構造のフォルムと幾何学*

Structural Form and Geometry

三 浦 公 亮**

Koryo MIURA

は し が き

フィレンツェのアカデミア美術館を訪れてミケランジェロの未完の彫像(第1図)を見る人は、おそらく彫刻に対するこれまでとは違った感懐をいだいてその場を去るにちがいない。それは彫刻というよりは大理石の中に本来埋もれていた像を掘り起こしたような感じなのである。漱石の「夢十夜」の中にも護国寺の山門で運慶が仁王を彫る話として同様のことが書かれてあるから、天才の作品には、自然の中の本質的なフォルムへの接近ということで特徴付けられる何物かがあるに違いない。

このことは「美のフォルム」の創造にたちむかう彫

第1図「囚人」ミケランジェロ作、大理石、アカデミア、フィレンツェ蔵

刻家にとってはもちろん、「構造のフォルム」の創造を対象とするわれわれ構造家にとってもひとしく思惟させるものを含んでいる。かれらの用いるのは数学と力学である。違いはあるにしても、本質的には共通のものがある。なぜならば、両者はともに三次元空間のきめられた領域によって規定されるが、彫刻はその領域を通して人間の内面的なものを表現し、構造はその領域に内在する応力場によって構造の概念として完成するからである。

構造のフォルムを創造するための数学の諸分野で最も重要なのは、第一に幾何学であり第二に変分学であると思われる。これは、構造概念はその幾何学的形状とそれに内在する一次的な応力場によって表現されること、そしてその形状の最適化や洗練が変分原理によって決定される場合が最も一般的であることから明らかであろう。

構造のフォルムの創造という本来は正面切った仕事現代ではほとんどかえりみられず、構造の研究即解析的研究という傾向が大方を支配していることは一つの偏りであると思われる。たしかにフォルムは三次元ユークリッド幾何学の厳しい法則に支配され、プラトンの立体が5つしか存在しないことに象徴されるように、意味のあるフォルムは極めて限定的であることがこの方向の研究を挫けさせるに違いない。しかしながら一方では新しい材料が登場し、新しい環境への挑戦が行なわれようとするとき、新しい構造のフォルムの生まれる可能性は少からず開けているように思われる。20世紀の材料には少なくともチンクェチェント*の大理石には無いフォルムが埋まっているはずである。

この稿では、「不当にも無視されている幾何学」が基本的な構造のフォルムと如何に関係しているか、またそれが新しい構造のフォルムの創造に如何に役立ち得るかをいくつかの例によって示そう。なお筆者自身この問題に深くかかわり合いを持っているので、これは筆者の立場から書かれ、客観性を必要とするレビューなる看板は本稿にはふさわしくないかもしれない。

* 昭和46年5月13日原稿受理

** 東京大学宇宙航空研究所

* 盛期ルネッサンス

1. 構造のフォルムの創造

詳論に入る前に、構造の歴史のなかに構造のフォルムの創造のいくつかを振り返って見ることは無益では無いであろう。

アーチは、古典芸術の中で完璧な域までに達することのできた応用力学上の主要な発見であるとされている(第2図)。アーチは人間にとってドラマチックな印象を与えるが故に、多くの伝説はこの構造概念が悪魔のなせる仕事として伝えている。科学的にはある偶然の経験とその観察を普遍化することのできた人智に帰するのが妥当であろう。圧縮にしか働かない石という材料を用いて、圧縮応力が主として働くようなフォルムを導いたことは、アーチが確かな工学理論に基づいた創造物であることの証拠である。またアーチはその

裏返しとして、懸垂曲線の幾何学または変分学上の等周問題として引張応力のみで働くフォルムと深い関連を有している。

アーチの発見より数千年を経た現代においても、なお新しい構造概念の発見を示すことができる。第3図は、ラングレー・テンション・シェル (Langley's tension shell) と呼ばれる惑星大気突入のために考案された機体である。惑星大気密度の情報が不確実であることにより、弾道係数 ($W/C_D A$) の極めて小さい機体を用いることが良いと考えられた。そのような機体は、大気の性質の測定の十分な時間をかせぎ、惑星表面に衝突する以前に減速機構の展開に適当な速度と高度を得ることができるのである。

第3図に示したテンション・シェルによる機体は、先端の部分のペイロードと、中央部の笠状の薄いシェ

第2図 アーチ、リポール修道院回廊、スペイン

第3図 ラングレー・テンション・シェル

ル、後縁のリングからなっている。もし円錐状の薄いシェルが用いられるならば、突入の際の空気圧力によりシェル要素には圧縮応力が生ずるから、極端に薄いシェルの設計は挫折が基準になるであろう。したがって重量軽減には限界がある。もし第3図のような形状のシェルが用いられると、これは負のガウスの曲率を有するから、母線の形状によってはいたるところ引張応力が作用するようにすることができる。したがってこのシェルは弾性的に安定で、設計基準は材料強度をとることができ、構造重量をそして弾道係数をかなり小さくすることが可能である。このテンション・シェルの形状は、圧力分布・材料の異方特性・応力のとり方によってその平衡条件から決定されるが、母線の形状がだいたいにおいて懸垂曲線に近いことが予想され実際そのようになる。懸垂曲線の回転曲面は、回転曲面として唯一の最小曲面であるから、このことから重量軽減の可能性があることは面白い。またこの例などは新しい環境、新しい材料、新しい構造のフォルムの結合を、惑星大気・複合材料・テンション・シェルのかたちで示した典型であるといえよう。

