揚力をもつ翼胴体のまわりのポテンシャル流れの計算法*

Numerical Approaches to the Lifting Potential Flow Problem

海 老 原 正 夫**

Masao EBIHARA

1. はじめに

非圧縮性・非粘性流体の様な流れの中に置かれた物体のまわりのポテンシャル流れは、数学的取り扱いを容易ならしめるために現実に観測される流体の運動を単純化した一つのモデルである。このモデルでは、流れ場は、速度ポテンシャルについてのラプラスの方程式によって記述され、問題は、適当な境界条件の下におけるその解を見出すことに帰着する。この単純化は、考えようによれば思いきった、乱暴なものともいえるが、それにもかかわらず、このモデルについて数学的に厳密な取り扱いをすることは、特別な場合を除いて従来不可能であったし、現在でも不可能である。

そこでさらにモデルの単純化が進められたわけであるが、対象を航空機形態のまわりの流れ場に限定するとき、それは周知のように、境界条件を、現実の物体表面あるいは境界面ではなく、ある代表平面へのそれらの投影の上で満たすようにする形をとり、この単純化(境界条件の線形化と呼ばれる)によって、翼厚の効果とか、迎角、warping の効果とかがたがいに分離できるようになる。この後者の効果を取り扱う分野に揚力面理論があり、そこで扱われるのは要するに空力荷重(翼上下面の圧力差)に関する積分方程式の解法であるが、その積分方程式が数学的に種々の困難さを含んでいるので、数多くの研究の対象となった。その厳密解を一般的に得る方法は未だ見出だされていないが、数値解法は、電子計算機の発達に助けられて高度に発展し、極めて複雑な形状の翼の場合を除けば、解の精度に関しては実用上問題ないレベルに達しているといえる。この方面の文献は膨大なものであるが、LANDAHL & STARK の review¹⁾および CUNNINGHAM と REVELL との間の応酬²⁾は、その整理における一つの指針となろう。

揚力面理論は、一つの意味で揚力線理論からの飛躍

であるが、それが洗練化の段階を迎えた現在、次の飛躍の一つとして考えられるのは、境界条件の線形化という近似の除去である。すなわち、非圧縮流の場合についていえば、ラプラスの方程式の解を、物体表面上で与えられた境界条件そのものの下に見出そうとする試みである。この場合、一般に解析的手法はあまり役に立たないので、大型計算機を利用した数値解法を前提として問題が取り扱われる。本稿は、このようなアプローチをとる際考慮せねばならない多くの問題の一部を紹介することを目的としたものである。

2. 問題の定式化

対象を、非圧縮性・非粘性流体の中を定常運動する航空機形態のまわりの流れ場に限定する*。このとき、流れ場の基礎方程式は、擾乱ポテンシャル φ に関するラプラスの方程式:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

であり、問題は、これを以下のような境界条件の下に解くことに帰着する。

- (1) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ のとき $|\text{grad } \varphi| \rightarrow 0$
- (2) 物体表面 S_B 上で $\mathbf{n} \cdot \text{grad } \varphi = F(S_B)$
- (3) trailing vortex sheet S_V は流線により構成され、その表裏で圧力が連続である。
- (4) 翼の後縁で $\text{grad } \varphi$ は有限である (KUTTA の条件)。

ここで $\mathbf{n}$ は S_B に対する法線ベクトル、 $F(S_B)$ は S_B の上で定義された一つの関数を表わし、例えば S_B が solid surface ならばそれは $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_\infty$ に等しい。 $\mathbf{U}_\infty$ は一様流の速度である。

境界条件(3)について補足すると、一般に揚力をもつ三次元翼の下流には、流れ方向に卓越した成分をもつ vorticity によって特徴づけられる rotational flow field が存在する³⁾。この vorticity によって誘起され

* 以下の議論はしかしながら、PRANDTL-GLAUERT 変換の適用し得る範囲内で亜音速流の場合に拡張し得るし、また、若干の修正により、微小擾乱理論の成立する範囲内で超音速流の場合にも適用し得る。

