技 術 論 文

CONTRIBUTED PAPER

熱的見地から見た人工衛星の最適打ち上げ計画*

小 林 康 徳**

Launch Optimization of Artificial Satellites on the Point of View of Thermal Design

Yasunori KOBAYASHI

Abstract

The systematic explanation of the method of calculating the radiative heat input to an artificial satellite orbiting around the earth with relatively low altitude is presented including brief discussion about the angle factor which plays an important role in the heat input calculation.

With the use of the calculating method described above, the optimum launch time is found on the view point of minimizing the variation of the radiative heat input to the orbiting satellite during its specified period. An example of this method applied to a spherical satellite is also shown.

要 約

地球のまわりの比較的低高度の軌道上を飛行する人工衛星に入射する熱ふく射エネルギーを計算するための指針を示し、計算のさい重要な役割を果たす形態係数の説明にも、二、三のばあいについてふれた。

これらの方法を利用して、ある軌道条件で打ち上げられる衛星に入射する熱ふく射エネルギーの時間的な変化が衛星の寿命を通して小さくなるような打ち上げ時刻を選定することが試みられ、球形衛星に対する計算結果の一例が示された。

I. 緒 言

軌道上を飛行する人工衛星は宇宙の苛酷な熱的環境の中で長期にわたって、正常にその使命を果たし得ることが要請され、したがって、その温度制御系の設計を正確に行なうために外界からの熱入力の大きさを知ることが重要になる。これは、ほとんど太陽などの天体からの熱ふく射によるものであり、その量は衛星の軌道、位置、および姿勢によって大きく変化する。一

方、衛星の寿命や性能という観点から見れば、当然外界からの熱入力は時間的に大きく変化しないことが望ましい。

この論文ではもっぱら外界から衛星に入射する熱ふく射に着目して、その時間的な変化が小さい、という要求を満足するような最適打ち上げ条件を求める方法が報告される。

II. 軌道パラメータ

衛星は軌道上を一周する間に一般に、ある時間太陽に対して地球の陰に入り太陽からの熱ふく射をさえぎられる期間がある。衛星の周期に対するこの時間の比を日陰率といい、1 から日陰率を引いたものを日照率という。日照率は後でみるごとく、衛星の熱入力を考える上で最も重要なパラメータである。

日照率の計算は W. S. SNODDY¹⁾ の計算法によった。これは、地球のゆがみに起因する微小じょう乱の効果も考慮されており、初期条件として、

- i) 打ち上げ時刻 (T)
- ii) 春分点から何日後に打ち上げたか (D_0)
- iii) 軌道の離心率 (e)
- iv) 最初の近地点の緯度、経度 (LAT, LON)
- v) 軌道の赤道面に対する傾き角 (i)
- vi) 軌道の近地点半径 (r_p)
- vii) 近地点での速度の比向き成分 $+ \text{ or } -, (s)$
- viii) 打ち上げ年度

を与えて日照率を打ち上げ後経過した日数の関数として求める方法で、計算法の骨子は太陽に対して地球の陰になる宇宙空間を円筒形と仮定して衛星がその中に侵入する時、および、そこから脱出するときの位置を求め、さらに周期の基準点からそれらの位置に達するまでに要する時間差から日照率を求めるものである。

陰の部分に侵入するとき、およびそこから脱出するときの角度関係は、第 1 図を参照して

* 昭和 45 年 6 月 8 日原稿受理

** 東京大学宇宙航空研究所

第1図 人工衛星の軌道と地球との関係
(文献(1)より)

$$\left. \begin{aligned} \sin X_1 &= \frac{\sin \zeta_1}{\cos \delta_1} \\ \sin X_2 &= \frac{\sin \zeta_2}{\cos \delta_2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で与えられる。ただし X , ζ , δ は、それぞれ図中に示される角であり、添字 1, 2 はそれぞれ侵入時, 脱出時を表わす。したがって、日照率はさきにあげた初期条件を用いて(1)式を解き X_1 , X_2 に達するまでの時間差を求めることにより得られる。

第2図(a), (b) は日照率 SF の分布を打ち上げ後経過した日数(day) に対して示したものである。地球の偏平度を考慮に入れないときの日照率も参考のために点線で示されている。

