$=1.8$ の場合について, $C_\mu=0$ に対する $C_\mu=0.1$ ($\beta=\pi/2$) の場合を考えてみると, 前節の例でも読み取ったように, この場合の $\Delta(CD_i/\lambda)$ の値は第6図より $\Delta(CD_i/\lambda)=0.6$ であるから (ただし, 最大値より左方で考えると), いまたとえば, $v_j/V=3$ として, (39)式より H を計算すると $H=1.8$ となり, この場合の翼端吹き出しはエネルギー的に得策と判断できるわけである。

以上, 説明は主として $\beta=\pi/2$ の場合の例で行なったが, このうち定性的結果については β が $\pi/2$ からあまり大きくずれない限り一般の β について有効である。

4. 結 言

本論文は翼端吹き出しのある高循環三次元翼の非線型理論について記述しているが, 本理論より得られた定性的結論を要約するとつぎのようになる。

すなわち, 翼幅延長方向からあまり大きくずれない角度範囲 (すなわち β が $\pi/2$ 近傍) で翼端吹き出しを行なった場合,

(1) C_L/λ については, 吹き出しなしの場合と同様に, 翼まわりの無次元平均循環値 $\bar{k}$ の増加に対してその場合の吹き出しの C_μ の値に応じてそれぞれ最大限界値が存在し, しかも吹き出しの C_μ を増加させることによって, この最大値の増加 (最大値を与える $\bar{k}$ も増加) と同時に, より一層大きな C_L/λ の発生を可能にすることができる。一方, CD_i/λ については, C_μ

の増加につれて, 一層小さな CD_i/λ の実現が可能となる。

(2) 翼端吹き出しによる発生可能な C_L/λ の増加と CD_i/λ の減少についての効果は吹き出しの C_μ が小さいうちの方が顕著であり, C_μ が大きくなれば効果は鈍くなる。

(3) 同じ C_L/λ の値を得る場合でも, 翼端吹き出しがない場合とある場合とでは CD_i/λ に差ができ, 翼端吹き出しにより CD_i/λ を減少させることができる。そしてこの誘導抗力の減少による飛行に要するエネルギーの減少量 (単位時間あたり ED_i) が, 翼端吹き出しに要するエネルギー (同 E_J) とその空気を飛行中外部から採取することによって派生的に生じる運動量抗力に打ち勝って飛行するために新たに必要となるエネルギー (同 ED_m) との合計よりも大きくなるような場合, すなわちエネルギー節減倍率 $H(=ED_i/(E_J+ED_m))$ が1以上になるような場合も実在する。

参 考 文 献

- 1) M. SATO and K. MATSUOKA: Proc. 16th Japan Natl. Congr. Appl. Mech. 1966.
- 2) M. SATO and K. MATSUOKA: Proc. 18th Japan Natl. Congr. Appl. Mech. 1968.
- 3) M. SATO and K. MATSUOKA: Bull. Univ. Osaka Pref., Series A, Vol. 18, No. 2, p. 335, 1969.
- 4) 佐藤正義, 松岡健次: 日本機械学会論文集, 第36巻, 第289号, 1970.
- 5) J. R. SPREITER: Jour. Aero. Sci., 1951.

チークド・ジェットの特性*

光 安 信**・瀬 戸 邦 聰***

On the Characteristics of Choked Jet

Akira MITSUYASU and Kunisato SETO

Abstract

An experimental study of the choked jet was made using axisymmetric nozzles to investigate the flow property and the acoustical characteristics. The character of the choked jet noise had been shown by many authors to be determined by that of the flow itself and, in particular, by the regular shock wave spacing. This experiment showed that the exit velocity had significant

relation with the peak frequency of the noise generated by the flow.

A new method for calculating the boundary of the choked jet is presented which is simpler than other methods, that is, the characteristics method and so all. The new method is based on the fact that the underexpanded flow is determined by the exit nozzle configuration, the exit velocity and, above all, the static pressure of the flow at the exit. The results were compared with photographs of actual jets and other author's ones. Favorable agreement was obtained.

* 昭和45年9月10日原稿受理

** 九州大学工学部航空工学科

*** 佐賀大学理工学部機械工学科

1. ま え が き

ノズルから、大気中へ空気を噴射させるとき、ノズル出口面での流れの静圧が、大気圧より高いと、この流れは膨張不足流れと呼ばれ、特に先細ノズルの場合、噴出速度は音速に等しくなりチョークド・ジェットと呼ばれている。この流れの最も興味ある特徴は、音響学的なものであるが、特定の周波数を有する強い音が発生することであり、この音はチョークド・ジェット・ノイズあるいはスクリーチと呼ばれている。

この流れについては、したがって、主として音に関連して研究が進められ、1953年以来一連の研究が A. POWELL によってなされ、その後、1961年 A. G. HAMMITT によりさらに追求がなされた。前者はその流れを *choked jet* と呼び後者は *overpressure sonic jet* と名付けている。

一方、膨張不足流れの、基礎的な物理特性については、その流線の境界を特性曲線法で求める理論のほかに、1959年、J. C. ADAMSON, Jr., らは、大気に噴射した後の流れも管内流れの延長と考えて求める方法を提案しているし、大気中における膨張不足流れの中にできる垂直衝撃波の位置を求める方法は、1966年 S. GRIST らによって報告されている。なお、両著者ともその流れを、*underexpanded sonic jet* と呼んでいる。この他、1959年 LATVALA は、噴流境界を求める簡便な方法を提案している。

この論文は、大気中における膨張不足流れの境界の形を求める簡易方法を、LATVALA を含めて他の著者とは別の観点から提案し、引いては、チョークド・ジェットの基礎的な物理特性と音響特性との関連性を実験的に調査し、報告している。