* 昭和46年9月2日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所空気力学第二部

る速度の場合は、翼のまわりの流れに少なからぬ影響を及ぼすので、揚力をもつ翼のまわりの流れ場の定式化においてはこれを無視することはできない。この rotational flow field を次の二種類に区別することができる。一つは、例えば巡航時の垂直速機について観測されるような、翼の後縁から生れ、下流に向かってしばらくは平面に近い形を保つもの、他は、超音速機形態の低速操作時にみられるような、後縁のみならず、翼の前縁や側縁からも発生し、初めから平面とは懸け離れた形状をもつもの、である。いずれも、その数学的モデルとしては、非粘性流の仮定が成立する範囲内で、厚さのない vortex sheet によって表現される。周知のように、一般に vortex sheet の表裏で速度は不連続であるから、sheet は、無限小の距離だけ離れた二つの stream surface の間の境界面でなければならない。また、速度の不連続は、一般には圧力の不連続をも意味するが、trailing vortex sheet は流れ場の中の一領域をモデル化したものとしてその表裏で圧力は連続でなければならない。すなわち、速度の不連続はあっても圧力の不連続が無いように sheet の形およびその上に分布する vorticity の強さがきまらなければならない。これが境界条件(3)の意味であるが、後に見るように trailing vortex sheet の存在を無視しては揚力問題の定式化は成立しないから、この境界条件は極めて重要である。翼の下流の rotational flow field を二種類区別したが、以下の議論は、主として前者を念頭において進められるものとする。ただし後者の場合について適用できない訳ではない。

以上のように定式化された問題は、ラプラスの方程式の特解である source および doublet を用いて積分方程式に転換することができる。すなわち、

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B + S_V} \left[\frac{\sigma}{r} + \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (1)$$

とおくと、これは $S_B + S_V$ の外部でラプラスの方程式および境界条件(1)を満たすから、境界条件(2)~(4)が満たされるように source および doublet の強さ σ, μ を定めることに帰着する。素朴に考えて、 $S_B + S_V$ 上の拘束条件(2), (3)はこの上に定義された函数を一つだけしか定め得ないと想像され、また、適当な条件の下に曲面上の source 分布と doublet 分布との間に等価性が成立する⁴⁾ から、 S_B および S_V の両方に source および doublet の両者を分布させることは必要でもないし適切でもない。そこで(1)式を簡単化することが考えられるが、その具体的な方法は問題によって異なる。その幾つかの例を次節に示す。いずれにしても、擾乱ポテンシャル φ を(1)式の形に仮定し、それを用いて境界条件を記述すると、 S_B および S_V

上で定義された未知函数 σ および μ に関する積分方程式が得られる。そこに現われる核は、後に見るようにある特異性を持っており、積分は面にわたるもの(重積分)である。さらに、積分を行なう面 S_B は、例えば航空機形態の表面であるから一般に複雑な形をしており、 S_V に至ってはその形までが未知である。このような事情で、積分方程式の解を解析的に求めることは一般に不可能であるから数値解法に頼らざるを得ない。具体的にどのように数値解法が進められるのかを見るため、以上のような定式化に基づいて流れ場の計算を行なった従来の研究の幾つかを次に紹介する。

3. 定式化およびそれに基づく解法の例

第一の例は、HESS & SMITH^{7), 8)} の計算である。彼らは S_B 上の source 分布のみによって φ を与えた:

$$\varphi_s(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \frac{\sigma}{r} dS \quad (2)$$

$$r = \overline{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ここに、 $P(x, y, z)$ は流れ場の中の一点、 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ は S_B 上の一点、をそれぞれ表す。

φ の導函数 (すなわち擾乱速度成分) を求めるとき、 P が S_B の外にあるかぎり積分と微分の順序を交換できて、

$$\text{grad } \varphi_s = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \sigma \text{ grad} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3)$$

となる。境界条件を書き下すためには、 P が S_B 上の一点 $Q_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ に近づくときの $\text{grad } \varphi$ の表現が必要であるが、このとき $\text{grad}(1/r)$ は $(\overline{PQ_0})^{-2}$ の程度で発散するから、(3)式はそのままでは成立しない。しかしながら、 σ および S_B が適当な条件を満たすとき^{*}、この困難を回避する方法があって^{5), 6)}、それによれば

$$\lim_{P \rightarrow Q_0} \text{grad } \varphi_s = -\frac{1}{2} \sigma(Q_0) \mathbf{n} \text{ sign}(\delta)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_B} \sigma \text{ grad} \left(\frac{1}{r} \right)_{P=Q_0} dS \quad (4)$$