第3図はやはり、日照率の打ち上げ後の変化を打ち上げ時刻(hour) をパラメータとして示したものである。(図中、 $T=0$ は春分の日午前9時の打ち上げを意味し、 $T=0.5$ はそれより30分遅れて(すなわち、午前9時半)打ち上げ、 $T=1$ は1時間遅れて、という具合である。以後のグラフでも T の意味するものは同じ。) それぞれの軌道条件は、図の説明中に示してあるが、これらの図から日照率 SF が、打ち上げ時刻 T 、および、打ち上げ後経過した日数 D 、の関数であることが分かる。

III. 熱入力

1. 衛星の熱的環境

衛星に入射する熱ふく射エネルギーは、太陽から直接的に入射する太陽ふく射、太陽ふく射がいったん地球で反射され衛星に入ってくる(アルビドと呼ばれる)ふく射、地球からの赤外ふく射の3種に大別できる。

まず、太陽ふく射の強さ E_s は地球の近傍ではほぼ一定と観測され、約 0.14 watt/cm^2 である。

地球表面上での赤外ふく射の強さ E_R は地球が球状の灰色体であり、かつその温度は一様で一定であると仮定すると、近似的に

(a) 近地点高度 500 km
離心率 0.40874

(b) 近地点高度 500 km
離心率 0.049102

第2図 日照率の分布(春分の日、午前9時打ち上げ)

第3図 打ち上げ時刻をパラメータとして日照率の分布
(近地点高度 500 km, 離心率 0.049102)
 $T=0$: 春分の日 午前9時打ち上げ
 $T=4$: 春分の日 午後1時打ち上げ

$$E_R = E_s \cdot \frac{1-R}{4} \quad (\text{watt/cm}^2) \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 R は地球の反射率で、普通 0.34 がその値として用いられる。

アルビドの強さ E_A は地球上の地域や気候条件などによって異なり、定量的には三者のうちで、もっとも不確定なものである。この論文では E_A の値として

$$E_A = 0.34 \times E_s \quad (\text{watt/cm}^2) \quad (3)$$

を採用した。

2. 入射熱エネルギーの計算

衛星に入射するふく射熱エネルギーは、以下のよう一般的に表わされる。

〔A〕 太陽ふく射による熱入力 太陽からのふく射ベクトル $\vec{S}$ と衛星の任意の表面 A にたてた法線ベクトルとのなす角を θ_s とすると単位時間にこの表面に入射する熱量 q_s は

$$\left. \begin{aligned} q_s &= E_s \cdot A \cdot F_s(\theta_s) \\ F_s(\theta_s) &= \cos \theta_s \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

と表わされる。ここで、 $F_s(\theta_s)$ は太陽ふく射における表面 A の形態係数と呼ばれるものである。形態係数については後で 3. のところでもふれるが、文献^{2), 3)}にも述べられている。この面 A が軌道上を一周する間に得る平均熱量 Q_s は

$$Q_s = E_s \cdot F_s(\theta_s) \cdot A \cdot SF \quad (5)$$

である。

〔B〕 地球の赤外ふく射による熱入力 軌道上の任意の位置での単位時間当たりの熱入力 $q_R(\Psi)$ は、〔A〕と同じような考えで、

$$q_R(\Psi) = E_R \cdot A \cdot F_R(\Psi) \quad (6)$$

と表われ、一周平均の熱量 Q_R は

$$\begin{aligned} Q_R &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_R(\Psi) d\Psi \\ &= \frac{1}{P} \int_0^P q_R\{t(\Psi)\} dt(\Psi) \end{aligned} \quad (7)$$

と表わされる。ただし、 Ψ は軌道上の衛星の位置を表わす角度で真近点きより (true anomaly) と呼ばれ、 P は衛星の周期、 $F_R(\Psi)$ は衛星と地球との赤外ふく射における形態係数である。(7)式において、 $dt(\Psi)$ は衛星が軌道上の位置を $d\Psi$ だけ移動するのに要する時間を示しつぎのような関係式が成りたつ。

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{P}{2\pi} (\Psi - e \sin \Psi) \\ \Psi &= 2 \tan^{-1} \left\{ \tan \frac{\Psi}{2} \left(\frac{a-c}{b} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし a, b, c はそれぞれだ円軌道の長軸、短軸、焦点と中心の間のきよりを示す。