2. 実験方法

(1) 装置 流れを作り出す主要部は、50 h. p., 250 r.p.m. の5段圧縮水冷コンプレッサーで、100 kg/cm² まで貯気可能である。その高圧空気タンクから送られた空気は、内径50 mmのパイプを通り、内径160 mm、長さ500 mmのセッティング・チャンバーでいったんよどみ、再びスロート径が20 mmであるノズルを経て、大気中へ噴射されるしくみである。高圧タンクの吐出部にあるメイン・バルブからセッティング・チャンバーに至るパイプの全長は8.8 mである。その連結パイプによる圧力降下はわずかで、メイン・バルブの圧力とセッティング・チャンバー内の圧力は同値であるとして差し支えなかった。圧縮空気は、内部をグラス・ファイバー（フェザー・グラス）で内張りされた2 m立方の無響室の中へ噴射された。

A Main valve
B Valve
C Dark room
D Anechoic chamber
E Condenser microphone
F Settling chamber
G Nozzle
H Traversing mechanism
I Static Pressure hole

第1図 装置の模型図

第2図 無響室の音響特性。2倍距離ごとの減衰量

(2) 無響室の音響特性 無響室は厚さ約3 cmのグラス・ファイバー（フェザー・グラス）で内張りされ、内部において、大略逆自乗則が適用できる。第2図にジェット・ノイズをテープ・レコーダーに録音し、音量を一定に保ち、テープ・レコーダーのスピーカーからそれぞれ10 cm, 20 cm, 40 cm および80 cmにおける音の減衰量を周波数別に測定して示されている。A特性フィルターによる騒音レベルの低下は、距離が2倍になる毎にそれぞれ5.1 dB, 5.3 dB および4 dBであった。B, C および Linear (特性フィルターなし) 特性ではそれより大きな減衰量が見られた。図中Iは距離が10 cm から20 cmに増加した際の減衰量、IIは20 cm から40 cmに増加した際の減衰量、IIIは40 cm から80 cmに増加した際の減衰量を示す。なお、図中右端に、A, B, C および linear 特性による noise level の減衰量が併せて示されている。

(3) ノズル 製作上の問題、実用性の見地から、軸対称円形ノズルを使用した。そのノズルの横断面は第3図に示されている。ノズルAは先細ノズル、ノズルBはラバール・ノズル、ノズルCは断面積の変化のないノズル、ノズルDは第4図の t_A から t_B にかけてはラバール・ノズルの拡大部と同形であり、 t_B から t_C にかけては断面積の変化のないノズルである。最小断面部（スロート）はみな等しい面積であるので、貯

第3図 ノズルの断面図
ノズルAの取れん角度は約 4° である。

第4図 ノズルDの静圧孔配置図, 単位 mm

気槽圧が等しければ, 流量はみな等しいはずである。ノズルDを製作した理由は, ノズルCから噴射した流れの中にも衝撃波が観測される, すなわち断面積一定のノズルを経ても, 大気中では超音速に達する流れがあるので, 断面積一定のノズルに先広ノズルを付加すれば, よりすみやかな超音速流れが得られるはずと考えたからである。ノズルDからも超音速流れが得られることは実験により確認された。ラバール・ノズルBが先細ノズルと先広ノズルの組み合わせであるのに対して, ノズルDは断面積一定のノズルと先広ノズルの組み合わせである。ノズルの形状を決定するパラメータとしては, スロート断面積のほか, 出口面積, 管

長, 出口部の広がり角度 (開き角) または収れん角度 (閉じ角) などが考えられるが, 流れの大筋は, ラバール・ノズルでは, スロート断面積と出口断面積の比で決まり, 先細ノズルや断面積一定のノズルによる流れは噴射後大体同じ流れとなる。管長や出口部の角度などが影響するのは主に境界層の形成に対してである。ノズルA, ノズルBおよびノズルCにおいては出口面における静圧を測定し, ノズルDについては第4図の t_A , t_B および t_C において静圧分布を測定した。

(4) 貯気槽圧およびノズル静圧の測定 セットリング・チャンバー内の貯気槽圧はコントロールバルブ (メインバルブ) により調節した。ノズル出口静圧および管内静圧の測定には水銀マンノメーターを用いた。水銀マンノメーターで測れない時はブルドン管を使用した。測定値の読みは, カメラの同時撮影により時間差によるずれをなくした。

(5) シュリーレン撮影 測定部とシュリーレン鏡およびカメラの位置関係を第5図に示す。光源は高圧スパーク光源で, シュリーレン凹面鏡は, 曲率半径が7m, 鏡径が300mmであり, 平面鏡の直径は90mmでカメラはペンタックスで望遠レンズを取り付けて使用した。

(6) 音響測定装置 コンデンサー・マイクロフォン (B & K 4132) を周波数分析器 (B & K 2112) を通してレベル・レコーダー (B & K 2305) に取りつけ, 自動的にサウンド・レベルと発生する音の周波数分布を得た。マイクロフォンの設置については, マイクの面をジェット軸と直角方向に向け, ノズル出口から約1mの所に固定して, 各ノズルについて貯気槽圧ごとの音の変化を調べた。測定値は r. m. s 値により, filter range は 1/3 oct. paper drive speed は 3mm/sec. 記録ペンの writing speed は 500 mm/sec で下限周波数は 20 Hz とした。周波数分布の1チャートを得るのに約 60 秒要し, この間の時間的な測定値のずれは避けられなかったが, 実際問題としては読み取り誤差の範囲内に含める事ができた。なおカソード・フォロアは B & K 2612 を, 延長ケーブルは AO 0027 を使用した。