となる。 $\mathbf{n}$ は Q_0 における S_B への法線ベクトル、 $\text{sign}(\delta)$ は、 P がこの法線の正の向きから Q_0 に近づくとき +1、負の向きから近づくとき -1 となるもの、また、 $\oint$ は、CAUCHY の主値積分を表す。

物体表面から流れ場の中へ向かう法線を $\mathbf{n}$ として、(4)式から境界条件(2)を書き下すと

* 例えば文献 5, 6 によれば次の二つの条件があれば十分である。

(a) σ は Q_0 の近傍で HÖLDER 連続である、すなわち、十分小さい正数 ε に対して、正数 α, M が存在して、 $\overline{QQ_0} < \varepsilon$ のとき $|\sigma(Q) - \sigma(Q_0)| < M\varepsilon^\alpha$ が成立する。

(b) S_B は、 Q_0 の近傍で連続な曲率をもつ。

$$-\frac{1}{2}\sigma(Q_0) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \oint_{S_B} \sigma \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right)_{P=Q_0} dS \\ = F(Q_0) \quad (5)$$

となる。これが満たされるように source の強さ σ を定めなければならない。この σ に関する積分方程式に対して、HESS & SMITH は、積分を有限和で置き換えるため次の近似を行なった。

(a) 物体を多面体でおきかえる。

(b) 多面体の各要素面 (panel または box と呼ばれる) の上で source の強さ σ は一定である。

この結果、連続量 σ は、panel の数 M だけの離散的な $\sigma_i, i=1, 2, \dots, M$ によって置き換えられる。したがって、 S_B 上の各点で境界条件 (2) を満たすことはできず、高々 M 個の点で (5) 式を満足せしめ得るに過ぎなくなる。一つの panel を考えるとき、その上に分布された強さ一定の source による panel 面内の速度成分がちょうど零となるような点が一つその panel の上に存在するが、HESS & SMITH は、境界条件を満足せしめる点 (control point と呼ばれる。以下 c. p. と略記する) として、各 panel 上のこのような点を選んだ。panel の形が矩形に近いほどこの点は panel の面積中心に近い。このようにして (5) 式を近似的な M 元連立一次方程式に帰着せしめ、 $\{\sigma_i\}$ を見出せばそれで問題は (近似的に) 解けたことになる。HESS & SMITH のこの方法は、多くの問題に適用されて成功を収めたが、揚力を伴う航空機形態の場合を扱うことのできないのは致命的な制約といわねばならない。これは、(2) 式にみられるように、trailing vortex sheet S_V を無視し、かつ、 S_B 上に source だけを分布させたことに由来する本質的な限界である。例えば翼単独の場合、この上に分布された source が、何故揚力のある場合を表わし得ないかを数学的に示すことは簡単ではないが、一つの根拠は、source 分布だけの場合、翼断面まわりの循環がどこをとっても零になることである。零ならざる循環を存在せしめるためには、翼後縁の所でポテンシャルに有限の跳び (jump) が生ずるようにせねばならないが、source 分布によるポテンシャルは至る所連続であるので¹¹⁾、それができない。

RUBBERT & SAARIS⁹⁾ は、HESS & SMITH の方法におけるこの制約を除去するため、trailing vortex sheet S_V を考慮に入れ、その上に doublet を分布させた。doublet はしかしながら、 S_V の上にのみ止まらず、 S_V を、後縁を越えて翼の内部に延長した面 I_W の上にも置かれた (第 1 図)：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} \frac{\sigma}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_V + I_W} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (6)$$

第 1 図 RUBBERT & SAARIS の方法における I_W の構造

この定式化の問題点として、次のようなものが考えられる。

- (a) I_W をどのようにとるか、その上の doublet の強さをきめる条件は何か。
- (b) $r \rightarrow 0$ のとき、 $\operatorname{grad} \varphi$ に対し doublet は r^{-3} の程度の特異性を与える。このとき“発散積分の有限和”なる考え方で積分を評価することは一応できるが、境界条件記述のため S_V 上の $\operatorname{grad} \varphi$ の表現を得たいとき、どうすればよいか。
- (c) S_V の位置は未知であるが、実際計算ではこれをどう処理するか。
- (d) 翼後縁における KUTTA の条件をどのように与えるか。