以上古代と現代の二つの構造概念が共に純粋に力学理論によって支持されるか、または導かれるのを見た。構造のフォルムの創造にはしかしこれとは全く異種の経路を経てつくられるものがある。自然は常に人間の教師であったから、われわれは自然における構造形態の多くを模倣してきた。実際大部分のシェル構造のフォルムが、自然界の生物構造の模倣であることは万人の認めるところである。もちろん自然自体は人間よりはるかに超絶した構造の天才であるから、自然を模倣することは必然的に構造力学的に意味のあるフォルムとなっていることが十分に期待されるものである。建築における新しい構造概念の展示の代表的な場である万国博覧会では、われわれに一眼極めて人工的・独創的な構造物が示されるが、その相当数のフォルム

は自然界における構造のフォルムの模倣であるといつて良いであろう。実際われわれは、顕微鏡下に各種の硅藻類をもちこむことにより、現在および未来の万国博建造物の原形を大抵見出すことができるのである。

いずれにせよ、構造のフォルムを導く一般的な方法は恐らくないであろう。ある場合には力学理論が先行するかも知れないし、またある場合には幾何学が主導するかも知れない。これに関してわれわれは、ワグナー・ビーム (第4図) によって代表されるこの種構造の概念は、この種の構造が挫折後も耐荷能力が増大するという観察が先行して概念が生まれ、その理論付けとして張力場理論が展開された経緯を想起すべきであろう。

筆者は以下の数節において、幾何学の原理によって導かれる幾つかの基本的な構造のフォルムを示そう。これらはサンドイッチ構造のコアの幾何学であり、その効率と幾何学的形状との関係、新しい構造のフォルムの創造等である。コアは幾何学的には不連続群からなるものと表現できること、その構造としての効率の評価が統計的な和である単一の無次元量によっておこなわれ得ることが、問題を極めて明確にしている。

2. ハニカム・コアの幾何学

ハニカム・サンドイッチ構造 (第5図) の概念は、蜂の幾何学的才能に負っていることは疑いないであろう。その工業的製法は、日本の玩具よりヒントを得て英国人により発明され、さらに米国において工業化されたこともよく知られている。

しかし蜂が最適の剪断剛性を求めて六角形のパターンを発明したことは疑わしく、むしろ最小限の蜜蝋と最小の労働という幾何学課題に完璧な解答を与えたと思われるのが自然であろう。

この幾何学の問題はいわゆる等球のクローゼスト・パッキング (closest packing) の問題として知られて

第4図 ワグナー・ビーム

第5図 ハニカム・サンドイッチ構造

第6図 等円のクローゼ・パッキング

いるもので、これを二次元的範囲で考えれば良い。等球のクローゼ・パッキングの二次元問題はさらに合同な正多角形で平面をすきまなく埋める問題、すなわちレギュラー・テッセレーション(regular tessellation)または正則なタイル張りの理論と密接に関連している。正 p 角形を各頂点のまわりに q 枚敷きつめたテッセレーションは、シュレーフリ(SCHLÄFLI)の記号 $\{p, q\}$ を用いて表わすのが便利である。テッセレーションがレギュラーというのは、この頂点図形*が正多角形である場合を定義とする。実際頂点図形が正多角形でない、正多角形のテッセレーションが存在することは容易にわかる。

$\{p, q\}$ のとり得る値は、 p 角形の内角すなわち $(1-2/p)\pi$ が q 個集まって頂点のまわりをすきまなく埋めるという条件から容易に求められる。すなわち

$$\{3, 6\}, \{4, 4\}, \{6, 3\}$$

がレギュラー・テッセレーションであり、これ以外は存在しない。

第6図は等円のパッキングの二つの方法を示したものであり、これらはそれぞれレギュラー・テッセレーション $\{4, 4\}$, $\{6, 3\}$ の面の内接円になっている。直観

的に $\{6, 3\}$ の方がより経済的なパッキングであることがわかる。これを明確にするために、パッキングの密度を正 p 角形 $\{p\}$ に対する内接円の面積比として定義する。クローゼスト・パッキングはもちろん最も1に近いものとしてとらえることができる。この密度は $\{p\}$ の p の単調増大関数であることは明らかであるから p が大きい程よい。しかし p のとりうる整数値は3, 4, 6であるから、 p の最適値は6である。このときの密度は

$$0.9069$$

になる。すなわち蜂の巣は等円のクローゼスト・パッキングに相当することがわかった。

このように、クローゼスト・パッキングという一つの原理的な幾何学的条件がいくつかの決定的なかたちを排他的にきめてしまうことにわれわれは驚くべき自然の摂理をみる思いがするのである。これは確かに構造のフォルムを求める一つの方角を示していると考えることができる。

さて「ハニカム・サンドイッチ構造は理想的な軽量構造です」等の表現がカタログに記載されても、一般にはあまり奇異と受け取られない程度に、これは一種最適な構造であるとされている。しかし最適な構造と