第5図 観測場とシュリーレン鏡の位置

3. 理論解析

3.1 膨張不足流れの理論 ノズル出口面において流れが有している静圧と大気圧の差に着目し、それがどんな場合に大気圧まで膨張するかを考える。

まず、ノズルを出た瞬間は、流れは Prandtl-Meyer 流に従って膨張し、下流に行くに従って大気的作用により圧縮効果を受け、膨張波の反射により圧縮波が生じるとともに、噴流の境界が噴流軸に対する角度は下流に行くに従って連続的に減少していくと仮定する。そこで圧力、密度および流速をそれぞれ P , ρ および U で表わし、添字 A でノズル出口における状態を、添字 ∞ で大気における状態を表わすとする、連続の条件から、ノズルを出た瞬間の流れについては

$$\rho_A U_A = \rho_\infty U_\infty \quad (1)$$

が成り立つと予想される。

ゆえに

$$U_\infty = \left(\frac{\rho_A}{\rho_\infty} \right) U_A = \left(\frac{P_A}{P_\infty} \right)^{1/\gamma} U_A \quad (2)$$

ただし、 γ は定圧比熱と定積比熱の比で空気では 1.4 であるとする。ところで先細ノズルについては、貯気槽圧がある値 (理想的には約 1.9 kg/cm^2) 以上になれば、ノズル出口面で臨界状態となり、 U_A は音速に等しくなるので、膨張流が到達できるマッハ数 M は

$$M = (P_A/P_\infty)^{1/\gamma} \quad (3)$$

となる。一方、Prandtl-Meyer 角度 ω とマッハ数 M との間には、

$$\omega = 1/\lambda \tan^{-1}(\lambda \sqrt{M^2 - 1}) - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1}$$

の関係があるので (3) から

$$\omega = \frac{1}{\lambda} \tan^{-1} \left(\lambda \sqrt{\left(\frac{P_A}{P_\infty} \right)^{2/\gamma} - 1} \right) - \tan^{-1} \sqrt{\left(\frac{P_A}{P_\infty} \right)^{2/\gamma} - 1} \quad (4)$$

が得られる。ただし $\lambda = \sqrt{(\gamma-1)/(\gamma+1)}$ である。ここで等エントロピー理論に従えば P_A と貯気槽圧 P_0 との間には

$$P_A = 0.5283 P_0 \quad (4')$$

の関係があるので P_A は P_0 から計算で求められる。

こうして、ジェット軸に対して上の ω の角度をなして飛び出した流れは、次にノズル出口から a だけ離れた所でジェット軸と平行になるとし、角度の減少割合は a を n 等分し、単位微小距離 $\Delta x = a/n$ 進むにつれ、 $\Delta \theta = \omega/n$ であると仮定する。したがって、ノズルから x だけ離れた流れの周辺の広がりの角度 θ_i は

$$\theta_i = \omega \left(1 - \frac{i}{n} \right) \quad (5)$$

となる。ただし、 $i = x/\Delta x$ で正の整数である。

軸に垂直な切口断面積を求めるには、噴射後も軸対称流れが継続されると考えられるので円形断面を持つとし、最大断面部すなわち $x=a$ におけるその半径を r とし、その増分をノズル出口面の半径 r^* に対して $\Delta r = r - r^*$ であるとする

$$\Delta r = \sum_{i=1}^n \Delta x \tan \theta_i = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n \tan \omega \left(1 - \frac{i}{n} \right) \quad (6)$$

と表現できる。今 n を無限に大きく取ると $\sum$ の記号は積分で置き換えられ

$$\Delta r = a \int_0^1 \tan \omega(1-x) dx = -\frac{a}{\omega} \log \cos \omega$$

あるいは

$$\frac{\Delta r}{a} = -\frac{1}{\omega} \log \cos \omega \quad (7)$$

が得られる。任意の x 点における半径の増分 Δr_x は

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r_x}{a} &= \int_0^x \tan \omega(1-x) dx \\ &= \frac{1}{\omega} (-\log \cos \omega + \log \cos \omega(1-x)) \quad (8) \end{aligned}$$

となる。後に示すように (7) および (8) は実験と良く合う。さらにノズル出口面と、最大膨張断面と、流れの境界で囲まれた円錐台の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a \left(r - \frac{a}{\omega} \log \cos \frac{\omega x}{a} \right)^2 dx \\ &= \pi r^2 a - \frac{2\pi a^2 r}{\omega} \int_0^\omega \log \cos \theta d\theta \\ &\quad + \frac{\pi a^3}{\omega^3} \int_0^\omega (\log \cos \theta)^2 d\theta \quad (9) \end{aligned}$$

となる。(9)式第1項は、ノズルの出口半径を底の半径とし、 a を高さとする円柱の体積を表わし、第2項と第3項がそれ以外の膨張した部分を表わしていることは明らかである。なお第3項は第1項や第2項に比較して小さいので一般的には無視して差し支えない。

一方、噴流境界の縦主軸となす角度の単位距離当たりの減少割合は、大気の密度、気圧、気温それに湿度と噴流の密度、圧力、温度その他の物理的な性質の相互関係から決まるものであるが、その減少割合が距離に比例するという仮定に立てば、容易にその値を実験的に定めることができる。数種のノズルと貯気槽圧の組み合わせで、いろいろな ω と a の関係をグラフに表わすと、 ω と a との間には直線的な関係があり、その傾きはノズルの出口形状によらず一定で

$$\frac{d\omega}{da} = 4.1^\circ/\text{mm} \quad (10-1)$$

の結果を得た。式(10-1)の積分定数はノズル出口形状により異なり、ノズルA (取れん角度約 4° の先細ノズル) に対しては

第6図 膨張角度 ω とノズル出口から最大膨張断面部までの距離

写真A 先細ノズルから $P_0 = 9 \text{ kg/cm}^2$ で噴出された流れの全体, $P_A/P_\infty = 6$, 空間の縞はマッハ線

写真B 写真Aを拡大し式(8)の値を点で示し実験値と比較する。 $a/r^* = 2.4$ とした。 S はノズル出口からマッハディスクまで a はノズル出口から最大膨張断面部までの距離