〔C〕 アルビドによる熱入力 アルビドにおける衛

星と地球との形態係数を $F_A(\Psi)$ とすると、〔B〕と全く同じように考えて、単位時間当たりの熱入力 (q_A)、および一周平均の熱入力 (Q_A) はそれぞれ、

$$q_A(\Psi) = E_A \cdot A \cdot F_A(\Psi) \quad (9)$$

$$Q_A = \frac{1}{P} \int_0^P q_A\{t(\Psi)\} dt(\Psi) \quad (10)$$

と表わされる。

したがって、衛星に入射する全熱ふく射エネルギー Q_T は〔A〕,〔B〕,〔C〕に示された三つの成分による熱入力の和として、

$$Q_T = Q_s + Q_R + Q_A \quad (11)$$

と表わされる。

3. 形態係数

前節に現われた衛星の形態係数 F_s, F_R, F_A について吟味する。今、衛星の姿勢は、スピン安定法によって慣性空間に対して常に一定に保たれている場合を考える。

平行光に対する平板の形態係数は(4)式のところで既に示されているように、表面 A の幾何学的面積と、その内で太陽ふく射に有効に寄与する面積との比を表わす。

一方、地球と衛星表面の間の形態係数 $F_R(\Psi), F_A(\Psi)$ は一般には、計算が面倒になるので適当な仮定を導入して、その近似値を使用するばあいが多い。二、三の形状の衛星について、その値を示す。

〔A〕 球状衛星と地球との形態係数は、既にいくつかの文献で紹介されている^{4), 5), 6)}。衛星から見た地球の形態係数 F_R は

$$F_R = \int_{A_E} \frac{\cos \beta}{\pi l^2} dA_E = 2 \{1 - \sqrt{1 - (r_e/r)^2}\} \quad (12)$$

である。ただし、 A_E および dA_E は地球上で衛星を見ることができる範囲、およびその内部の微小面要素であり、 l は dA_E と衛星とのきより、 β は l と dA_E の法線とのなす角である。また、 r は地球の中心から衛星までのきよりでだ円軌道であれば、

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \Psi} \quad (13)$$

で表わされる。

地球のアルビドの衛星に対する形態係数 F_A は、赤外ふく射のばあいと同じ考え方で求められる。

地球上の任意の微小面要素 dA_E から出るアルビドは、太陽ベクトルと dA_E の法線とのなす角を λ とすると、近似的に

$$E_A \cdot \cos \lambda \cdot dA_E$$

で表わされるから F_A は

第4図 単位面積の平板に入射する熱エネルギー
春分の日打ち上げ 離心率 0.40874
近地点高度 500 km

$$F_A = \int_{A_E} \frac{\cos \lambda \cos \beta dA_E}{\pi l^2} \quad (14)$$

F_A の実際の値は (14) 式を数値積分することによって軌道上の位置 ψ の関数として求められる⁵⁾。

F_A を求めるより簡単な近似法として, BANNISTER の近似式^{6),7)}

$$F_A \approx F_R \cdot \cos \theta_s \quad (15)$$

もよく用いられる。ここで θ_s は地球の中心に関して太陽ベクトルと、衛星の位置ベクトルのなす角である。

第4図に球形衛星について上述の形態係数を用いて, q_s, q_R, q_A の値を一周期にわたって求めた分布図の一例を示す。

〔B〕 凸多面体の近似法 衛星の形状が単純な凸多面体であるときに応用できる近似法の一つ⁸⁾を紹介する。

地球上任意の高度にある衛星の平面を考えると, 地球から拡散的に入射してくる赤外ふく射やアルビドに対してその幾何学的面積のうちどれだけの部分が有効に関与しているかを表わす形態係数 F_V が求められれば, その平面に入射する熱入力 q_R' , q_A' は,

$$\left. \begin{aligned} q_R' &= E_R \cdot S \cdot A \cdot F_V \\ q_A' &= E_A \cdot S \cdot A \cdot F_V \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

の形で与えられる。ただし, A は平面の幾何学的面積, $E_R \cdot S$, $E_A \cdot S$ はそれぞれ衛星の単位表面積当たりの, 赤外ふく射およびアルビドによる入射熱エネルギーで, 〔A〕で検討された球形衛星における赤外ふく射, およびアルビドの強さが用いられる。また, (16) 式で, F_V は平面 A の地球に対する形態係数を示

すものであるから, 当然, 赤外ふく射, アルビドによらず全く同一であることに注意されたい。

F_V の近似値として, 第5図(a), (b), (c) に示されるごとく衛星の表面上に単位長さの半球を描き, これによって切りとられる面要素 dA (面積 $= \pi$) とその中心から地球を見たときの立体角を dA に投影した面積 dA_f (図中, 斜線部) との比, すなわち,

$$F_V = \frac{dA_f}{dA} = \frac{dA_f}{\pi} \quad (17)$$

を用いる。第5図からも明らかなように dA の方向と地球の位置との関係から (a), (b), (c) の三つの場合が考えられる。

a) の場合

$$dA_f = \pi x y \quad F_V = x y \quad (18)$$

$$\text{ただし } \begin{cases} x = \cos \xi = r_e / r \\ y = x \cos \chi \end{cases}$$