* 頂点に集まる辺の中点を順に結んでできる図形

は一体何をもって基準とするのであろうか。上記のようにハニカムはクローゼスト・パッキングという見地から最適であることがはっきりしているだけで、コアとして最適形状であるとは蜂の関知するところではないのである。ではどのようにして構造の幾何学的形状の最適度の基準を量的に表現することができるであろうか。

この課題に答えるために、ここにコアの形状の最適度の一つの基準量として幾何効率（又は形状効率） μ を提案することにしよう。

$$\mu = \frac{G_c}{G\alpha}$$

ここに G は使用する材料の剪断剛性率、 α は単位体積当たりの材料の占める体積で充填率と名付け、 G_c はコアとしての等価剪断剛性率である。これは次のような考え方にもとづいている。まず剪断剛性率 G なる物質にだんだん穴を開けて軽量構造を作っていくとすると、この軽量構造の等価の剪断剛性率は次第に減少していくであろうが、この構造は本来の G の穴の部分を差し引いた程度すなわち $G\alpha$ 程度は働いてもらわなければならないであろう。かくて期待せる幾何効率 μ の値はとりあえず 1 に近いものと考えることができる。具体的には充填率 0.5 で、元の G の 0.5 程度の G_c が得られれば、材料は 100% 有効に使われているといい得るし、これはもとをただせばコアの構造の幾何学的形状が最適であることになるであろう。また μ の値が 1 を超えることはまず尋常の手段では期待できないであろう。なぜならそのような構造を合わせてゆくと、充填率 1 のときに元来の材質以上の剪断剛性率を得るという矛盾におちいるからである。このような定義によると、したがって、コアの幾何効率の最適値は $\mu^* = 1$ として量的に規定されるのである。

しかしさらに考えを進めると、一般に μ の最適値 μ^* は充填率 α の函数であることが明らかとなる。これは次のように説明される。第 7 a 図に示されるコアについて図のように座標系をとることとする。 α が 1 に近い値であるうちは、コアを構成するマイクロ要素は三次元的ひろがりをもつから、 $X-Z$ 面および $Y-Z$ 面の両方の剪断に対して働くことができる。しかし α が 0 に近づくにつれて、要素の形状はその一つあるいは二つの次元を失なわなければならないから、高々二次元的形状の要素よりなる組織となるであろう。このような高々二次元的な要素は、直交する二つの方向の剪断にひとしく有効に抵抗することはできないと考えられるのである。

具体的な例を示そう。第 7 a 図の固体に格子状の部分が残るように四角形の穴をあけると第 7 b 図のようになる。このコアが Z 軸を含む面内の純剪断を受ける場合、格子点に相当する交叉部分は $X-Z$ 面および $Y-Z$ 面の剪断にともに働くが、他の部分はそれが主にある面内の剪断に働き、それと直交する方向にはあまり働かないであろう。この格子の $\alpha \rightarrow 0$ の極限的な場合（第 7 c 図）を考えれば、格子点の部分の他の部分に対する割合は零に収束し、その結果材料の半分ずつがそれぞれ直交する方向に 100% 有効に働くと仮定すると、 $\alpha \rightarrow 0$ のときの μ の最適値 μ^* の収束値は 0.5 と決定されるのである。通常用いられるコアの充填率 α は 0.1~0.007 の範囲にあることが多いから、 $\alpha \rightarrow 0$ の付近の μ^* の持つ意味は重要である。かくて、幾何効率の最適値 $\mu^*(\alpha)$ の曲線は、一般に第 8 図のようになることは十分に根拠のあることといえよう。

さてこのような基準を用いて、ハニカム・コアの最適度を判定してみよう。表板の剛性が無限大とした場合の正六角形ハニカム・コアの等価剪断剛性は赤坂・

第7図 充填率は幾何効率に影響するか？

第8図 コアの幾何効率の最適値と充填率の関係

高岸により次のように与えられている。

$$(G_c)_L = \frac{5}{3\sqrt{3}} \left(\frac{t}{a} \right) G \quad (\text{リボン方向})$$

$$(G_c)_W = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{a} \right) G \quad (\text{リボンと直交方向})$$

ここで a は六角形の一辺の長さ, t は箔の厚さである。また充填率 α は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{t}{a} \right)$$

これより幾何効率 μ はそれぞれの方向について異なり

$$\mu_L = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$\mu_W = \frac{3}{8} = 0.375$$

と計算される。方向依存性がかなり大きいのは、ハニカム・コアの製造上の理由によりリボン方向 (L 方向) に二重層を有しており、幾何学的には不完全なハニカムであることによる。ちなみに幾何学的に完全なハニカムを想定して計算をおこなうと $\mu = 0.5$ となる。大ざっぱに考えて、上の μ_L で 0.5 より増加した部分は μ_W の減少分に相殺されるから、ハニカム・コアの平均的な意味の幾何効率はやはり 0.5 を達成しているといえる。この意味においてハニカム・コアは一種の最適な構造であるといえることができる。現実にはしかしこの目標は種々の原因により達成されない。主な原因の一つは、一般に等方性のコアが要望されるにもかかわらず、上記のようにリボンと直交方向の剛性が低く、さらに実用値は低く、設計上は小さい方の G_c をとらざるを得ないからである。それでは二重層のない幾何学的に完全なハニカム・コアを現在用いられている連続なリボンによりつくれないかというと、これは無論駄目である。実際レギュラー・テッセレーションの中で $\{6, 3\}$ のみはトポロジ的に一筆