以上に対する RUBBERT & SAARIS の対策は、まず I_W として、例えば翼の場合は mean camber surface (の一部) をとり、その上の doublet の強さ μ として、翼後縁における値 μ_W から I_W の前端での値 $\mu=0$ まで直線的に変化するものを分布させる。また、 S_B, S_V, I_W を panel に分割し、HESS & SMITH と同様に各 panel の上で σ または μ は一定であるとする。一般に、任意の面 S の上に分布する強さ一定の doublet の作用は、 S の境界線に沿う line vortex の作用と等価である¹¹⁾から、 S_V 上の panel について、c. p. をその境界上に置かない限り、 μ を panel 上で一定とすることによって (b) の発散積分の困難さは自動的に消滅する。(c) に対しては、 S_V を流れ方向の幾つかの strip に分割し、各 strip は一様流の方向と後縁角の二等分線の方向との中間にある適当な方向を向く平面であるとして、これを panel に用いる。すなわち、 S_V を近似する panel は、翼の下流に無限に長く延びる平面の strip で、そのおのおのの上で μ は一定であると仮定される。したがって S_V 上の μ は、strip の数 N だけの未知数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ によって近似され、それを定めるための条件として KUTTA の条件を使うが、その内容は、 S_V を構成する各 strip 上の c. p. (strip の中央、後縁から約 0.1% 翼弦長下流に設けられる) において、流れが後縁角を二等分する方向に向くというものである (第 1 図参照)。

この RUBBERT & SAARIS の定式化において導入された interior doublet sheet I_W なるものは、その形状

およびその上に分布する doublet の強さが全く任意であるという甚だ曖昧な性質をもっている。RUBBERT & SAARIS によれば、その導入の動機は数値計算の便宜*ということであるが、流れ場を物体表面や trailing vortex sheet の上に分布する source, doublet などで表現しようとする数学的モデルの内容を検討し、またこのモデルにおいて KUTTA の条件がどのように表わされるかを調べてみると、このようなモデルが成立するための要件として、doublet 分布が翼の後縁で途切れていてはならないということが要求される¹¹⁾ので、 I_w の導入は、実は本質的に重要な意味をもっているのである。さらに、trailing vortex sheet S_v の形状および翼後縁における KUTTA の条件に対する処理の方法においても、この定式化は未だ素朴な段階にあるものと いわざるを得ない。

DJOJODIHARDJO & WIDNALL¹⁰⁾ の定式化は、このような観点からすれば一歩進んだものである。彼らは、 S_B および S_v 上に doublet を分布させて流れ場を表現した：

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B + S_v} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (7)$$

前記 RUBBERT & SAARIS の方法において検討した問題点(a)~(d)をこの定式化に適用してみると、まず、(7)式の表現によれば、RUBBERT & SAARIS における I_w のような非確定要素を導入する必要はない。一方、 S_B および S_v なる境界面上で $\text{grad } \varphi$ を評価する際に生ずる特異積分の問題は、全境界面を doublet 分布で置換えているためさらに重大なものとなっている。しかしながら、いったん境界面を平面要素のパネル群で近似し、かつその上の doublet の強さの分布を既知(未定係数は別として)の形に仮定してしまえば、 $\text{grad } \varphi$ を求める際微分と積分を本来の順序で行なうことができるので、この問題は、実際計算においては大きな困難をもたらさない。

次に(c)の問題について：DJOJODIHARDJO & WIDNALL は、もともと非定常流れの計算のため(7)式による定式化を行なったのであるが、この場合 S_v はその形状が時間とともに変化すると予想され、その変化の様子を知ることが解の重要な一部となるから、 S_v の形状を未知として問題を解くことを考えなければならない。 S_v の上では、doublet の強さ μ は、そこにおける S_v の表裏を通してのポテンシャルの跳び $\Delta \varphi_D$

に等しいから、2節に述べた境界条件(2)を次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \text{grad} \left[\int_{S_B} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right] \\ = F(S_B) - \mathbf{n} \cdot \text{grad} \left[\int_{S_v} \Delta \varphi_D \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right] \end{aligned} \quad (8)$$

