圧縮性流体力学における数値計算*

Numerical Calculations for Compressible Fluid Dynamics

里 深 信 行**

Nobuyuki SATOFUKA

1. ま え が き

電子計算機の最近の進歩にともない、従来実行不可能であった複雑な数値計算が可能となった。流体力学においても非圧縮性粘性流に対する NAVIER-STOKES 方程式の数値解、大気および海洋の大循環の数値計算あるいは乱流やプラズマの数値シミュレーションといった非常に広い範囲の分野において多種多様な数値計算が試みられている。このような広い分野にわたる数値計算の解説を行なうのは著者 1 人の能力のおよぶところではなく、また紙面の制限もあり、ここでは主に圧縮性流体力学における数値計算、とくに人工粘性を用いた方法によるものに限定し、その現状の紹介と解説を行なうことにする。

圧縮性流体の流れは質量、運動量およびエネルギーの保存を記述する非線形偏微分方程式と熱力学変数を関係づける状態方程式により支配される。したがって解析的な解が得られるのはごく特殊な場合に限られ、電子計算機を用いて数値的に解くのが一般的な方法となる。ところが、このような流れでは如何に滑らかな初期条件を与えても流速がある程度以上になると、非線形性のために流れのパラメータの不連続面として衝撃波が形成される。もし衝撃波面を横切って数値計算をおこなおうとすると解に振動が生じ、それが成長してついには計算が破滅してしまう結果となる¹⁾。したがってはじめから衝撃波を不連続面として取り扱うためには、衝撃波を内部境界面とし、その前後の滑らかな流れの領域の解を衝撃波面上で RANKINE-HUGONOT 関係式を用いて接続するという手続きが必要となる。しかしながら衝撃波の位置、形、強さなどは支配する方程式を初期条件、境界条件とともに解いてはじめて決定されるものであるから、衝撃波が何時、何処に発生するかは前もってわからない場合が多い。したがって一般には非常に複雑なアルゴリズムをもった繰

り返し計算が必要となり、今日の電子計算機を用いても実用的ではない。そこで衝撃波上で内部境界面としての特別な取り扱いの必要でない方法を工夫することが要求される。

実在流体においては粘性、熱伝導性などの散逸過程が存在するために、衝撃波は不連続面としてではなく流れのパラメータが急激ではあるが連続的な変化をしめすある巾をもった層として観測される。このような事実に着目して 1950 年に VON NEUMANN と RICHMYER²⁾ は、これら実際の散逸過程における粘性と類似の効果をもつ項（人工粘性項）を流体力学方程式の圧力項に陽的に導入し、その効果により衝撃波が本来存在すべき位置に自動的に形成されるような方法を提案した。その後 1954 年に LAX³⁾ は保存形で表示した流体力学方程式に対して適当な差分近似をおこなうと、網目巾に比例した人工粘性係数をもった項が陰伏的に導入され、そのような差分方程式の解が、網目巾がある条件のもとで 0 に近づいた極限では、もとの微分方程式の弱い解（不連続をふくむ解）に収束することを示した。

人工粘性項を導入することにより衝撃波の存在に対して特別の考慮をはらう必要をなくした方法はその後多くの人々により提案されてきたが、それらのうちで代表的なものは

- (I) 1 次精度のもの
 - a. LAX 差分法^{3), 4)}, RUSANOV 差分法⁵⁾, GODUNOV 差分法⁶⁾
 - b. PIC 法⁷⁾⁻¹⁰⁾, FLIC 法¹¹⁾
- (II) 2 次精度のもの
 - a. LAX-WENDROFF 差分法^{12), 13)}
 - b. 2 段階 LAX-WENDROFF 差分法¹⁴⁾⁻¹⁶⁾

などがある。以下ではこれらの方法の概略を説明し、その応用例をいくつか示すことにする。

上に述べた方法はすべて時刻 $t + \Delta t$ における値がそれ以前の時刻の値から直接計算できるいわゆる陽的差分法 (explicit difference method) である。これに

* 昭和 45 年 2 月 19 日原稿受理

** 京都工芸繊維大学工学部機械工学科

対し、時刻 $t + \Delta t$ における値を求めるのに多元連立方程式を解いたり、反復計算をおこなう必要のある陰伏の差分法 (implicit difference method) もあるが、ここでは前者のみに限って取り扱うことにする。

2. 計算方法

2.1 基礎方程式 前節で分類した方法のうち PIC 法および FLIC 法をのぞけば他はすべて保存形で表示した圧縮性流体に対する双曲型方程式を基礎にしている。したがって個々の差分法の紹介にはいるまえに、保存形で表示した基礎方程式をしめそう。簡単のため、この節での議論はすべて理想気体の 1 次元流れを例にとることにする。また、流体力学における表示には EULER 的表示と LAGRANGE 的表示があり、対象とする問題によりそれぞれ一長一短がある¹⁷⁾。LAGRANGE 表示による計算も幾つか成功裡におこなわれている¹⁸⁾が、ここでは 2 次元以上の問題への適用性を考慮して、EULER 表示を採用することにする。