書きのできないパターンなのである。

3. 三次元ハニカム・コアの幾何学

前節に述べたいわゆるハニカム・コアは二次元のクローゼスト・パッキングに相当する構造であるから、これを今後三次元ハニカム・コアと呼ぶことにする。このようにするのは、この概念の自然な拡張として三次元ハニカム・コアなるものが演繹的に定義されるからである。実は自然における蜂の巣も、六角柱の群が背中合せに二つの層をなして、一つの層は一方を向き、他の層は別の方向に向いている。この二つの層の内側のはまり具合は空間的な問題なのである。しかしわれわれはここで単に二つの層だけでなく、もっと多数のセルが空間に存在する場合を考えることにする。

このような問題は、二次元問題の類推から空間における等球のクローゼスト・パッキングの問題に帰せられること、そして三次元のハニカムはこれらの球を内接する多面体の形状となることは容易にわかる。それならば、そのような三次元の蜂の巣には蜂はどのようにして出入りするのか、という疑問が脳裏をかすめても不思議ではないであろう。この疑問に対してわれわれは、たいへんに真面目な解答を用意することができる。二次元の場合の類推から、三次元の蜂の巣に住む蜂は四次元空間を飛び回っており、四次元立体である蜂の巣の境界空間、俗に表面、である境界多面体を通じて自由に出入りすることができるのである。この論理が正しいものであることは後で示される。

三次元のハニカムは、われわれの身近に豊富に存在している。パッケージング材、断熱材、コア等に用いられている発泡プラスチック (独立気泡) は、それが必ずしも等しい大きさの気泡からできていないことを度外視すれば、その製造行程からして三次元のハニカム構造であるといえることができるであろう。未分化の植物細胞の組織なども良い例である。

三次元のハニカムの形状については、随分昔から実験的研究がなされてきた。ヘールズ (HALES, 1727 年) はえんどう豆をランダムにパッキングして加圧し、その形状を調べた結果、これは正 12 面体であるとした。しかし正 12 面体の二面角は 120° より小さいから、共通辺のまわりに三つの正 12 面体をあわせても $10^\circ 19'$ の角の隙間ができてしまう。マツケ (MATZKE) はしゃぼんの泡を観察して、これらは平均 13.7 面体であり、もっとも普通なのは 13 面体でその面は四角形 1 個、五角形 10 個、六角形 2 個よりなると報告している。

これらの実験の結果から、三次元のハニカムの形状のおおよそのイメージが浮かびあがるが、では理論的

に求めることが可能であろうか。

一つの理論的証明が四次元ユークリッド幾何学を適用することによって得られる。ケプラー(KEPLER)は、二次元のレギュラー・テッセレーションは無限正多面体であると考えた*。これの類推から、三次元のレギュラー・テッセレーションが四次元の無限正則胞体(infinite regular polytope)であるとしてすることができる。ここに四次元の正則胞体とは三次元の正多面体の四次元への拡張で、シュレーフリの記号 $\{p, q, r\}$ なる四次元正則胞体は、合同なプラトンの立体すなわち正多面体 $\{p, q\}$ をそれぞれの面 $\{p\}$ が二つの $\{p, q\}$ に属し、それぞれの辺が r 個の $\{p, q\}$ に属するように組み合わせてできたものである。この正多面体 $\{p, q\}$ は、この正則胞体の境界空間、俗に表面、を構成するから境界多面体と呼ばれる。

境界多面体 $\{p, q\}$ の二面角は

$$2 \arcsin \left(\cos \frac{\pi}{q} \sin \frac{\pi}{p} \right)$$

であるから、四次元胞体 $\{p, q, r\}$ が三次元空間のテッセレーションであること、換言すれば、 $\{p, q, r\}$ が無限胞体であるためには、 $\{p, q\}$ が一本の辺の回りに角のすきまなく埋めつくす必要があり、このような角 r 個の総和がちょうど 2π でなければならない。したがって、 p, q, r の間には次の関係が存在する。

$$\cos \frac{\pi}{q} = \sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r}$$

この等式に対する整数解はもちろん $\{4, 3, 4\}$ だけである。この無限正則胞体は境界多面体 $\{4, 3\}$ を一つの辺のまわりに四つあつめたものである。角砂糖のパッケージをあけたとき、われわれはこの無限正則胞体を見ることができる(第9図)。

期待に反して、無限正則胞体 $\{4, 3, 4\}$ は三次元のテッセレーションであるにもかかわらず、これはクロゼスト・パッキング、すなわち三次元ハニカムには相当しない。何故ならば、この場合の密度

$$\frac{(4\pi l^3)/3}{(2l)^3} = 0.5236$$

に比較してさらに大きい密度

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.7405$$

がざくろ石の結晶として自然界に存在するひし形12面体の内接球を用いて得られるからである。またロジャース(ROGERS)によりこの密度の上限が0.7797であることが証明されている。それゆえ三次元のハニカムというものがあるとしたら、その密度は0.7405