第7図

$$\omega = (4.1a)^\circ + 5.6^\circ \quad (10-2)$$

他方, ノズルC (収れん角度 0°) に対しては

$$\omega = (4.1a)^\circ + 8.4^\circ \quad (10-3)$$

の関係があることが実験的に示された (第6図)。

積分定数はノズルの収れん角度に大きく依存していることが予想される。ところで, 実験式(10)の a の値すなわち最大膨張断面部は膨張波が噴流境界で反射した際形成される intercepting shock の形から求めた。

第8図 噴流境界流線の他の理論値は参考文献16による。式(8)の使用限界は $2 < P_A/P_\infty < 10$ である。 $P_A/P_\infty < 2$ では実際より低目, $P_A/P_\infty > 10$ では高目の値を与えることがわかる。出口マッハ数は 1。

すなわち intercepting shock が最も広がった位置を最大膨張断面部とした。写真上ははっきりした湾曲が描かれた部分が intercepting shock の形を表わしていると考えられる。しかし, 噴流の幅と intercepting shock の幅の最大地点は厳密には異なるので, (7)式あるいは(8)式を使用する際, a の値は, 噴流幅が広がりきってしまった位置を採用した方がより良い近似が得られる。写真における計算値の紹介は, 第7図上噴流の最大幅を取る位置として妥当かつ単位距離を図に表わす上で都合の良いようになる位置として $a/r^* \approx 2.4$ を採用して, a を 10 等分し(8)式による計算値を点で表わしたものである。 a の値が少々変化しても流線の計算値自体には,それほど大きな変化は生じないことが分かる。

3.2 LATVALA の方法との比較 1959 年 LATVALA は噴流境界を求める簡便な方法を提案している。この方法は圧力比が高いとき, すなわち低密度雰囲気中に自由噴流の膨張を行なわせた場合, 実験値との良い一致が見られると報告されている¹⁹⁾。しかし著者らの行なった実験のように大気中に自由噴流の膨張を行なわせた場合は, 圧力比が 10 以下の程度であり, 著者らの実験値と比較してかなり小さめの値を与えた。その理由として考えられることは (1) ノズル内の境界層により P_0 と P_∞ の間には必ずしも等エントロピーの関係は成立しない。(2) 厳密には貯気槽圧と大気圧 (雰囲気中の圧力) の比を膨張角度に結びつけるよりも, 出口静圧と大気圧によって膨張角度を求める方が誤差の生じる度合いが少ないだけ妥当だと考えられる。事実, 著者らの行なった実験で収れん角度 4° を有するノズルによる噴流と収れん角度が 0° であるノズルによる噴流の幅は, 同じ貯気槽圧に対して前者が大きくなるが, この事実はノズル出口静圧の考慮なくし

第1表 大気中へ噴射された噴流境界の幅 r/r^*
(式(8)と LATVALA の方法の比較)

F_0	LATVALA		式(8)	
	0°	-4°	0°	-4°
2.5	1.015			1.035
3	1.041	1.018	1.027	1.074
3.5	1.070	1.033	1.045	1.099
4	1.104	1.059	(1.056)*	1.132
5	1.166	1.110	1.141	1.217
6	1.216	1.151	1.211	1.304
7	1.273	1.199	1.290	1.368
8	1.326	1.244	1.369	1.470
9	1.373	1.283	1.476	1.555

* () 内の値は $P_0=3.8 \text{ kg/cm}^2$ の時の値ここで r : 噴流境界幅 r^* : スロート半径 (ノズル出口半径) θ_0 : ノズル出口での開き角 (度) P_0 : 貯気槽圧 (絶対圧) (kg/cm^2)

ては説明のつかない所で、LATVALA の考えに従えば矛盾した結果を与えている。要するに著者らの提案している方法は、出口面の膨張角度が必ずしも貯気槽圧と大気圧によって求まる PRANDTL-MEYER の膨張角度に一致しないことを鑑み、その欠点を是正するため、ノズル出口静圧と大気圧の比から膨張角度を算出したものである。

第1表に LATVALA の方法と著者らの方法により噴流幅を求めた値が掲示されている。LATVALA の角度の刻みは 0.5° とし、著者らの方法による計算は、後述の実験結果 (第5表) に示される、ノズル出口面から最大膨張断面部までの距離を採用した。LATVALA の方法と著者らの (8) 式による結果は収れん角度が 0° の場合は比較的良好一致を見るが、収れん角度が 4° の場合には著者らの実験および計算方法では r/r^* が大きくなるに対して LATVALA の方法による計算値は逆に小さくなる。

3.3 ノズルの出口形状の効果、収れん角度について

先細ノズルの理想的な形状算出には、GOLDSTEIN, JONES and BELL および WITOSZYNSKI らが与えた式によれば良いが、もし断面積が直線的に変化する先細ノズルを製作するとすれば、次のような考慮が必要だと思われる。

このような先細ノズルの場合、ノズル管壁がしだいに狭くなるので、壁と流れが互いに押し合う力は大きい。したがって、断面積の変化がないノズルに比較して、流れが壁から剥離し難くなるが、一方では、出口の流速は、ノズルの収れん角を θ とすると、 $\cos \theta$ の効率しか持たなくなる。それ故、効率の良い先細ノズルを作るには、壁の衝突による運動エネルギーの損失と、壁から流れが剥離することに伴う乱流混合による