第5図 平板と地球の相対位置による
形態係数の変化の図式

(c)

第5図 平板と地球の相対位置による
形態係数の変化の図式図 (a) 離心率 0.40874 近地点高度 500 km
(b) " 0.049102 " 500 km第6図 形態係数 F_v の分布

b) の場合

$$F_v = \frac{1}{\pi} \left\{ zu + \frac{\pi xy}{2} + xy \sin^{-1} \frac{z}{y} + \frac{1}{2}(\mu - \sin \mu) \right\} \quad (19)$$

c) の場合

$$F_v = \frac{1}{\pi} \left\{ zu - \frac{\pi xy}{2} + xy \sin^{-1} \frac{z}{y} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2}(\mu - \sin \mu) \quad (20)$$

ただし、上式において x, y, z, u はそれぞれ第5図に示されるごとく、長さ x, y, z, u は角度を表わす。この近似法を用いて計算した同筒形の F_v の例が第6図に示されている。

その他、円筒形や平板凹部を持つ形状についての形態係数も求められているが^{9), 10)}、ここで紹介をはぶく。

IV. 最適打ち上げ日の選定

熱的条件から見た最適打ち上げ計画は、打ち上げ後長期にわたって(11)式で表わされる Q_T の時間的変化が小さくなるような打ち上げの条件を求めるために行なわれる。軌道条件を決めるパラメータとしては軌道面の傾き角、離心率、近地点きより、打ち上げの日時などが挙げられ、熱入力 Q_T の計算パラメータとしては衛星の形状と姿勢が重要である。しかし、衛星の使命 (mission) が決められると、普通、設計の段階でそれらのパラメータのほとんどが、決定されてしまうので、打ち上げの日時を選定することが最適操作を行なえる余地として残されたほとんど唯一のものとなる。したがってここでは打ち上げ日時の最適操作のみを考える。

第4図にも見られるごとく衛星に入射するふく射熱エネルギーのうち、太陽からの直接のふく射による寄与は他の二者に比べてずっと大きい。しかるに太陽からの直接ふく射は日照率に強く依存するから全ふく射エネルギーもまた同様であろう、ということは容易に予想されるが第7図は、実際にその様子を示してい

第7図 一年間の日照率 (SF) と熱入力 (Q_T) の分布
(春分の日、正午打ち上げ、近地点高度 500 km、
離心率 0.40874)

る. 第8(a),(b)図は, SF と同様, Q_T もまた, 打ち上げ時刻 T , および打ち上げ後経過した日数 D の関数であることを示している.

ある時刻 T に打ち上げられた衛星が打ち上げ後, D_1 日目に Q_T が最大になり D_2 日目に最小になったとすると

$$DQ_T(T) = Q_T(T, D_1) - Q_T(T, D_2)$$

において, 新しい関数 DQ_T を考える. 打ち上げ後, 何日目に Q_T が最大, あるいは最小値をとるかということが問題にならない場合は, DQ_T は打ち上げ時刻のみの関数となる. このようなときには, DQ_T が目的関数, 打ち上げ時刻が制御パラメータ, 打ち上げ操作のできる時間余裕 ($T_1 < T < T_2$) が拘束条件であるような最も単純な形式の最適操作の問題になる. しかし, 今の場合, DQ_T の値が解析的ではなく数値的

(a) SF

(b) Q_T

第8図 打ち上げ時刻 (T) をパラメータとした Q_T と SF の分布
(近地点高度 500 km, 離心率 0.40874)

にしか与えられないところに困難がある. ある打ち上げ時刻 T , とそれより ΔT 時間だけ遅れて打ち上げたとき DQ_T の値をそれぞれ $DQ_T(T)$, $DQ_T(T + \Delta T)$ としさらに

$$\Delta DQ_T = \frac{DQ_T(T + \Delta T) - DQ_T(T)}{\Delta T} \quad (21)$$

を作ると, 明らかに ΔDQ_T は DQ_T 曲線の二点間の勾配を表わす. したがって, 最適打ち上げ時刻を求めるには, $T_1 < T < T_2$ において, ΔDQ_T を計算し, こ