* シュレーフリの記号 $\{p, q\}$ が、正多面体にも二次元レギュラー・テッセレーションにも均しく適用できる理由はここにある。

第9図 無限正則胞体 $\{4, 3, 4\}$

から0.7797の間の値をとるべきなのである。

空間において、四つの等しい球を最も密にパッキングするには、すべて互に接するようにすれば良い。それ以上の球を追加するには、この操作を繰返すことが最も密なパッキングを作っていく方向であるとする考えは自然であろう。最初の四つの球の間に形成される頂点図形は $\{3, 3\}$ であるから、この繰返しのできる胞体は $\{p, 3, 3\}$ であることは確からしい。しかしながら前記 p, q, r の関係式は $q=r=3$ のとき整数解をもたない。換言すれば、上記のような操作を続けると遂には球と球の間にすきまができてしまう。一方実験の結果はすべて p が5から6の間の値をとる正則胞体 $\{p, 3, 3\}$ を近似しているように思われる。

そこで少し無茶であるが p が整数であることを放棄して、 p, q, r の関係式を $q=r=3$ としてそのまま解いてみる。

$$\sin \frac{\pi}{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{または} \quad p = 5.1044$$

また境界多面体 $\{p, 3\}$ は平均して F 枚の面よりなるとして、 p と F の関係式により

$$F = \frac{12}{6-p} = 13.398$$

となる。この結果は、五角形の場合が最も多く、六角形の方が四角形より頻度が多いこと、面の数が13と14の間にあるという実験事実の驚くべき裏付けとなっている。 p が整数でないこと、 F が整数でないことは、三次元のハニカムが統計的な意味でのみ存在することを示しているように思われる。

サンドイッチ構造のコアとして用いられている発泡体が、上述のような幾何学的形状を有することが明らかとなった。これがコアとして最適な形状をしているかを検討しよう。種々のプラスチック発泡体のデータより幾何効率 μ を計算すると、 μ は0.1~0.2の範囲

にあるようであり、最適値からは程遠いことが示される。これは次のように解釈することができる。発泡体は巨視的には均質な三次元物体であるが、充填率 α が0.1以下であるとする、コアのミクロな要素は高々二次元的ひろがりすなわち面よりなり、それぞれの要素は一つの面内の剪断にのみ働くようになり、これらの統計的な和が巨視的な特性を決定する。結局 X - Z 面、 Y - Z 面、 X - Y 面のそれぞれ一方向には材料のそれぞれ高々 $1/3$ ずつしか働かないことになる。したがって期待し得る最高の幾何効率 μ^* は $1/3$ なのである。三次元テッセレーションである第9図の形状のコアにおいて、その正六面体のうちそれぞれ二面がその方向の剪断に100%働か、他の四面は全く働かないから、これは確かに幾何効率の最適値 $1/3$ を与えることがわかる。

サンドイッチ構造のコアは、もともと直交する二つの方向の剪断剛性を与えれば良いのであるが、発泡体はさらにこれらと直交する方向の無駄な剪断剛性をつくりだしているのである。そしてこの性質は全くコアの幾何学的形状に帰せられるべきものである。したがって、将来発泡体の幾何学的形状を制御することができれば、より効率的なコアの構造のフォルムを作る指針はこの議論で明らかに示されているといえよう。

4. 単一板よりなるコアの幾何学

2節において、自然に存在する完全なハニカム構造に対して、われわれの工業的に作るものは幾何学的に不完全ハニカム構造であることを述べた。このことはその材料と製造法において自然と人間との差異を示している。工学的に最適な構造のフォルムは、材料消費の経済性のみならず、供給材料、経済的加工法等多くの条件を包括した最適化でなければならないのである。したがって一方では性能を重視する傾向に対して、構造の単純化を特に強調するコアのフォルムが求められることは当然であろう。ここに単一面のトポロジ的変換によるコアなる概念が登場する機会が与えられるのである。

一体サンドイッチ構造におけるコアの役目は何であろうか。“軽構造の理論とその応用”によると“二枚の表板の結合媒体として、それらの支持および安定化の機能”とある。そこで、コアとしての必要十分な機能を発揮できる考え得る限り最も単純な構造は、単一板のトポロジ的変換によってこれを達成するものではないかと思われる。ここにトポロジ的変換とは極めて伸び易いゴムのような材料を考えて、その位相幾何学的性質が変わらないような変換と定義する。

この種コアの代表的なものは、コルゲーション・コアと呼ばれるもので、段ボールはその最も卑近な応用例である。コルゲーション・コアは確かに二枚の平行な表板の間を往復する単一板よりなり、加工は簡単であり、コアとしての優れた機能を有している。しかし、欠点はその極端な異方性にあり、これが使用上の限界を規定するのである。

最近第10図に見られるような楕円関数のレリーフを彷彿させるコアが米国で発明され工業化されている。これはまさに筆者のいう単一板のトポロジ的変換によるコアのカテゴリに入るもので、これを見せられたときは少なからず驚かされたものである。発明者がどのような思考過程でこのコアの幾何学に到達したかはもちろん知るところではないが、これは仮想的に次のように説明することもできよう。