圧縮性流体の基礎方程式は保存形で表示すると

$$w_t + f_x = 0 \quad (1)$$

のように書ける。ここで、 w, t はそれぞれ

$$w = \begin{bmatrix} p \\ m \\ e \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} m \\ (m^2/\rho) + p \\ (e + p)m/\rho \end{bmatrix} \quad (2)$$

のようなベクトルである。ただし、 $m = \rho u$, $e = \rho(I + u^2/2)$ 。(1)式はまた、つぎのように書き換えられる、

$$w_t + Aw_x = 0 \quad (3)$$

ここで、 A は f の w に関するヤコビアンである。

さて、微分方程式 (1) に対する差分近似はすべて

$$w(t + \Delta t) = w(t) + \Delta t \cdot w_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} w_{tt} + \frac{(\Delta t)^3}{6} w_{ttt} + \dots \quad (4)$$

のような展開から出発する。初期値問題を解くことになるから、(4)式の右辺の時間微分を (1)式または (3)式により空間微分書き換えると、

$$w(t + \Delta t) = w(t) - \Delta t \cdot Aw_x + \frac{(\Delta t)^2}{2} (A^2 w_x)_x - \frac{(\Delta t)^3}{6} (A^3 w_x)_{xx} + \dots \quad (5)$$

となる。

ここで、(4)式の展開における w_t の項まで正しく近似した差分法を 1 次の精度、 w_{tt} の項まで正しく近似したものを 2 次の精度と呼ぶことにする。そうすると、一貫した精度を保持するためには、(5)式における空間微分を差分商でおきかえるときの誤差が (4)式における打ち切り誤差より低次であってはならないことに注意しなければならない。

2.2 LAX 差分法, RUSANOV 差分法, GODUNOV 差分法 これらの差分法は、(4)式の展開における w_t

の項までは正しく近似し、 w_{tt} の項を人為的な拡散項 (人工粘性項) で置き換えた式に対する中心差分近似であって、それぞれ人工粘性係数の形が異なるだけである。したがって以下に示すような統一的な取り扱いが可能である¹⁹⁾。

(5)式において $(\Delta t^2/2)(A^2 w_x)_x$ の項を $(\Delta x^2/2) \times (\kappa w_x)_x$ で置き換え、さらに空間微分を中心差分で書き換えると、

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\lambda}{2} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \{ \kappa_{j+1/2}^n (w_{j+1}^n - w_j^n) - \kappa_{j-1/2}^n (w_j^n - w_{j-1}^n) \} \quad (6)$$

と書ける。ただし、

$$\kappa_{j \pm 1/2}^n \equiv (\kappa_j^n + \kappa_{j \pm 1}^n)/2 \quad (7)$$

ここで、 j は x 方向格子番号、 n は計算周期数として λ は時間と空間の網目巾の比、 $\Delta t/\Delta x$ である。

(6)式の amplification matrix は

$$G = \{1 - \kappa(1 - \cos \alpha)\} I - i\lambda A \sin \alpha \quad (8)$$

であらわされる。ここで、 $\alpha = 2\pi \Delta x/l$ であり、 l は x 方向の振動の波長である。行列 A の固有値の最大値を a とすると、amplification matrix の固有値の 2 乗の最大値は、

$$g^2 = 1 - 4 \left\{ \kappa - \lambda^2 a^2 - (\kappa^2 - \lambda^2 a^2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (9)$$

となり、これより VON NEUMANN の安定条件が

$$\lambda^2 a^2 \leq \kappa \leq 1 \quad (10)$$

となることは容易に導かれる。安定性は採用された κ_j^n の値に対して、任意の点 x_j で、任意の時刻 t^n において (10) 式が成立すると達成されるから、 $\sigma_j^n \equiv \lambda a_j^n$ と定義すると、

$$(\sigma_{jn})^2 \leq \kappa_j^n \leq 1 \quad (11)$$

となる。(11)式の条件から、 κ_j^n をつぎのように表示できることがわかる、

$$\kappa_j^n = \varphi^n \sigma^n \left(\frac{\sigma_j^n}{\sigma^n} \right)^N, \quad N=0, 1, 2 \quad (12)$$

ここで、 $\sigma^n = \max_j \sigma_j^n$ は COURANT 数である。

κ_j^n に対する (12) 式の表示から、(11) 式の安定条件は φ^n によってつぎのようにあらわされる。

$$\sigma^n \leq \varphi^n \leq 1/\sigma^n \quad (13)$$

(13) 式の制限を満たす φ^n のうち、上、下限および 1 の 3 つの値が重要であり、 φ^n の値と N の値の組み合わせによって (6) 式の差分法を分類することができる。その結果を第 1 表に示す。

2.3 LAX-WENDROFF 差分法, 2 段階 LAX-WENDROFF 差分法 (4) 式の展開における w_{tt} の項まで正しく近似した 2 次精度の差分法は LAX と WENDROFF¹²⁾

第1表 差分法の分類

φ^n	$1/\sigma^n$	1	σ^n
N			
0	LAX 差分法		
1		RUSANOV 差分法 GODUNOV 差分法	
2		VAN LEER 差分法	

によって 1960 年に提案された。その方法は 1 次元の場合、

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\lambda}{2} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} \{A_{j+1/2}^n (f_{j+1}^n - f_j^n) - A_{j-1/2}^n (f_j^n - f_{j-1}^n)\} \quad (14)$$