今、時刻 $t=t_1$ で流れ場全体の様子が既知であるとすれば、 S_v が常に stream surface であるということから、 $t=t_1+\Delta t$ における右辺の値を近似的に求めることができ、したがって、定常問題の場合と同様にして、 $t=t_1+\Delta t$ における流れ場全体を計算することができる。このように、 S_v の形状を未知であるとしても原理的には解けるはずであるが、実際の計算に要する労力は尨大なものとなろう。DJOJODIHARDJO & WIDNALL が与えた計算例のうち、 S_v まで含めて解いたものは、二次元の場合だけである。最後に、問題(d)について、彼らは、KUTTA の条件として doublet の強さが翼後縁で連続である：

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow T.E.} \mu(P \in S_v) = \lim_{P \rightarrow T.E.} [\mu(P \in S_{BU}) \\ - \mu(P \in S_{BL})] \end{aligned} \quad (9)$$

ことを要求した。ここに S_{BU} , S_{BL} , T.E. は、それぞれ翼上面、翼下面、翼後縁を意味する。実際のところ、(9)は、 $\text{grad } \varphi$ が後縁で有限であるための必要条件ではあるが十分条件ではない。筆者は、流れ場を境界面上においた source や doublet などの singularity で表現するモデルにおいて、KUTTA の条件がどのように表わされるかを調べたが、その結果によれば¹¹⁾、 φ を(1)の形に仮定するとき、境界面および singularity の強さに関する適当な条件(64ページ脚註参照)の下に、後縁上の一点 T の近傍で、

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi(P) = A(1/r) + B \log r \\ + (\text{terms finite when } r \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (10)$$

が成立する。ここに $r = \overline{PT}$ である。したがって、点 T で $\text{grad } \varphi$ が有限であるためには $A=B=0$ でなければならない。条件(9)は $A=0$ を保証するが、その他に $B=0$ を要請しなければならないのである。 B は、 T における source の強さ、あるいは doublet の強さの勾配などによって与えられる。

DJOJODIHARDJO & WIDNALL のアプローチが前二者と比べて進んでいるもう一つの点は、境界面をパネル群で近似したのち、各パネル上に分布する doublet の強さを一定とせず、パネル内座標の二次式で表現したことである。これは、各パネル上に代表点を考え、そこにおける doublet の強さを未知数 μ_i としてとるとき、パネル上の doublet の強さの分布を、考えているパネルの代表点およびそれに隣り合う二つのパネル

* 二次元の場合に、翼の contour 上に source を置き、内部に vortex を置いて流れ場を計算する方法があるが、このとき vortex として、内部の一点に集中したものよりも、ある線上に分布したものを考える方が、連立一次方程式の解法や解の精度の上から数値計算を行ないやすくなる。ここでいう数値計算の便宜とはそれとほぼ同じ意味である。

の代表点における doublet の強さ $\mu_i, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}$ の内挿として与えることにほかならない。このように、一つのパネルの上における singularity の強さの変化を考慮に入れることにより、解の精度および数値計算の効率の向上がもたらされるだろうことは容易に想像できる。

これまで述べてきた三つの方法は、境界面上に分布せしめるべき singularity として source および doublet を用いたが、この他にも、例えば vortex を用いても定式化は可能である。実際、任意の面の上の doublet 分布は、同じ面の上の vortex 分布によって常に置き換えられる¹¹⁾ので、doublet 分布を用いることと vortex 分布を用いることとの間に原理上の差は存在しない。

vortex 分布による定式化が有利な点は、境界面上における $\text{grad } \phi$ を求めるとき、被積分関数が source 分布と同様 r^{-2} の程度の特異性であるので CAUCHY 積分を考えるだけでよいこと、および、従来の揚力面理論の中に、ちょうどこれに対応する考え方が見出され、したがって、それに関して開発された数値解法の手法が参考になる可能性の大きいことである。この vortex 分布による定式化の揚力面理論版というのはすなわち vortex lattice method と呼ばれるもの (例えば文献 12, 13) であって、その骨子は、揚力面を幾つかのパネルに分け、各パネルを一つの翼面と見做してこれを一つの馬蹄形渦でおきかえ、その束縛部分はパネルの 25% 弦長線上にあり、またその自由渦部分はパネルの側縁に沿って下流へ一様流の方向に無限に延びるものとし、境界条件をパネルの 75% 弦長線上中央で合わせるようにするものである。vortex 分布による定式化が、この vortex lattice method の精密化であると考えるのは極めて自然であろう。これに関連して興味があるのは、WOODWARD et al. によって開発された方法である^{14), 15)}。これは、もともと超音速の場合の計算法として工夫されたものであるが、その後亜音速流の場合をも含めて統一的に定式化された。この方法は、従来の揚力面理論と、本稿の主題たる厳密解法とのいわば中間に位置するもので、内容は次のようなものである。翼を、chordal plane 上に分布する source と、表面上に分布する constant pressure singularity (亜音速では vortex に相当する。以下 c. p. s. と略記する) とで表わし、また、胴体 (軸対称と仮定する) を、軸上に分布する source および doublet と、表面上に分布する c. p. s. とで表現する。翼を対称部分 (厚み) と非対称部分とに分け、線形理論により、翼の対称部分に対応する source 分布および胴体単独の場合に対応する軸上の source, doublet 分布を求め