すなわち、コルゲーション・コアの異方性は一方向にのみ周期性を有する形状に基くものであるから、これを改善するには直交二方向に周期性を有する形状とすれば良いであろう。これは第11図で f を連続・一価・有界の周期関数として

$$Z = f_{xz}(X) \quad (X-Z \text{ 面内})$$

$$Z = f_{yz}(Y) \quad (Y-Z \text{ 面内})$$

の二つの関数の積

$$Z = f_{xz}(X) \cdot f_{yz}(Y)$$

のようなものを考えれば良いであろう。われわれはこの種の関数には、主として板の撓み変形などの弾性問題で親しんでいるから、このような考え方が最も自然であろう。確かにこのコアは上記の関数型と定性的に近いものとなる。

このコアの一つの興味ある幾何学的特性は、その製造法と関連するものである。熱可塑性プラスチックの平板を加熱し軟化させた状態で、その両面に交互にずれた位置の格子点状に対置した多数の丸棒状突起によりプレス成型するものである。これはまさにトポロジ的変換を現実に行なったものである。加熱したプラ

第10図 単一板よりなるコアの一例

第11図 直交する二つのコルゲーションの合成 (1)

スチック板は、そのとき近似的に薄膜の状態であるとすると、この形状は最小曲面に近いものになるはずである。

その着想、幾何学的形状の面白さから離れて、構造のフォルムとしての適性を調べると、現実には意外に厳しいことがわかる。当初の着想がコルゲーションを重ねることによって特性を改良することにあつたとするならば、結果として重ねられたものがメリットであるかデメリットであるかの疑問に到達してしまうのである。

人はこれによるサンドイッチ構造を事実上直線部分よりなる立体トラス構造として捉えようとするが、これは大分怪しい。その理由は、これが最小曲面であることを受入れるならば、微分幾何学の法則の教えるところによると、いたるところ平面でないかぎり直線部

分は存在するはずはないからである。むしろいたるところ負のガウスの曲率の曲面であり、通常のコアとしての荷重状態では面内応力だけでなく望ましくない曲げ応力が生ずるのはほとんど避け難いのである。

5. ダブル・コルゲーションコアの幾何学

平面をその直交二方向にコルゲーションさせるといふ命題に対して、われわれはほとんど条件反射的に

$$Z = f_{xz}(X) \cdot f_{yz}(Y)$$

なる函数を想定するであろう。板の曲げや挫屈について二重級数の使用に慣らされてきたあとではなおのことこの方向への傾斜に抵抗し難い。構造のフォルムを創造する仕事にとって、いかにこのような固定観念が邪魔になるかを筆者は示すことができる。

実は上記函数以外にも平面を直交二方向にコルゲ

第12図 直交する二つのコルゲーションの合成 (2)

ションさせる良い方法があるのである。第 12 図において我々は $X-Z$ 面には前と同様に周期函数 $f_{xz}(X)$ を考えよう。しかしもう一つの周期函数としては $Y-Z$ 面ではなくて、 $X-Y$ 面の周期函数 $f_{yx}(Y)$ を考える。いま曲線 $f_{xz}(X)$ をその曲線上の固定せる一点が曲線 $f_{yx}(Y)$ 上を進むように併進させるときに描かれる曲面

$$Z = f_{xz}[f_{yx}(Y)]$$

は確かに直交二方向に周期を有する函数をあらわし、しかも振幅が一定の周期函数を用いることによって、二つの平行平面の内側に内接する曲面となる。なお筆者はこの種の曲面の総称として《ダブル・コルゲーション面》* を仮に用いている。

ダブル・コルゲーション面は、その周期函数のかたちによって多種多様の形状をとり得るが、ここではその中でも最も美しい幾何学的関係を有する曲面を紹介しよう。これは第 13 図および表紙写真に示される図形で、二つの周期函数としてともに鋸歯型函数を用いる結果生ずる。一見結晶のような規則正しい美しい形状であり、実際幾何学的にも不連続群としてはっきり規定することができる。すなわち、第 14 図は四つの合同な平行四辺形からなる基本領域で、この基本領域の二つの独立な併進から生成される群 $p1$ として、ダブル・コルゲーション面を表現することができる。さらに任意の頂点にあつまる四つの角の和を調べるとこれはちょうど 2π であり、したがってこの面は展開可能面であるという驚くべき性質を有することに気付くのである。

展開可能面であるがゆえに、そして紙は展開可能面にしか折られないゆえに、この形は折紙や造形の世界ではかなり以前から知られていたらしい。英国人で紙彫刻の専門家サドラー (SADLER) の著書には“影ひだ折り”としてこの形が紹介されている。この形を最初にサンドイッチ構造のコアとして考えたのは、フラン

第 13 図 可展ダブル・コルゲーション面

* double corrugation surface

第 14 図 可展ダブル・コルゲーション面の基本領域

ス人が最初でありその目標は段ボールの中芯にあったらしい。しかしながら、恐らくはその工業的製造法の困難さと、構造としてのメリットの評価ができないために、構造のフォルムとしては受け入れられず、単なる紙の造形の遊びとしてしか生き延びないように見える。もちろんそれが美しい幾何学を内蔵するものであることも全く知られずに、その存在は今や失なわれようとしている。