と書ける。この差分法はたしかに精度はよいが、行列 A の計算に時間がかかりすぎてそのままではあまり実用的でないことがわかった。そこで RICHTMYER¹⁴⁾ は、 w_j の中間的な予想値 $\tilde{w}_j^{n+1}$ をまず計算し、 $\tilde{w}_j^{n+1}$ と w_j^n を用いて w_j^{n+1} を計算するように計算過程を 2 段階にわけることによって行列 A の計算を不要にした方法を提唱した。この方法は 2 段階 LAX-WENDROFF 法と呼ばれ、その後 BURSTEIN ら^{15), 16)} によりいくつかの変形が提案されてきた。これらの 2 段階法はすべて、一つのパラメータ r により統一的に取扱うことができる²⁰⁾。2 段階法によると (14) 式は

$$\text{第 1 段階 } \tilde{w}_j^{n+1} = w_j^n - \lambda r (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \quad (15)$$

$$\text{第 2 段階 } w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\lambda}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4r} \right) (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) - \frac{1}{4r} (\tilde{f}_{j+1}^{n+1} - \tilde{f}_{j-1}^{n+1}) \right\} \quad (16)$$

と書き換えられる。ここで、

$$w_j^n \equiv (w_{j+1}^n + w_{j-1}^n)/2 \quad (17)$$

差分法 (15), (16) 式の amplification matrix は

$$G = I - \frac{1}{2} \lambda^2 A^2 \sin^2 \alpha - \lambda A i \sin \alpha \left\{ 1 + \frac{1}{4r} (\cos \alpha - 1) \right\} \quad (18)$$

となるから、固有値 g^2 は

$$g^2 = 1 - \lambda^2 a^2 \sin \alpha \left\{ 1 - \frac{\lambda^2 a^2}{4} \sin^2 \alpha - \left(1 - \frac{1}{2r} \sin^2 \alpha \right)^2 \right\} \quad (19)$$

で与えられる。したがって、VON NEUMANN の安定条件より、

$$\lambda a \leq 1/\sqrt{r}, \quad r \geq 1/4 \quad (20)$$

を得る。CFL 条件は $\lambda a \leq 2$ であるから、 $r=1/4$ のとき (20) 式は CFL 条件と一致する。

2.4 PIC 法および FLIC 法 これらの 2 方法は、上に述べてきた各方法とは異なる発想から提案された方法で、保存形表示でない基礎方程式を出発点としている。

PIC (particle-in-cell) 法は EULER 的方法と LAGRANGE 的方法を巧妙に組合せたもので、空間に固定した EULER 格子 (cell) 内に流体をあらわす LAGRANGE 粒子を配置、まず流体力学方程式から輸送項を省略した方程式を用いて各 cell に対する流れのパラメータの中間的な値を予測し、つぎにその値にしたがって粒子が cell 境界を横切って運動することにより、輸送効果による修正をおこない Δt 後の時刻における流れ場を計算する。以上の計算過程から明らかなように、この方法が最も威力を発揮するのは 2 種以上の流体が存在する場合に対してであり、流体が 1 種の場合には流体を粒子で表示することの利点はほとんどなく、むしろ cell に対する情報と粒子に対する情報の両者を計算、記憶しなければならないだけ他の方法に比し不利である。

FLIC (fluid-in-cell) 法は PIC 法の上記の欠点をなくするために、流体に対する粒子表示をやめ、流体の輸送効果の計算に際して連続の方程式を陰伏的に用いることにより粒子に対する量の計算、記憶を不要にしたものであって、RICH²¹⁾ や GENTRY, MARTINE, DALY¹¹⁾ により提案された。

3. 圧縮性流体力学問題への応用とその問題点

前節で述べた各方法は、それぞれ現在までに多くの圧縮性流体力学の問題に成功裡に適用されてきた。それらの応用例は定常問題においては鈍頭物体^{21)~28)}、遷音速^{29), 30)} および後流^{31), 32)} の問題に分類され、非定常問題は反射³³⁾、回折^{34)~36)}、伝播^{37), 38)} および物体との干涉^{39)~42)} といった、いわゆる衝撃波現象と高速、超高速衝突の問題^{43)~51)} に大別できる。第 2 表にはそれらの応用例の分類を示すが、1 次元問題に対するものは表から省いてある。なお報告者氏名に付した数字は巻末の参考文献番号である。定常問題の 3 者がいずれも超音速領域と亜音速領域の共存する混合流問題であるのは興味深い。このような問題は定常の取り扱いでは超音速領域と亜音速領域で支配する方程式の型が異なるために、普通よく用いられる特性曲線法などの方法が全領域にわたっては適用できず、また衝撃波の位置、形状があらかじめ知られていないので禁止的に複雑な繰返し計算が必要になる。したがって、むしろ非定常の取り扱いをして、定常解を $t \rightarrow \infty$ の漸近解として求める方が数学的な困難が少なく、また計算時間の面でも妥当であると認められる。鈍頭物体問題