第2表 ノズル形状による抵抗係数 λ
((13) 式で $R=2.7 \times 10^5$ とした)

θ	(13) 式による λ (θ によらない)	(17) 式による λ
4°		0.0115
8°	0.015	0.053
12°		0.128
30°		0.549

エネルギーの損失を考慮し、適当に収れん角を決める必要がある。乱流混合によるエネルギー損失を、圧力の形で表わすと

$$\Delta P = \frac{4l\tau_0}{d} \quad (11)$$

ただし、 l と d はそれぞれ管の全長および直径で、 τ_0 は

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho V^2 \quad (12)$$

ここに ρ , V および λ はそれぞれ流れの密度、速度および抵抗係数である。 λ とレイノルズ数 R との間には乱流に対して

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10} R \sqrt{\lambda} - 8 \quad (\text{NIKURADSE}) \quad (13)$$

の関係が成り立つ。

一方、収れん角 θ 、出口半径 r^* 、全長 l のノズルの内部表面積 S は

$$S = \pi r^{*2} \left\{ \left(1 + \frac{l}{r^*} \tan \theta \right)^2 - 1 \right\} \frac{1}{\sin \theta} \quad (14)$$

であり、壁との衝突により流れと逆方向に、流れが受ける反力は単位面積当たり

$$\Delta P_x = \rho V^2 \sin^2 \theta \quad (15)$$

であるので、内部表面積 S 、全体については

$$P_x = \Delta P_x \times S = \pi r^{*2} \rho V^2 \left\{ \left(1 + \frac{l}{a} \tan \theta \right)^2 - 1 \right\} \sin \theta \quad (16)$$

となる。 $\Delta P = P_x / \pi r^{*2}$ とすると (16) を (11) に組み合わせ

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{r^*}{l} \left(\frac{l^2}{r^{*2}} \tan^2 \theta + \frac{2}{r^*} l \tan \theta \right) \sin \theta \\ &= \left(\frac{l}{r^*} \tan \theta + 2 \right) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (17)$$

いくつかの θ の値に対する (17) 式による λ の値と (13) 式で $R=2.7 \times 10^5$ として計算した λ の値を第1表で比較する。実用に供したノズルの収れん角を θ にとると、(17) 式による λ は (13) 式による λ と大体一致することが分る。

4. ノズル出口静圧

4.1 ノズル出口静圧とスクリーチの関連性 ノズ

第9図 貯気槽圧 P_0 と出口静圧 P_A と関係

ル出口静圧は、水銀マンメーターで観測すると、かなり不安定な値であることがわかる。第5表または第9図に見られる通りノズル出口静圧は、貯気槽圧の増加につれて増加するが、必ずしも常に両者の比例関係は成立しない。比例関係からはずれる度合いは、ちょうどスクリーチが発生するときにきわ立っている。

4.2 ノズル出口形状による出口静圧の特徴 同じ貯気槽圧のもとでノズルDの出口静圧はラバールノズルBの出口静圧より、つねに大気圧に近い値を示した。また、先細ノズルAと断面積一定のノズルCの出口静圧は、つねに大気圧以上で、同じ貯気槽圧のもとでは、断面積一定のノズルCの出口静圧の方が先細ノズルAのそれより、つねに低い値を示した。

4.3 断面積一定のノズルの出口静圧 断面積一定のノズルCの出口静圧と貯気槽圧の関係は、先細ノズルAの場合に比較して、著しく比例関係から外れる。この現象をさらに詳しく観察する。

いま、 P, ρ および U で管内の静圧、密度および流速を表わし、添字 B および C でノズルDの静圧孔位置 t_B および t_C における状態を表わすと、まずノズルDの管内静圧分布の観測から

ここで

$$P_C < P_B \quad (a)$$

および

$$P_B + \rho_B U_B^2 = P_C + \rho_C U_C^2 \quad (b)$$

を考慮すると

$$\rho_B U_B = \rho_C U_C \quad (c)$$

および

$$U_C > U_B \quad (d)$$

の関係があることがわかる。(d)は管内の摩擦による速度の低下を示すものと考えられる。また

$$\rho_B > \rho_C \quad (e)$$

の関係を考慮すると(d)から

$$\frac{1}{2} U_B^2 + \frac{C_B^2}{r-1} = \frac{1}{2} U_C^2 + \frac{C_C^2}{r-1} \quad (f)$$

であることがわかる。ただし、 C_B および C_C はノズルDの管内の点 t_B および t_C における音速である。(d)と(f)から当然 t_B および t_C におけるマッハ数 M_B および M_C の間には

$$C_C < C_B \quad (g)$$

の関係があることになる。一方、 P_B および P_C が貯気槽圧 P_0 に対する臨界圧力より低いことから

$$M_B < M_C \quad (h)$$

であり、このことは、 t_C 点より上流のノズルの入り口付近に一つのスロートを持ち、さらに別のスロートを t_B 付近に持つすなわち二重スロートを持つ管内流れになっていることが予想される。これは管内に発達した境界層によって引き起こされたものと考えられる。

$$1 < M_B < M_C \quad (i)$$

さて、同じノズルDの出口静圧 P_A と t_B における

第3表 衝撃波の影響による出口静圧の計算 実際のノズル出口静圧と、strong shock がノズル管内で起こったとしたときのノズル出口静圧の比較を示す。ノズルDを使用 (M は管内衝撃波のマッハ数) (単位 kg/cm^2)