ておく。翼単独の場合は非対称部分の効果を、また、翼と胴体を結合したときは、胴体に対する翼の影響および翼の胴体に対する影響を、それぞれ表面上に分布させた c. p. s. で表わす。すなわち、この方法では、計算は二段に分けて行なわれる。第一段は、線形理論による wing chordal plane 上の source 分布と body axis 上の source および doublet 分布の計算であり、第二段は、翼胴体間の干渉および翼の非対称部分の効果を表現する c. p. s. 分布の計算である。いずれの段階においても、singularity の強さは、積分の有限和近似によって数値的に求められるが、特に第二段階では、HESS & SMITH その他にのけると同様に物体表面をパネル化して、その上に分布する c. p. s. すなわち強さ一定の vortex を求める。このとき c. p. (control point) として、パネルの面積中心を通るパネル翼弦を考え、その上の 95% 弦長点をとる。これは一つの数値実験により定められたもの¹⁴⁾であるが、これとは別に 85% 弦長点が適当であるという考え方もあり^{16), 25)}、一方 vortex lattice method では前述のように 75% 弦長点を c. p. にとっている。vortex 分布を用いた計算法における一つの問題点がここに露呈されているといえよう。

WOODWARD et al. によるこの方法は、計算上の便宜から考えて当然予想されることであるが、今まで述べてきた方法のうちで最も多く応用されているもののようで、NASA, Ames では、この方法に基づいて汎用の 'Ames Wing-body Program' なるものが開発されている*。この方法が、解の精度、適用範囲の広さなどにおいて、従来の揚力面理論に比べ秀れていることは当然予想されまたすでに実証されている¹⁷⁾が、計算の原理上からすれば、線形理論の制約から免れているわけではない。これは一面からいえば、元来が超音速流に対する計算法として開発されたものであるからやむを得ないところである。非圧縮流の取り扱いにおいても、流れ場の数学的モデルを構成する際の仮定やこのモデルに対する数値解の近似の程度などを考えるとき、RUBBERT & SAARIS や DJOJODIHARDJO & WIDNALL の方法が、WOODWARD et al. の方法よりも常に精密な結果を与えるとは必ずしも保証できない。その理由の一端として、2 節で述べた問題の定式化と、それに対する数値解とにまつわる問題点の幾つかを次に触れてみよう。

4. 定式化についての問題点

2 節における定式化の出発点は、ラプラスの方程式

* 文献 30 によれば、同じく Langley では、超音速流れ場計算のための 'Langley Computer Complex' なるものが用意されている。

に対する境界値問題であった。そこでまず第一の問題は、この境界値問題に対する解の存在と一意性である。対称翼が迎角零で一様流の中に置かれている場合は、これが保証されていると考えてよいだろう^{5), 6)}。しかしながら、揚力を伴う一般の場合、内部境界の一部から発生して無限遠における外部境界にまでつながる境界面 S_V が存在し、かつ、GREEN の公式による通常の取り扱いを妨げる circulatory flow* を考えに入れなければならないから、定式化されたものがいわゆる properly posed であるか否かの判定は極めてむずかしくなる。この問題は現在のところ未解決である。

問題が properly posed であるか否かの議論を棚上げして、とにかくその解(と思われるもの)を数値的に求めようとするとき便利なのは、前述した特解の重ね合わせ(1)式による積分方程式への転換である。この積分方程式は、特解として source を用いるか doublet を用いるかによって、その性質が大きく異なってくる。それを示すため、 φ_s に対する式(4)と同様、 φ_D に対する $\lim_{P \rightarrow Q_0} \text{grad } \varphi_D$ を与えておこう。