第2表 計算結果の分類

分 類	次 元	問 題 類		報 告 者	方 法	
鈍 頭 物 体	2 次 元	円 柱 前 向 90° Step Power Law Body		EVANS and HARLOW ²²⁾ BOHACHEVSKY and RUBIN ²³⁾ LAPIDUS ²⁴⁾	PIC Lax 2 Step L-W	
	軸 対 称	平 頭 円 柱		EVANS and HARLOW ²⁵⁾ BURSTEIN ²⁶⁾ BOHACHEVSKY and RUBIN ²³⁾	PIC 2 Step L-W Lax	
		球および球-円錐 円 錐 - 円 柱		MASSON, TAYLOR and FOSTER ²⁷⁾ RICH ²¹⁾	GODUNOV FLIC	
	3次元	アポロ型カプセル		BOHACHEVSKY and MATES ²⁸⁾	Lax	
遷 音 速	2 次 元	翼 型		SINGLETON ²⁹⁾ MAGNUS, GALLAHER and YOSHIMURA ³⁰⁾	L-W L-W	
後 流	〃	90° 後 向 Step 10° Wedge		AMSDEN and HARLOW ³¹⁾ ERDOS and ZAKKAY ³²⁾	PIC 2 Step L-W	
衝 撃 波 現 象	反 射	2次元	Mach 反 射	BURSTEIN ³³⁾	L-W	
	回 折	〃	90° 後 向 Step 90°Step+Cross Flow	HARLOW, その他 ³⁴⁾ 広瀬・里深・河村 ³⁵⁾ TYLER and ZUMWALT ³⁶⁾	PIC FLIC RUSANOV	
	伝 播	〃	Z 型トンネル 諸形状トンネル	GENTRY, MARTIN and DALY ³⁷⁾ TYLER ³⁷⁾	FLIC RUSANOV	
		軸対称	破膜後の衝撃波の形成 と伝播	里深・河村 ³⁸⁾	FLIC	
	物体との干渉	2次元	角 柱	BUTLER ³⁹⁾	FLIC	
		軸 対 称	平 頭 円 柱	GENTRY, MARTIN and DALY ³⁷⁾ BUTLER ³⁹⁾	FLIC 〃	
			球 状 気 泡 30° 円 錐 円 錐 - 円 柱 球・回転楕円体	EVANS, HARLOW and MEIXNER ⁴⁰⁾ GENTRY, MARTIN and DALY ³⁷⁾ EATON and ZUMWALT ⁴¹⁾ McNAMARA ⁴²⁾	PIC FLIC RUSANOV GODUNOV	
高 速 ・ 超 高 速 衝 突	2次元	金属ジェットの形成		HARLOW and PRACHT ⁴³⁾	PIC	
	軸 対 称	弾 丸		標 的	BJORK, その他 ^{44), 45)} MACCORMACK ⁴⁶⁾	PIC 2 Step L-W
		円 柱	Al, Iron Al	Al, Iron Al		
		球	Al Steel Al, Cu Al, Au, Cd	2 層 板 〃 Al, Cu Al, Cu, Cd	RINEY and HALDA ⁴⁷⁾ KREYENHAGEN, その他 ⁴⁸⁾ BILLINGSLEY ⁴⁹⁾ ROSENBLATT, その他 ⁵⁰⁾	PIC PIC, FLIC FLIC PIC, FLIC
			3次元	立方体	Al	Al

において平頭円柱、円錐-円柱といった鋭い角をもつ物体形状が多く選ばれているのが目立つが、これはそのような形状に対しては、inverse method などの鈍頭物体に対する有力な方法が適用できないので、ここで述べた方法がほとんど唯一の適用可能な方法であるためと思われる。しかし表に示した計算例においても、円錐先端あるいは角部より解に振動が入り、計算が不安定になるという結果が報告されている²⁶⁾。したがって、これらの方法における特異点の適当な取り扱いかたは今後に残された一つの大きな問題である。鈍

頭物体問題におけるもう一つの問題点は、任意の形状の物体を取り扱う場合に一般には物体表面が格子点と一致しないために、そこでの物理的に妥当な境界条件の設定に困難が生じることである。このような場合には、何らかの内挿が必要となり計算の精度が悪くなるばかりでなく、しばしば計算が不安定になる。この点で保存形を保持しつつ、物体表面を計算領域の一辺に射像する座標変換をおこなっている LAPIDUS の計算²⁴⁾は注目し値する。鈍頭物体の計算は、計算機の記憶容量および計算時間の制限から 2 次元または軸対称の問

題に限られてきたが、LAX 法を迎え角をもった軸対称物体に適用した BOHACHEVSKY と MATES の計算²⁸⁾ は3次元への拡張の先駆的な仕事として特筆すべきものである。第1図にその結果の一部を示す。彼らの計算は、境界条件の設定の面を考慮してアポロ・カプセルのような、物体表面が球座標面と一致する特殊な物体形状を選んでいるが、IBM 7090 程度の計算機で40時間ぐらいかかる膨大な計算であり、一般形状の物体に対しての方法を適用するには問題がある。そのような問題には、衝撃波を不連続面として扱い、その時々刻々の変化を特性方程式により計算し、一方、衝撃波と物体表面間を適当な座標変換により長方形格子に分割、各格子点における流れのパラメータの値を LAX-WENDKOFF 法類似の差分法で計算する MORETTI の方法^{52), 53)}が計算精度、時間の面から現状では最も適当ではないかと考えられる。また、彼は物体表面における境界条件の設定法として、差分法で従来用いられ