P_A	P_0	M	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0.967	2		1.83	1.80	1.77	1.71	1.68	1.58	1.49	1.39	1.28	1.15
0.96	2.5		2.29	2.25	2.22	2.14	2.10	1.97	1.86	1.73	1.60	1.44
0.96	3		2.75	2.70	2.66	2.57	2.51	2.37	2.23	2.08	1.92	1.73
0.96	3.5		3.20	3.15	3.10	3.00	2.93	2.76	2.60	2.43	2.24	2.01
0.95	4		3.66	3.60	3.55	3.43	3.35	3.16	2.97	2.77	2.56	2.30
0.915	4.5		4.12	4.05	3.99	3.86	3.77	3.55	3.34	3.12	2.88	2.59
0.665	5		4.58	4.50	4.44	4.29	4.19	3.95	3.72	3.47	3.21	2.88
0.65	6		5.49	5.41	5.32	5.14	5.03	4.73	4.46	4.16	3.85	3.45
0.75	7		6.41	6.31	6.21	6.00	5.87	5.52	5.20	4.85	4.49	4.03
0.89	8		7.32	7.21	7.10	6.86	6.70	6.31	5.94	5.54	5.13	4.60
1	9		8.24	8.11	7.98	7.71	7.54	7.10	6.69	6.24	5.77	5.18
1.1	10		9.15	9.01	8.87	8.57	8.38	7.89	7.43	6.93	6.41	5.75
1.2	11		10.07	9.91	9.76	9.43	9.22	8.68	8.17	7.62	7.05	6.33
1.4	13		11.90	11.71	11.53	11.14	10.89	10.26	9.66	9.01	8.33	7.48
1.8	16		14.64	14.42	14.19	13.71	13.41	12.62	11.89	11.09	10.26	9.20

第4表 圧力降下の計算

ノズルD使用 P_B を境界圧として, P_A と P_B からマッハ数 M と対応する貯気槽圧 P_0' を計算し, $\Delta P = P_0 - P_0'$ とする. M の値に対応する衝撃波前後の貯気槽圧を P_{01} および P_{02} とし, $(P_{01} - P_{02})/P_{01}$ の値も比較のために挙げてある.

P_0 kg/cm ²	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6	7	8	9	10	11	13	16
P_B/P_0	0.40	0.40	0.37	0.37	0.37	0.38	0.38	0.37	0.36	0.35	0.37	0.38	0.38	0.38	0.37
P_C/P_0	0.35	0.32	0.30	0.29	0.25	0.26	0.30	0.30	0.29	0.25	0.28	0.28	0.27	0.27	0.28
$\Delta P/P_0$	0.24	0.25	0.30	0.30	0.28	0.30	0.28	0.27	0.33	0.34	0.30	0.28	0.29	0.30	0.30
M	0.82	1.02	1.1	1.2	1.35	1.5	1.76	1.91	1.84	1.82	1.86	1.88	1.88	1.88	1.86
$(P_{01} - P_{02})/P_{01}$	—	0	0.0011	0.0072	0.0303	0.0702	0.1698	0.2373	0.2052	0.1962	0.2143	0.2234	0.2234	0.2234	0.2143

静圧 P_B との関係について述べると, その値は, 境界層厚さを考慮すると, 断面積比によって決まる所の等エントロピー流れに対応する圧力比と一致している. ただ, 境界層厚さは 12/1,000 で, 一般的な値の2倍である²⁵⁾. ところがこの P_A と P_B に対応する貯気槽圧は, 実際の貯気槽圧に比較してかなり低い. 以下示すように, P_A と P_B の測定値から, 管内に衝撃波が存在することは考えられないので, これは t_B, t_C 間を通過する際の圧力降下によるものと考えられる. この圧力降下の量がちょうど P_C と同じ程度の値になることは興味ある事実である.

4.4 ノズル出口面における流速 貯気槽とノズル出口面における圧力および密度, すなわち, P_0, P_A および ρ_0, ρ_A がわかれば, 出口速度 U_A は

$$\frac{1}{2} U_A^2 + \frac{r}{r-1} \frac{P_A}{\rho_A} = \frac{r}{r-1} \frac{P_0}{\rho_0}$$

から $r=1.4$ を代入して

$$U_A = \sqrt{7 \left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P_A}{\rho_A} \right)} \quad (18)$$

が得られる. ここで等エントロピー条件を使って

$$\frac{P}{\rho^r} = \text{一定}$$

を仮定すれば, 密度は大気密度と出口面の静圧および貯気槽圧の大気圧に対する比から計算できる. (18) 式により U_A を計算すると, その値は必ずしも貯気槽圧に比例せずスクリーチの周波数と相似の変化を示す(第5表).

5. 音響特性と実験結果

5.1 音響特性 膨張不足流れにより発生する音の特徴は, ある圧力比の時にのみ強い音が発生することである. 先細ノズルAによる噴流では, 貯気槽圧を 3 kg/cm² に高めるまでは, 音圧レベルは貯気槽圧とともに漸次増加する. しかし 3 kg/cm² を境にして, 3.5 kg/cm² のときは逆に音圧レベルは減る. 3 kg/cm² のときに発生するスクリーチの周波数は 12.5 kHz である. さらに貯気槽圧が 5 kg/cm² および 7 kg/cm² まで高められると, 再び音圧レベルが貯気槽圧に対して極値を取るようになり, そのときのスクリーチの周波

第10図 貯気槽圧による音圧レベルの変化
縦軸は音圧レベル, 横軸は貯気槽圧

数は, それぞれ 10 kHz および 8 kHz である. 貯気槽圧が 8 kg/cm² および 9 kg/cm² のときの音圧レベルは貯気槽圧が 7 kg/cm² のときよりも 2 dB も低い. 特にスクリーチは 3 kg/cm² 以上の貯気槽圧では, 高圧になるほど弱くなる傾向が確められた. 断面積一定のノズルCによる音の音圧レベルも貯気槽圧に対して, 上と同様の変化を示すが, 音圧レベルの変化の大きさは, 前者よりも小さくなっている(第10図).

