Low-Aspect-Ratio Flat-Plate Surface. NAL TR-125T (1967-1).
- 5) E. C. YATES Jr.: Subsonic and Supersonic Flutter Analysis of a Highly Tapered Swept-Wing Planform Including Effects of Density Variation and Comparison with Experiments. NASA TN-4230 (1967-11).
- 6) R. L. BISPLINGHOFF and J. DUGUNGI: Influence of Aerodynamic Heating on Aeroelastic Phenomena. High Temperature Effects in Aircraft Structures. AGARDograph No. 28, Chapter 14, pp. 288-312 (1958).

- 7) H. L. RUNYAN and N. H. JONES: Effects of Aerodynamic Heating on the Flutter of a Rectangular Wing at a Mach Number of 2. NASA TN D-460 (1960-6).
- 8) J. M. GROEN and R. ROSECRANS: Effect of Aerodynamic Heating on the Flutter of a Thin Flat-Plate Arrow Wing. NASA TN D-1788 (1963-5).
- 9) S. KOBAYASHI: Flutter of Wings Subjected to Aerodynamic Heating. Trans. of Japan Society for Aeronautical and Space Science, Vol. 5, No. 7 (1962-7).
- 10) 林 邦夫, 小林繁夫: 後退板翼の固有振動の一解折法. 第5回構造強度に関する講演会講演集 (1963).
- 11) C. E. Watkins and J. H. Berman: On the Kernel Function of the Integral Equation Relating Lift and Down-wash Distributions of Oscillating wings in Supersonic Flow. NACA TN-3438 (1955-5).
- 12) M. T. LANDAHL and V. J. E. STARK: Numerical Lifting Surface Theory—Problems and Progress. AIAA J., Vol. 6, No. 11, pp. 2049-2060 (1968-11).
- 13) J. M. HEDGEFETH: Flutter of Rectangular Simply Supported Panels at High Supersonic Speeds. J. A. S., Vol. 24, No. 8, pp. 563-573 (1957-8).
- 14) 川井忠彦, 堀 武敏, 戸川隼人, 高橋利之, 越出慎一: 平板翼の振動について, NAL TR-30 (1962-10).
- 15) 中井暎一, 森田甫之: 平板翼模型の固有振動モードの測定, NAL TM-104 (1967-4).

表紙写真説明

VTOL 機の垂直離着陸およびホバリング飛行を研究するためのフライング・テスト・ベッド (全長 10m,

全幅 7 m, 全高 3 m, 全備重量約 2,200 kg, 乗員 1 名, エンジン JR 100 F 2 基) は昭和 44 年 11 月 21 日から 29 日にかけて, 宮城県にある角田支所において, はじめて有人飛行を行ない, 高度制御実験に成功した。

機体は 2 本のガイド・レールに沿って上昇下降させ, 高度制御はエンジンの推力で行ない, また加速度制御を主体とする三重系自動安定装置を装備した。

実験は整備ならびに慣熟運転を 23 回行なった後, 上昇降下実験を 7 回行なった。最大高度 2.15m, 最大上昇速度 0.3 m/s, 最大下降速度 0.5 m/s, 平均滞空時間約 2 分 25 秒であった。(滝沢直人)

微小焦点 X 線回析ならびに細束 X 線 回析技術に関する講習会

主催: 日本材料学会

協賛(予定): 日本機械学会, 日本金属学会, 日本鉄鋼協会, 日本非破壊検査協会, 溶接学会, 高分子学会, 応用物理学会, 精機学会, 日本造船学会, 日本航空宇宙学会

期日: 昭和45年5月30日(土)~6月2日(火) 4日間

会場: 京都工業会館

京都市右京区西京極町の坪町(西大路五条西入ル下ル) TEL. 075-(313)-0751 (代表)

計 画 書

社団法人 日本材料学会

1. 国際会議の名称

和文名 材料の力学的挙動に関する国際会議
(略称: 材料国際会議)

欧文名 International Conference on Mechanical Behavior of Material
(略称: ICM)

2. 開催期日

昭和46年8月15日~20日(金)

3. 開催場所

国立京都国際会館(京都市左京区宝ヶ池)

4. 計画の概要

材料の巨視的力学的な挙動と化学構造や微視的挙動との関連についての研究成果の報告および討論を目的とする。

5. 予想される規模

予定参加国 日本ほか, 20数ヶ国

6. 主催・協賛および後援

主催 日本材料学会

協賛学協会, 化学工, 火力発電技術, 高分子繊維, 土木, 化学, 化学繊維, 機械, 金属, 建築, 航空宇宙, 鋼構造, ゴム, ゴム工業, 造船, 鉄鋼, 非破壊検, 窯業, 溶接, 材料破壊国際(ICF) その他。

後援(予定) 日本学術会議

7. 組織

組織委員会委員長

広田寿一(日本材料学会会長)

実行委員会委員長

平 修二(京都大学教授)