てきた反射原理 (reflection principle) が、2次元以上の場合には、物理的に正しくない境界条件を課すことになり、計算の不安定性の原因になること、したがって、物体表面上の値は採用した差分法とは独立に、修正特性曲線法を用いて計算する必要があることを強調している⁵⁴⁾。上に述べた2つの境界条件の設定法による、 $M_\infty=4$ における球状頭部をもつ鈍頭物体まわりの圧力分布の計算結果を第2図に比較してある。破線は修正特性曲線法、実線が反射原理による結果であり、対称軸 ($\theta=0$) からはずれるにつれ、反射原理の結果が急速に悪くなるのが認められる。

遷音速問題への応用は、2~3の試験的な計算結果^{29), 30)}が報告されているが、いずれも満足すべき結果が得られているとはいえない。この問題には2つの大きな困難がある。その第1は、LAX-WENDROFF 法などの高精度差分法によると臨界速度近傍では、攪乱の減衰が悪くなり、初期条件と定常解のずれを極めて小

(a) 座 標 系

(b) 対称面における衝撃波の形状

(c) 球状頭部表面における流線模様

第1図 3次元物体に対する計算, BOHACHEVSKY²⁸⁾

第2図 計算結果におよぼす境界条件の効果, MORETTI⁵⁴⁾

さくしないと、定常解に収束しなくなることである。1次精度の差分法では、このような現象は起こらないが、人工粘性項の効果が大きすぎて翼面での衝撃波の発生といった、遷音速特有の現象を隠蔽してしまう危険がある。このような困難をさけるには、任意の初期条件からでも収束が保障されるほど小さいマッハ数での定常解を求め、その定常解を初期条件にして、それよりわずかに大きいマッハ数での定常解を求めるといった過程を繰り返す必要があり、目的とするマッハ数での解を得るのに要する計算時間が禁止的に大きくなる。第2の困難は、計算機の記憶容量が有限であることから生じるもので、翼などの近傍で分解能を良くしようとすると、計算領域の各境界を翼から十分離れたところに設定することができなくなる。自由流のマッハ数が1より大きい場合には、攪乱は前方へ伝播しないので、この問題は、上方境界での取扱いをのぞき、大きな困難をもたらさないが、自由流のマッハ数が1以下になる遷音速問題においては、攪乱の前方への伝播のために、前方境界において常に自由流条件を保持させるという、普通に用いられる境界条件の設定法が物理的に正しくなくなり、初期条件の選び方によって、前方に伝播する攪乱と前方境界との干渉により、計算の破滅がおこる。この困難を根本的に解決するには、無限領域を有限な計算領域内に射像するような座標変換をおこない、無限遠方で厳密な境界条件を課すことが可能であるようにすることが考えられるが、そのようにして計算をおこなった例は、現時点ではまだない。

衝撃波の伝播および干渉の問題は、人工粘性を用いる方法が最もよく応用されている分野の一つであり、実際複雑な形状をした流路内での伝播や多数の衝撃波相互間の干渉を含む問題に対しては、これらの方法が

最も適したものの一つであるといえる。この分野の計算結果の例として、著者らのおこなった軸対称衝撃波管内における有限時間の破膜過程にともなう、衝撃波の形成、伝播の模様に対する結果³⁸⁾と、TYLERのおこなったL型トンネル内での衝撃波の伝播に対する結果³⁷⁾を、それぞれ第3図、第4図に示す。著者らの計算は、有限な時間での破膜過程を、段階的に開口部が増大する剛体膜モデルで近似し、初期圧力比と到達マッハ数の関係、破膜時間と衝撃波の形成距離との関係などを求めたもので、初期圧力比と到達マッハ数の関

(a) 破膜過程のモデル

(b) 格子配列

(c) 各時刻における衝撃波面の位置

第3図 衝撃波管中における衝撃波の形成、伝播の数値計算, 里深・河村³⁸⁾

第4図 L字形トンネル中の爆風の伝播, TYLER³⁷⁾

係は、生井と松尾の多段モデル⁵⁵⁾による結果と極めてよく一致する結果を得た。また、衝撃波の形成距離についても、管径の 10~20 倍という従来の実験事実を裏づける結果が得られている。

入射衝撃波と静止物体との干渉、あるいは定常飛行物体と爆風の干渉の問題も多くの計算がおこなわれているが、人工粘性による拡散効果および衝撃波層内における格子点数の制限から、干渉の結果生ずる接触面、滑り流などに対する分解能が十分といえず、現在までのところ衝撃波面の位置、形状の時間的変化が求められている程度にとどまっている。