5.2 音響特性と実験結果 前節ですでにしばしば述べたように, 音響特性と流れの特性との間には密接な関係があるが, ここで音響特性の中で最も代表的な, スクリーチの周波数とノズル出口静圧その他の実験結果をまとめて第5表に列挙した.

6. あとがき

膨張不足流れの特性は, 音響特性まで含めて, ノズルの出口静圧によって決まってくることが確かめられた. チョークド・ジェット(音速の膨張不足噴流)の境界流線の形は, その出口静圧から容易に計算されることがわかった. ただ, ここで求めた方法は, ノズル出口から最大膨張断面部までの距離が分かったとき, 流線の形を得るためのものである. 最大膨張断面部までの距離についてさらに追求することと, スクリーチの周波数と出口速度の関連性をさらに研究することが

第5表 膨張不足流れの測定値

P_A : 実験値	ノズル出口静圧	kg/cm ²	f : 実験値	スクリーチの周波数	kHz
P_0 : 実験値	貯気槽圧	kg/cm ²	ω : (4)式による計算値	膨張角度	(°)
a : 実験値	ノズル出口から最大膨張断面までの距離*		$\Delta r/a$: (7)式による計算値	実験値も大略同じ	
r^* : 実験値	ノズルスロート半径(先細ノズルと断面積一定ノズルでは出口半径を採用)		U_A : (18)式による計算値	出口速度	m/sec
S : 実験値	ノズル出口からマッハディスクまでの距離		V : (9)式による計算値	膨張流1パターンの体積	
*: ここでは a の値は intercepting shock の形から求めた. すなわち, intercepting shock が最も広がった位置を a の値とした.			V_E : (9)式の第2項以下	膨張した部分の体積	

第5表の1 先細ノズル(ノズルA)

P_0	P_A	a/r^*	r/r^*	S/r^*	a/S	ω	$\Delta r/a$	U_A	f	$(V_E/V) \times 100$
1.5	1.22	0.7	1.0	—	—	2.2	0.0083	161	—	0.01
2.0	1.44	0.7	1.01	—	—	5.4	0.0204	213	—	0.01
2.5	1.75	0.85	1.04	—	—	10.7	0.0407	240	12.5	0.01
3.0	2.08	1.2	1.07	1.55	0.77	16.0	0.0613	237	12.5	0.05
3.5	2.23	1.3	1.1	2.15	0.60	19.6	0.0756	302	12.5	0.07
4.0	2.53	1.4	1.13	2.3	0.61	24.2	0.0943	302	12.5	0.09
5.0	3.51	1.45	1.2	2.4	0.60	36.7	0.1418	291	10	0.14
6.0	4.13	1.65	1.3	2.7	0.61	43.6	0.1837	300	10	0.20
7.0	4.72	1.7	1.37	3.0	0.57	49.4	0.2158	322	8	0.23
8.0	5.37	1.9	1.48	3.15	0.60	54.4	0.2479	332	8	0.29
9.0	5.99	2.0	1.56	3.5	0.57	58.7	0.2763	341	8	0.34

第5表の2 断面積一定ノズル(ノズルC)

P_0	P_A	a/r^*	r/r^*	S/r^*	a/S	ω	$\Delta r/a$	U_A			f
								(i)	(ii)	(iii)	
1.5	1.04	—	—	—	—	—	—	254	167	—	—
2.0	1.12	—	—	—	—	0.637	0.0048	329	259	150	—
2.5	1.32	—	—	—	—	3.56	0.0135	350	277	175	16
3.0	1.59	0.9	1.03	1.5	0.60	7.84	0.0297	357	295	173	12.5
3.5	1.76	1.1	1.05	1.8	0.61	10.73	0.0410	382	312	217	12.5
3.8	1.78	1.3	1.06	2.1	0.62	11.3	0.0432	402	341	250	12.5
5.0	2.63	1.44	1.1	2.4	0.60	25.0	0.0978	392	313	208	10
6.0	3.15	1.6	1.2	2.7	0.59	32.8	0.1316	407	334	221	10
7.0	3.72	1.8	1.3	2.9	0.62	39.1	0.1614	403	319	208	8
8.0	4.34	1.9	1.38	3.1	0.61	45.5	0.1945	399	312	181	8
9.0	4.96	2.1	1.48	3.5	0.60	51.1	0.2264	411	326	193	8

(i) P_0 の値をそのまま用いて計算した場合(ii) 有効貯気槽圧を $0.8 P_0$ とした場合(iii) 有効貯気槽圧を $0.7 P_0$ とした場合

有効貯気槽圧とは, 貯気槽圧から圧力降下を差引いた値

今後残された課題である。

最後に本研究の貴重な助言を頂いた九州大学航空教室岩崎教授, ならびに九州大学機械教室生井教授に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) POWELL, A.: On the noise emanating from a two-dimensional jet above the critical pressure, *Aero. Quarterly*, Vol. IV, (1953), p. 103.
- 2) POWELL, A.: On the mechanism of a choked jet noise, *Proc. Phys. Soc.*, Vol. 66, B, (1953), p. 1039.
- 3) POWELL, A.: The reduction of choked jet noise, *Proc. Phys. Soc.*, Vol. 67, B, (1954), p. 313.
- 4) POWELL, A.: On the edge tone, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 33, No. 4, (1961), p. 395.
- 5) POWELL, A.: Vortex action in edge tones, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34, No. 2, (1962), p. 163.
- 6) POWELL, A.: Three-Sound-Pressure theorem, and its application in aerodynamically generated sound, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34, No. 7, (1962), p. 902.
- 7) POWELL, A.: Experiments concerning the sound-sensitive jet, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34, No. 7, (1962), p. 907.
- 8) HAMMITT, A. G.: The oscillation and noise of an overpressure sonic jet. *J. Aero/space Sci.*, Vol. 28, No. 9, (1961), p. 673.
- 9) CURLE, N.: The mechanism of edge-tones, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 216, A, (1956), p. 412.
- 10) Lighthill, M. J.: On sound generated aerodynamically I. General theory, *Proc. Roy. Soc.* Vol. 211,