(a) 実線 $\Delta T = 1.0$, 点線 $\Delta T = 6.0$

(b) 実線 $\Delta T = 0.25$, 点線 $\Delta T = 1.0$

第9図 打ち上げ後50日間の $Q_{T,max}$ と $Q_{T,min}$ の分布
(近地点高度 500 km, 離心率 0.049102)

D=0: 打ち上げ当日, D=25: 打ち上げ後25日目,
D=50: 打ち上げ後50日目

第10図 打ち上げ時刻と熱入力の関係
(近地点高度 500 km, 離心率 0.049102)

の値が負から正に変わるところを判別して最適時刻 T を求める方法がとられる。このとき、打ち上げ時刻の時間きざみ (ΔT) の大きさがもっとも重要になる。第9図は打ち上げ時刻 T に対する $Q_{T,max}$, $Q_{T,min}$ を示したものである。第10図は、打ち上げ当日 ($D=0$) および打ち上げ後25, 50日目 ($D=25, 50$) までの Q_T の変化を打ち上げ時刻 (T) に対して示したものである。これらの図からも明らかなように、 ΔT をあまり小さく選ぶと打ち上げ時刻の最適値を選別するためにばう大な計算時間を要するし、逆に $\Delta T=6.0$ hour のごとく大きく選びすぎると、例えば第19(a)図においてA部の Q_T の極大値が全く看過されてしまう。というように最適操作が不完全になる恐れが生ずる。

ここで再び第7図、第8図に示された Q_T と SF の分布の緊密性に着目して、以下のような計算過程で打ち上げの最適時刻 T_{opt} を選別する方法を試みた。

(i) ある初期条件で打ち上げられた衛星の Q_T の第零近似 Q_T^0 として SF の値を用いる。すなわち、

$$Q_T^0 = C \cdot S \cdot F \quad (22)$$

とおき、 DQ_T^0 について先に述べた最適操作を行ない T_{opt} の第零近似値 T_{opt}^0 を求める。ただし、(22)式で、比例定数 C は T_{opt}^0 を求めるに当たっては Q_T^0 の相対的な大きさのみが問題になるから $C=1$ としてよい。なお(i)の計算においては ΔT は比較的粗くとしてよい。

(ii) T_{opt}^0 の近傍に T_{opt} があることを予想して $T_1 < T_{opt}^0 < T_2$

を満足する適当な打ち上げ時刻の幅 $\Delta T_{max}(T_2 - T_1)$ を設定し、この時間帯にわたって ΔT を適当に小さく選んで DQ_T の最適操作を行なう。(ii)の計算では、必要ならば T_{opt} を求める過程は、 ΔT_{max} と ΔT

の大きいところから始めて、 $T_{opt}^1, T_{opt}^2, \dots$ という具合にくり返して最終的な T_{opt} を求める方法も用いられる。

最後に打ち上げ日時を決定する計算例の一つを示す。

衛星の形状: 球形

初期軌道条件: $r_P=500$ km

$e=0.15380$

($r_A=3,000$ km に相当)

(LAT, LON)=(28.0°, 150°)

$i=31.5^\circ$

衛星の打ち上げ許容日時:

1970年6月中 (30日間)

衛星の寿命: 100日間

計算パラメータとして:

$\Delta T_0=2.0$ hour

$\Delta T_1=0.25$ hour

$T_1, T_2 = T_{opt}^0 \pm 5$ hour

$\Delta T_{max}=10$ hour

とおき T_{opt}^1 を計算した。

結果は6月29日午後8時15分であった。

V. 結 語

だ円軌道を飛行中の衛星に入射する熱ふく射エネルギーを求める計算法と、その結果をもとにして熱的条件より見た衛星の最適打ち上げ計画 (ここでは専ら打ち上げ日時の選定) を行なう方法について、その大筋が述べられ、簡単な計算結果の一例が示された。

実際の計算は現行の HITAC-5020 程度の大型計算機の力を借りても、かなりの時間を要する性質のものであるため、計算過程で用いられる ΔT や ΔT_{max} , T_1, T_2 の選び方については十分な考察が必要である。

参考文献

- 1) W.S. SNODDY: Calculations Concerning the passage of a Satellite Through the Earth's Shadow, NASA, MTP-RP-61, (1961).
- 2) E.M. SPARROW & R.D. CESS: Radiation Heat Transfer, Adivision of Wadsworth Publishing Co. Inc. (1961).
- 3) J.A. WIEBELD: Engineering Radiation Heat Transfer, Holl, Rineheart & Winston, (1961).
- 4) F.G. CUNNINGHAM: Earth Reflected Solar Radiation Input to Spherical Satellites, NASA TND-1099, (1961).
- 5) F.G. CUNNINGHAM: Earth-Reflected Solar Radiation Incident upon Spherical Satellites in General Elliptical Orbits, NASA TND-1472, (1963).
- 6) H.L. FINCH, D. SOMMERVILLE, R. VOGT & D. BLAND: A Computer Program for Calculating External Thermal Radiation Heat Loads and Temperatures