筆者はこの“影ひだ折り”を特殊な例として含む一般のダブル・コルゲーション面について、それをコア・ジオメトリに適用した場合の解析を行なった。これは本稿と前後して出版される論文に詳細に述べられているので、ここではこの特殊例についてその基本的な性質を説明しよう。

まず直交デカルト座標を適当にとると、基本領域を構成する四つの平行四辺形面の法線ベクトルの方向余弦 l, m, n はそれぞれの平行四辺形について絶対値が等しい 1 組で表現することができる。なかんずく Z 軸との方向余弦 n は 0 でも 1 でもない。この n が 0 でも 1 でもない面が分布して存在することこそ、実にこのコアの構造特性を決定付けるのである。すなわちハニカム・コアの場合は各構成面はすべて $n=0$ であるから、コア全体が巨視的に剪断変形を生じた場合各構成面に生ずる変形も純粋剪断変形である。しかるに今の場合は $n \neq 1, 0$ であって表板に対して構成面はすべてある傾きを持っており、これに生ずる変形は純粋剪断変形ではない。またこの空間に傾いた面は 4 種類が分布していて、全体的には統計的な和として働くから、一つの方角に対して特に等価剪断剛性が小さくならないように面をきめることができる。理論的には、幾何効率が 0.5 に近い形状を設計できることがすでにわかっている。

この特別な例に見るように、一般に“ダブル・コルゲーション・コア”はハニカム・コアに匹敵する幾何効率を、単純な単一面のトポロジック変換によって達

成している全く新しい構造のフォルムなのである。

6. フォルムの幾何学とデフォルメの幾何学

構造のフォルムの幾何学が、構造の根元的な性質によっているものであるから、構造のデフォルメ(変形)の幾何学と密接な関係にあって、考えてみればあたりまえなのかもしれない。しかし、上に導いたダブル・コルゲーション面と、平板やシェルの挫屈問題との奇妙ともいべき結びつきには誰しも驚かされるに違いない。

前節に示した特別なダブル・コルゲーション面が展開可能面であることはすでに述べた。つまり第13図のモデルを展開して行くと完全に平面になり、逆に平面から折り込むと元に戻る。幾何学ではこのように互に展開可能である二つの面は等長(isometric)であると呼ぶ。また一つの面から他の等長な面への変換を等長変換(isometric transformation)と呼ぶ。また等長な面相互では、その曲面上の幾何学、別の言葉で内的幾何学(intrinsic geometry)を取り扱う限り、これらは全く同一であり区別できない。内的幾何学は曲面の第一基本量だけによってきまるもので、第一基本量 $g_{\alpha\beta}$ は等長な面ではたがいに対応する点で等しい、または等長変換によって変わらない。 $g_{\alpha\beta}$ は曲面上の長さの計量にかなにする量だから、このことはこの種の曲面を中央面とするシェルの面内歪みは、そのような等長変換によって生じないということになる。

さてここで、ダブル・コルゲーション面の紙モデルを、少なくともその基本領域の分だけ作っていただければ説明が簡単になる。そのような紙モデルを用いて平面 $\longleftrightarrow$ ダブル・コルゲーション面の変換を行えば容易にわかるが、稜線の面角を小さくすることによって、平面からダブル・コルゲーション面にする操作を極限まで続けると、これは一つの方にペシャンコにつぶれると同時に、これと直交する方向にも収縮が起きているのがわかる。このような折り方は、結局平面を直交二方向に同時に畳み込むことになるのである。これは扇子やアコーディオン・ドアが唯一つの方向にのみ畳み込むことと対比されよう。このような直交二方向の畳み込みによると、理論的には平面を一点に絞り込むことが可能である。その条件は上記基本領域が無限に小さい四つの矩形からなるとき、換言すれば、平面を限りなく細かい直交格子で分割しその格子線にそれぞれの回転の方向を指定することによって満たされる。

読者は、薄肉円筒を軸方向に押しつぶしたときに、あるいは曲げたときにその圧縮側に、生ずる菱形の凹みを観察された経験があるであろう。この基本的なパ

ターンは、限りなく薄い円筒殻という理想化された条件のもとに、いわゆる吉村パターンと呼ばれる凹多面体面となることも知添しておられるであろう(第15図)。この形は、やはり展開可能面であるがゆえに、折紙や造形の世界では古くより知られていた形であり、デンマーク製のランプ・シェードのデザインとしてわれわれの身近にもある。

吉村パターンを純粋に幾何学的な問題としてとらえ、この種の凹多面体面の一般化を行なうと、これは次のように記述される。任意の柱面を S と名付ける。この S に際限無く近接し、これと等長であり、軸方向に一樣な縮みを有する面 S_p が存在する。この面 S_p は凹多面体面で、無限に小さい一対の三角形または台形よりなる基本領域で生成される。面 S より S_p の変換は等長変換で行なわれることは明らかで、そのときこれをシェル中央面と考えればシェルの面内歪みは生じないこともすでに述べた。無限に薄いシェルの変形は、エネルギー論的に考えると、できるだけ面内歪みを避け、曲げ歪みを生ずるに行なわれるはずであるから、面 S_p が薄いシェルの挫屈変形としてあらわれるのもこの理由なのである。通俗的にいうと、この等長変換は柱面を縦に畳み込むことであり、パターンの形状によって任意の縮み量を選べるから、理論的に軸長零まで押しつぶすことが可能である。