- A, (1952), p. 564.
- 11) Lighthill, M. J.: On sound generated aerodynamically II. Turbulences as a source of sound. Proc. Roy. Soc., Vol. 222, A, (1954), p. 1.
 - 12) Lighthill, M. J.: Sound generated aerodynamically. The BAKERIAN Lecture, 1961, Proc. Roy. Soc., Vol. 267, A, (1962), p. 147.
 - 13) Lighthill, M. J.: Jet Noise, AIAA J., Vol. 1, No. 7, (1963), p. 1507.
 - 14) Weeks, T. M.: Sound generation by shock-vortex interaction, AIAA J., Vol. 5, No. 4, (1967), p. 660.
 - 15) Frowcs Williams, J. E.: The noise from turbulence convected at high speed, Phil. Trans. Proc. Roy. Soc., Vol. 255, A, (1963), p. 469.
 - 16) Adamson, Jr., T. C.: On the structure of jets from highly underexpanded nozzles into still air, J. Aero/space Sci., (1959), p. 16.
 - 17) Crist, S., Sherman, P. M. and Glass, D. R.: Study of the highly underexpanded sonic jet, AIAA J., Vol. 4, No. 1, (1966), p. 68.
 - 18) Latvala E. K.: Spreading of Rocket Exhaust Jet at High Altitudes, AEDC-TR-59-11, ASTIA Doc. No. AD-215866, Arnold Eng. Dev. Center, June, (1959).
 - 19) 小林, 大島, 菅谷: 真空中におけるロケット排煙の実験, 日本航空宇宙学会誌, 16巻, 177号, p. 366.
 - 20) 小竹, 岡崎: ジェット騒音(超音速自由噴流のノイズ場), 日本機械学会論文集, 29巻, 201号, p. 969.
 - 21) 小竹, 岡崎: ジェット騒音(シャワーの騒音強さに対する影響), 日本機械学会論文集, 30巻, 210号, p. 253.
 - 22) 小竹: ジェット・ノイズ, 日本航空学会誌, 11巻, 113号, p. 162.
 - 23) 島: 収縮ノズルの境界層厚さ, 東北大学高速力学研究所報告, 16巻, 151号, (1960/1961), p. 73.
 - 24) 生井, 松尾, 永井: 衝撃波管の空力特性に関する研究(第2報 衝撃波の形成について), 日本機械学会論文集, 34巻, 267号, p. 1969.
 - 25) 河崎, 岡部, 尾形, 安藤: 吹出し超音速風洞のノズルの予備実験, 航空技術研究所報告 26号.
 - 26) 瀬戸: 噴流により発生する音の周波数解析—超音速噴流一, 九川大学工学集報, 41巻, 1号, p. 101.
 - 27) 瀬戸: チョークド・ジェットの1特性(I), 九州大学工学集報, 42巻, 5号, p. 784.
 - 28) 瀬戸: チョークド・ジェットの1特性(II), 九州大学工学集報, 42巻, 6号, p. 956.

2重摂動法による重複連結領域の平面熱応力問題の解析*

(長方形穴をもつ円形領域の定常熱応力問題への応用)

竹内 洋一郎**・野田 直 剛**

Plane Thermoelastic Problems in Multiply-connected Region Solved by Double Perturbation Technique

Yoitiro TAKEUCHI and Naotake NODA

Abstract

The present work is concerned with the steady state two-dimensional thermal stress problems in a thick circular cylinder having a rectangular hole when the both surfaces are kept at the constant temperatures.

The analysis is carried out by using the complex variable approach. In performing the calculation of the parametric coefficients included in the complex stress functions we adopt the double-perturbation technique.

1. 緒 言

宇宙高速飛行, 原子動力の工業的利用等の開発に関連して, 機械および構造物の熱応力問題の正確な解析は重要問題の一つとなった。著者らは非定常熱応力問題に関しては熱源のある単連結領域の問題^{1), 2)}, 定常

熱応力問題に関しては変位の一価性を含む多角形領域の重複連結領域の問題³⁾⁻¹²⁾について, 全然異種の解析手段を用い, 従来多くの研究を発表してきた。重複連結領域の問題は変位の一価性に関する処理が複雑となるため, 比較的簡単に考察できる中空円筒の場合を除いてほとんど解析されておらず, 著者らの発表を除いては報告は少ない。

ただし, 多角形穴をもつ無限大領域の場合には, 領域の境界としては穴の形状に関するものを一つ考えればよいため処理も比較的容易で, 内外の報告も少しあり, 著者らもまたいわゆるくいちがい法⁷⁾を用い, 複素応力関数法で等温弾性問題との重ね合わせ解法で処理した。

しかし内外境界の異種の幾何学的形状をもつ多重連結の有限領域の問題に対しては, 多くの実用性のある問題にもかかわらず, 境界条件の処理が困難なため, 熱応力問題の残された分野となっている現状で, その研究報告は内外を通じてほとんど無い。この問題のう

* 昭和45年7月2日第12回構造強度に関する講演会にて講演。昭和45年9月8日原稿受理

** 静岡大学工学部機械工学科