圧縮性流体力学の問題のうちで、人工粘性を用いる差分法がよく応用されているもう一つの分野は、超高速衝突の問題である。衝突する物体が固体であっても、衝突速度が毎秒数 km から数十 km の超高速になると、衝突の際に生ずる応力が材料の強度に比して十分大きいので、衝突する両物体の強度は無視でき、現象は圧縮性流体力学の問題として取り扱える。このような流体力学モデルにもとづく超高速衝突の計算は、BJORK の先駆的な試み⁴⁴⁾以来多くの人々によりなされてきたが、超高速衝突に特有の Crater 形成過程の初期段階の解明には成功しているといえる。しかしながら、penetration 深さが衝突のエネルギーに比例するか、運動量に比例するかは、それぞれを支持する計算結果が対立していて、結論が得られていない。このような超高速における信頼すべき実験データが、実験技術の進歩により豊富に得られることが待望される。材料の強度的性質が無視できなくなる衝突後期の現象や、より低速度での衝突については、高速変形時における材料の応力-歪関係その他、未解決の問題が多く今後の新しい成果が期待される。第5図には、超高速衝突における計算の一例として、半径 1 cm の鉄球がアルミニウム板に 30 km/sec で衝突した場合の crater

形成過程の模様に関する PIC 法の結果¹⁰⁾を示す。

これまで前節で述べた各差分法の応用例とともに、幾つかの問題点を指摘してきたが、ここではそれらに共通する問題として、計算領域の境界における境界条件の問題を考えてみよう。計算領域には、上流部(流入境界)と下流部(流出境界)、上部および下部の4つの境界があるが、上流および下流における境界条件については、遷音速問題への応用のところで議論した。下部の境界は、対称軸あるいは物体面となり、そこでの境界条件については何ら問題はない。物体面が格子点と一致しない場合の問題は、鈍頭物体への応用のところですでに指摘したとおりである。残された上部境界での境界条件については、境界上の格子点に対しては後退差分を用いて、計算領域内の値から外挿する方法、流れのパラメータの境界に垂直な方向の勾配が境界上で0となるようにする法、その他幾つかの方法が試みられているが、どの方法が最適であるかについては結論が出ていない。著者の経験では、境界上で流れのパラメータの勾配を0とする方法でほとんどの場合、重大な困難はなかった。この問題の根本的な解決は、遷音速問題のところで少し述べたように、計算面での上部境界が物理面で無限遠方になるような座標変換をおこなうことによりなされるが、その結果得られる基礎方程式の形に対し、前述の各差分法がそのまま適用できるかどうかは検討の必要があり、今後の研究結果を待たねばならない。座標変換の問題は、いままでこのような差分法において、比較的手をつけられていなかった問題であり、これからの動向が注目される。

最後に、これからこのような計算を手がけられる人達のために、実際の計算ではどの程度の記憶容量、計算時間が必要であるかを述べることにする。記憶容量について考える場合、まず第1に、それぞれの差分法が1格子点あたり何個の記憶容量が必要であるかを考

第5図 超高速衝突の計算, AMSDEN,¹⁰⁾

えなければならない。2次元または軸対称の場合、LAX法などの保存形方程式を基礎とする方法は、1格子点あたり原理的には4個、圧力を含めると5個必要であるが、FLIC法では、その値が6個および7個となる。さらに、PIC法では格子点あたり7個となり、それ以外に粒子1個あたり2個の記憶容量を必要とするから、cellあたりの平均粒子数を $\bar{N}$ とすると、 $(7+2\bar{N})$ 個が必要である。いま、 50×60 の格子配列を考えると、LAX法では15,000、FLIC法では21,000、PIC法ではcellあたり平均粒子数を4とすると、45,000の記憶容量が必要となる。実際の計算では、これ以外に命令や補助的変数を記憶する必要があり、また作業用の番地も必要とするので、最低45k、普通65k程度のコア容量をもつ計算機が必要である。

計算時間は、使用する計算機の演算速度、計算の際の格子点数、採用する差分法などに依存するが、著者の経験では、HITAC 5020 E/Fクラスの計算機で格子点数が3,000程度の計算で45~90分程度かかるのが普通であった。計算時間のながい例では、BOHACHEVSKY²⁸⁾の計算のようにIBM 7090クラスで40時間程度もかかったものもある。このように、人工粘性を

用いる計算法では多大の計算時間を要するが、その演算内容はたがいに独立であり、同時に併行的に処理できる部分が少なくなり、したがって、計算機の演算速度が現在のままでも、演算を並列に処理できる計算機を用いれば、計算に要する時間が大巾に短縮されることが期待できる。この点で並列処理の可能なILLIAC-IVでのこの種の計算⁵⁶⁾の試みの結果に興味もたれる。

4. む す び

本稿では、圧縮性流体力学における数値計算について主として、人工粘性を用いた差分法の分類とその各方面への応用例および問題点などについて述べてきた。著者の限られた経験と能力では、その現状を正確に紹介できたかどうか疑問であるが、これからこのような計算を手がけようとする人達にとって、少しでも役にたてば幸である。

圧縮性流体力学の問題に対する、特性曲線法、積分関係法 (method of integral relations) など、他の有力な方法については、ここでは述べなかったが、それらについては他の機会に紹介したい。