- of Spacecraft Orbiting the Planets or the Moon, NASA TR R-278, (1965).
- 7) J. C. BANNISTER: Radiation Geometry Factor Between the Earth and a Satellite, NASA TND-2750, (1965).
- 8) G. A. McCUE & S. I. FEHER: Optimum Thermal Design Through Computer Simulation of a Space-Vehicle Structure in Earth Orbit, ASME paper 66-Wa/HT-44.
- 9) 下夫地貞, 足立恭子: 地球を周る人工衛星に対する熱入射の計算, 三菱電機 K. K. 研究報告, Apr. (1970).
- 10) J. DOETECHE: Thermal Radiations Absorbed by a Partially Obscured Spacecraft, Astronautica Acta, Vol 15, pp. 107~117 (1969).

弱い重力の下で器壁に生じる液滴または気泡の形*

肥田金三**・三浦宏之**

The Shape of a Bubble or a Drop Attached to a Flat Plate Subject to a Weak Gravitational Force

Kinzo HIDA and Hiroyuki MIURA

Abstract

As the gravitational force becomes small, the relative importance of the surface tension increases. Confining ourselves to a stationary axisymmetric case, we can show the rather peculiar shape of a pendent drop with a lumpy column in its central portion and a wavy skirt in its surrounding.

Characteristic parameter is the Bond number, B , defined by

$$B = \sigma g a^2 / T$$

where σ, g, a, T denote the density difference between two media, the acceleration of gravity, a certain characteristic length and the surface tension, respectively.

Computer results for various values of B are given graphically. For small values of B , the shape changes rapidly and an analytical expression up to the first bottle-neck point is obtained by matching the solutions locally valid in several portions. Photographs taken by the use of castor oil and water as two fluids are also shown.

1. はし が き

月面や人工衛星内での人工加速度の下では重力が比較的弱くなって、自由表面を含む場合には表面張力の影響が大きく効いてくる。

最近, CONCUS¹⁾ は鉛直に立てた毛細管内の液面の定常な形 (メニスカス) を調べ、液と管壁との間の接触角、および管の半径を長さの規準としたボンド数の二つをパラメータとして詳しい数値計算を行ない、また、ボンド数の値が1に比べて大きいときと小さいときとの漸近解を解析的に求めている。ボンド数、 B 、と

は、

$$B = (\sigma g a) / (T/a) = \sigma g a^2 / T, \quad (1 \cdot 1)$$

ただし、 σ : 密度、 g : 重力の加速度

a : 適当な長さ、 T : 界面に働く表面張力

として定義される無次元量で、重力と表面張力の影響の相対的な大小の目安を与えるものである。

水平な壁から垂れ下がった水滴の形も興味深いが、玉田・柴岡²⁾や FORDHAM³⁾によって通常の g の値の場合が計算されている。

ところで、二流体間の自由表面の形に関する最も一般的な問題として、水平な床の上の液滴や天井から垂れ下がる液滴の形は、液の充満した容器の蓋、または、底に生じる気泡の形とともに統一的に取り扱うことができる。(§2)

定常で軸対称性をもった場合に話を限ることになると、液滴 (または気泡) 内外の圧力差 Δp は表面張力を T とすると

$$\Delta p = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1 \cdot 2)$$

と表わされる。ただし、 R_1, R_2 は法線を含み、たがいに直交する二平面による切り口の曲率半径である。

第1図のように、垂れ下がった液滴にくびれが生じたときは、くびれ部において $R_1 R_2 < 0$ であるから Δp を一定に保ちつつ $|R_1|, |R_2|$ を小さく取ることが可能で、瘤の生じることが予想される。

肥田・中西⁴⁾は実際に、ボンド数が負の小さい値をとるとき、中央に多くの瘤をもった液滴が垂れ下がる可能性のあることを、基礎的非線型微分方程式を電子計算機で数値的にとくことにより立証した。(§3)

ボンド数の絶対値 $|B|$ が小さい場合には、形状の変化が著しくなるから、数値計算のメッシュ幅を十分小

* 昭和45年9月14日原稿受理

** 大阪府立大学工学部 数理工学教室