ここまで来て、ダブル・コルゲーション面という構造のフォルムの幾何学と、柱面のデフォルメの幾何学との奇妙なかんけいにわれわれは驚かされる。ダブル・コルゲーション面は平面の等長変換による二方向の

第15図 吉村パターン

畳み込みによりできる形であり、 S_c 面は柱面の同様な一方向の畳み込みによる形である。実際前者は後者の特別の場合としても定義することができる。

柱面のデフォルメからの類推により、ダブル・コルゲーション面は、無限に大きいと同時に無限に薄い平板の二方向圧縮による不伸張挫屈変形であると信ずることもできよう。しかしこれに相当する奇麗な条件は円筒の場合と異なり現実になかなか満たされないから、容易に観察することはできないであろう*。

一方吉村パターンで代表されるデフォルメ、すなわち面 S_c は構造のフォルムとして用いられることを忘れてはならないであろう。この種凹多面体面は、軸方向にいわば破壊せるかたちであるが、これを中央面とするシェルは軸に垂直な方向に対してもとの円筒殻より大なる剛性を有する。これを利用して、要素が単純な三角形であることも助けとなり、半円形ドームの建築物がすでに作られているのである。

これらの事実は、構造のフォルムを創造するには王道は無いということをつくづくわれわれに思い知らせると同時に、構造のフォルムの創造がデフォルメの現象を解きあかすこともあるという。かたちの法則の神秘性を教えるかのである。

あとがき

本稿を用意するにあたり、以下の本および論文等を参考にしました。主なものは 1, 2, 5, 6, 11 です。

幾何学一般

* 老人のひたいのしわは、退化し二方向に収縮する頭がい骨と、不伸張変形しかできなくなった老化した皮膚によって作られるダブル・コルゲーション面であるかもしれない。地球のしゅう曲、塗料のちりめんじわ等々この条件に近いものはいろいろありそうである。

1. HILBERT, D. und COHN-VOSSEN, S., Anschauliche Geometrie, Verlag von Julius Springer, Berlin, (1932), 邦訳「直観幾何学」, みすず書房, (1960).
2. COXETER, H. S. M., Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1961), 邦訳「幾何学入門」, 明治図書 (1966).
3. WEYL, H., Symmetry, Princeton University Press, Princeton, (1952), 邦訳「シンメトリー」, 紀伊国屋 (1957).

ハニカム

2. 前出

4. AKASAKA, T. and TAKAGISHI, T., "The Shear Modulus of Foil Honeycomb Sandwich Structures", Trans. Jap. Soc. Aero. Space Sci., Vol. 2, No. 3, pp. 83 (1959).

ダブル・コルゲーション面

5. MIURA, K., "Proposition of Pseudo-Cylindrical Concave Polyhedral Shells", Symposium on Folded Plate Structures, International Association for Shell Structures, Wien, 1970.
6. MIURA, K., "Double Corrugation Surface and its Application to Sandwich Structure", (To be published.).
7. SADLER, A., Paper Sculpture, Blandford Press, London, (1964).
8. LONDBERG, K., Papier und Form, Scherpe Verlag Krefeld, (1963).

吉村パターン

9. 吉村慶丸, 「円筒殻の軸圧縮力による挫屈機構」, 東京大学理工学研究所報告, 第5巻, 第5号, 179頁 (1951).
10. MIURA, K., "Inextensional Buckling Deformations of General Cylindrical Shells," AIAA Journal, Vol. 6, No. 5, pp. 966, (1968).

フォルムとデフォルメの幾何学

11. MIURA, K., "Proposition of Pseudo-Cylindrical Concave Polyhedral Shells," Inst. Space & Aero. Sci., Univ. of Tokyo, Report No. 442, (1969).

なお本稿をいくらかでも読み易くするための各種の写真・イラストは酒巻正守氏の協力によってできたものであります。

表紙写真説明

これは平面を、その面が伸びたり縮んだりすることなしに、直交二方向に同時に押し潰すときにできるかたちである。この面は可展ダブル・コルゲーションと名付けられ、極めて美しい幾何学的性質を有している。例えばこのある種のものは、平面を一点にしばり込むことが理論的に可能である。

可展ダブル・コルゲーション面は、その導入過程よりして破壊せるかたち、すなわち“デフォルメ”であるが、奇妙なことに新しい構造の“フォルム”の基本型を与えるのである。これをサンドイッチ構造のコアとして用いると、ハニカム・コアに匹敵する幾何効率を示す。

写真は、モデルの斜上方より単一光で照明して撮影したもので、明るいジグザグ線は谷、暗いジグザグ線は山に相当する。

(本誌講座、構造のフォルムと幾何学、6節“フォルムの幾何学とデフォルメの幾何学”参照)

(三浦公亮)