文 献

- 1) RICHTMYER, R. D. and MORTON, K. W.: Difference method for initial value problems, 2nd ed., Interscience, New York, (1967).
- 2) VON NEUMANN, J. and RICHTMYER, R. D.: A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks, J. App. Phys. 21, 232-237 (1950).
- 3) LAX, P. D.: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math. 7, 159-193 (1954).
- 4) LAX, P. D.: Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm. Pure Appl. Math. 10, 537-566 (1957).
- 5) RUSANOV, V. V.: The calculation of the interaction of nonsteady shock waves and obstacles, Zh. vych. Fiziki, 1, 267-279 (1961).
- 6) GODUNOV, S. K.: Difference method for the numerical calculation of the discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics, Math. Sbornik, 47, 271-306 (1959).
- 7) HARLOW, F. H.: Hydrodynamic problems involving large fluid distortions, J. Assoc. Comp. Mach. 4, 137 (1957).
- 8) EVANS, M. W. and HARLOW, F. H.: The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations, Los Alamos Scientific Laboratory Report. LA-2139 (1957).
- 9) HARLOW, F. H.: The particle-in-cell method for numerical solution of problems in fluid dynamics, Proc. Symp. Appl. Math. 15, 269 (1963).
- 10) AMSDEN, A. A.: The particle-in-cell method for the calculation of the dynamics of compressible fluids, Los Alamos Scientific Laboratory Rept. LA-3466 (1966).
- 11) GENTRY, R. A., MARTIN, R. E. and DALY, B. J.: An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems, J. Comp. Phys. 1, 87 (1966).
- 12) LAX, P. D. and WENDROFF, B.: Systems of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math. 13, 217-237 (1960).
- 13) LAX, P. D. and WENDROFF, B.: Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy, Comm. Pure Appl. Math. 17, 381-398 (1964).
- 14) RICHTMYER, R. D.: A survey of difference methods for nonsteady fluid dynamics, National Center for Atmospheric Research Technical Rept. NCAR TN-63-2 (1962).
- 15) BURSTEIN, S. Z.: High order accurate difference method in hydrodynamics, in Nonlinear partial differential equations, edited by W. F. AMES, Academic Press, New York, 279-290 (1967).
- 16) RUBIN, E. L. and BURSTEIN, S. Z.: Difference methods for the inviscid and viscous equation of a compressible gas, J. Comp. Phys. 2, 178-196 (1967).
- 17) HARLOW, F. H. and MEIXNER, B. D.: The particle-and-force computing method for fluid dynamics, Los Alamos Scientific Laboratory Rept. LAMS-2567 (1961).
- 18) SCHULTZ, W. D.: Two-dimensional Lagrangian hydrodynamical difference equations, in Methods in computational physics, Vol. 3, Academic Press, New York, 1 (1964).
- 19) VAN LEER, B.: Stabilization of difference schemes for the equations of inviscid compressible flow by artificial diffusion J. Comp. Phys. 3, 474-485, (1969).
- 20) GOURLAY, A. R. and MORRIS, J. L.: Finite-difference methods for nonlinear hyperbolic systems Part I-II, Math. Comp. 22, 28-89 (1968).
- 21) RICH, M.: A method for Eulerian fluid dynamics, Los Alamos Scientific Laboratory Rept. LAMS-2826 (1962).
- 22) EVANS, M. W. and HARLOW, F. H.: Calculation of unsteady supersonic flow past a circular cylinder, Am. Rocket Soc. J. 29, 46 (1959).
- 23) BOHACHEVSKY, I. O. and RUBIN, E. L.: A direct method for computation of non-equilibrium flows with detached shock waves, AIAA J. 4, 600-607 (1966).
- 24) LAPIDUS, A.: A detached shock calculation by second order finite differences, J. Comp. Phys. 2, 154-177 (1967).
- 25) EVANS, M. W. and HARLOW, F. H.: Calculation of supersonic flow past an axially symmetric cylinder, J. Aero. Sci. 25, 269-270 (1958).
- 26) BURSTEIN, S. Z.: Finite-difference calculations for hydrodynamic flows containing discontinuities, J. Comp. Phys. 1, 198-222 (1967).
- 27) MASSON, B. S., TAYLOR, T. D. and FOSTER, R. M.: Application of Godunov's method to blunt-body calculations, AIAA J. 7, 694-698 (1969).
- 28) BOHACHEVSKY, I. O. and MATES, R. E.: A direct method for calculation of the flow about an axisymmetric blunt body at angle of attack, AIAA J. 4, 766-768 (1966).
- 29) SINGLETON, R. E.: LAX-WENDROFF difference scheme applied to the transonic airfoil problem, AGARD Conference Proceedings No. 35 (1968).
- 30) MAGNUS, R., GALLAHER, W. and YOSHIHARA, H.: Inviscid supercritical airfoil theory, AGARD Conference Proceedings No. 35 (1968).
- 31) AMSDEN, A. A. and HARLOW, F. H.: Numerical calculation of supersonic wake flow, AIAA J. 3, 2081-2086 (1965).
- 32) ERDOS, J. and ZAKKAY, V.: Numerical solution of several steady wake flows of the mixed supersonic/subsonic type by a time-dependent method and comparison with experimental data, AIAA Paper No. 69-649 (1969).
- 33) BURSTEIN, S. Z.: Numerical methods in multi-dimensional shocked flows, AIAA J. 2, 2111-2117 (1964).
- 34) HARLOW, F. H., DICKMAN, D. O., HARRIS, D. E. and MARTIN, R. E.: Two-dimensional hydrodynamic calculations, Los Alamos Scientific Laboratory Rept. LA-2301 (1959).
- 35) 広瀬・里深・河村: FLIC 法による衝撃波回折の数値計算, 第12回宇宙科学技術講演会予稿集 (1969).
- 36) TYLER, L. D. and ZUMWALT, G. W.: Numerical solution of the flow field produced by a shock wave emerging into a crossflow, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute (1966).
- 37) TYLER, L. D.: Numerical results of blast wave propagation in tunnel intersections, Sandia Laboratories Rept. SC-RR-68-430 (1968).

- 38) 里深・河村: 衝撃波管中における衝撃波形成の数値計算, 高速飛行の熱空力学シンポジウム, (1969).
- 39) BUTLER, T. D.: Numerical calculations of the transient loading of blunt obstacles by shocks in air, AIAA J. 4, 460-467 (1966).
- 40) EVANS, M. W., HARLOW, F. H. and MEIXNER, B. D.: Interaction of a shock or rarefaction with a bubble, Phys. Fluids 5, 651 (1962).
- 41) EATON, R. R. and ZUMWALT, G. W.: A numerical solution for the flow field of a supersonic cone-cylinder entering and leaving a blast sphere diametrically, Sandia Laboratories Rept. SC-CR-67-2532 (1967).
- 42) McNAMARA, W.: Flame computer code for the axisymmetric interaction of a blast wave with a shock layer on a blunt body, J. Spacecraft and Rocket 4, 790-795 (1967).
- 43) HARLOW, F. H. and PRACHT, W. E.: Formation and penetration of high speed collapse jets, Phys. Fluids 9, 1951-1959 (1966).
- 44) BJORK, R. L.: Effects of meteoroid impact on steel and aluminum in space, The RAND Corporation Rept. P-1662 (1958).
- 45) BJORK, R. L., KREYENHAGEN, K. N. and WAGNER, M. H.: Analytical study of impact effects as applied to the meteoroid hazard, NASA Contractor Rept. CR-757 (1967).
- 46) MacCORMACK, R. W.: The effects of viscosity in hypervelocity impact cratering, AIAA Paper No. 69-354 (1969).
- 47) RINEY, T. D. and HALDA, E. J.: Effectiveness of meteoroid bumpers composed of two layers of distinct materials, AIAA J. 6, 338-344 (1968).
- 48) KREYENHAGEN, K. N., WAGNER, M. H., PIECHOCKI, J. J. and BJORK, R. L.: Ballistic limit determination in impacts on multi-material laminated targets, AIAA Paper No. 69-356 (1969).
- 49) BILLINGSLEY, J. P.: Comparison of experimental and predicted axial pressure variation for semi-infinite metallic targets, AIAA Paper No. 69-361 (1969).
- 50) ROSENBLATT, M., KREYENHAGEN, K. N. and ROMINE, W. D.: Numerical studies of ejecta characteristics behind thin plates, AIAA Paper No. 69-357 (1969).
- 51) JOHNSON, W. E.: Oblique impact calculations using a 3D Eulerian code, AIAA Paper No. 69-353 (1969).
- 52) MORETTI, G. and ABBETT, M.: A time-dependent computational method for blunt body flows, AIAA J. 4, 2136-2141 (1966).
- 53) MORETTI, G. and BLEICH, G.: Three-dimensional flow around blunt bodies, AIAA J. 5, 1557-1562 (1967).
- 54) MORETTI, G.: The importance of boundary conditions in the numerical treatment of hyperbolic equations, Polytechnic Institute of Brooklyn, PIBAL Rept. No. 68-34 (1968).
- 55) 生井・松尾・永井, 衝撃波管の空力特性に関する研究 (第2報, 衝撃波の形成について), 日本機械学会論文集, 34, 1969-1976 (1968).
- 56) BENOKRAITIS, V.: The numerical solution of the Eulerian hydrodynamic equations on ILLIAC IV, Department of Computer Science, University of Illinois ILLIAC IV Document No. 186 (1968).

第7回日本航空宇宙学会関西支部中部支部合同秋期大会

講演募集

1. 講演日時: 昭和45年11月9日(月)午前9時より
2. 講演会場: 名古屋市港区大江10 三菱重工業株式会社
名古屋航空機製作所 教育センター
3. 講演申込要領
 - イ) 締切: 昭和45年8月20日(木)
 - ロ) 宛先: 名古屋市千種区不老町
名古屋大学工学部航空学教室内
日本航空宇宙学会中部支部
 - ハ) 講演申込記入事項
題目・所用時間(20分以内)…幻灯の有無。200字以内の講演概要・講演者会員別。
氏名(連名の場合は講演者に○印記入)。年令。勤務先。研究場所。
4. 講演別刷
プログラム決定後講演者に SEKIREI A4 No. 194 トレーシング用紙を送付致します故。同用紙に論文内容を書き入れ。別刷(約50部作成して原紙と共に講演当日提出して下さい。