曲面 S 上に直交曲線座標 (s_a, s_β) をとり、 s_a の方向を $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 、 s_β のそれを $\beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ として、 $D\mu$ を次のように定義する。

$$D\mu = (\partial\mu/\partial s_a)\alpha + (\partial\mu/\partial s_\beta)\beta \quad (11)$$

ν を、 S 上の各点における法線ベクトルとすると、

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow Q_0} \text{grad } \varphi_D = & \frac{1}{2} D\mu(Q_0) \text{sign}(\theta) \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[(\nu D\mu - D\mu \nu) \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{P=Q_0} dS \end{aligned} \quad (12)$$

である¹¹⁾。記号の意味は(4)式におけると同じとする。したがって、境界条件(2)(2節参照)は、 $D\mu \cdot n = 0$ であるから、次のようになる**。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} n \cdot \oint_S \left[(\nu D\mu - D\mu \nu) \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{P=Q_0} dS \\ = F(Q_0) \end{aligned} \quad (13)$$

このように、われわれの問題(誤解を虞れなければノイマンの問題といつてよいだろう)では、doublet 分

* よく知られた GREEN の公式:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \int_V \varphi \nabla^2 \varphi dV \\ = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \end{aligned}$$

を、調和函数 $\varphi(x, y, z)$ に対して無限遠を含む領域で用いるためには、 φ が無限遠で正則なるもの、すなわち

$$\frac{1}{r} \varphi \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2} \right), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

が原点で正則となるようなものでなければならない¹¹⁾。circulatory flow はこの条件を満たさない。

布を用いた場合の積分方程式は(13)の形になり、一方 source 分布の場合のそれは(5)の形である。前者は FREDHOLM 型第一種、後者は同じく第二種である。この両者における数学的な背景の差は顕著であって、後者に関しては、例えば連続核に関する FREDHOLM の理論のような整った体系が存在するが、第一種については、われわれの指針となるような理論体系を全く欠くのが現状のようである。数学的な背景の差によってわれわれがどのように影響されるかを一例で示すと、積分方程式(5)の特性数は、その絶対値が1より小さくはないことが知られている⁶⁾ので、われわれは安心して(5)を連立方程式で近似することができ、かつ、1と1/2 π との差から判断して、その連立方程式の係数行列が扱い易いものであることを期待できる。これに反して、(13)の積分を有限和で近似し連立方程式に持ち込むとき、そのようなやり方で果たして意味のある解が求められるかどうか、数値解法にどのような困難がつかまってくるのか、などについて皆目見当がつかないので、おいそれと事を運ぶわけにはいかない。実際、第一種 FREDHOLM 型方程式に対する数値解法の経験から、和分近似で得られる連立方程式は一般に ill-conditioned であることを予期せねばならぬことが最近知られてきている。これについては次節で再び触れる。以上のような事情からして、問題を積分方程式に転換する場合は、それが第二種方程式となるように工夫すべきであるといえる。われわれの場合に即していうならば、ノイマン問題を対象とするかぎり、できるだけ source 分布で表現するように努力すべきであるといえよう。

しかしながら、source 分布のみでは、揚力のある場合を表現できないことはすでに述べた。したがって、差し当たっては、doublet (または vortex) 分布によって表現する部分を trailing vortex sheet のみに限り、翼や胴体その他の solid surface は source 分布で表現した方が、数値計算が容易となろう。前述した RUBBERT & SAARIS のアプローチは、原理的にはこの行き方をとっている。一方、揚力面理論における基礎方程式は、特異核をもつ第一種 FREDHOLM 型積分方程式であるが、これに対して collocation method や lattice method などによる数値解法が、近似的で

** $\lambda = \nu \times D\mu$ によって定義される λ を用いると(12)は

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow Q_0} \text{grad } \varphi_D = & \frac{1}{2} (\lambda \times \nu)_{Q_0} \text{sign}(\theta) \\ & - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\lambda \times \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{P=Q_0} dS \end{aligned}$$

となり、また(13)は

$$-\frac{1}{4\pi} n \cdot \oint_S \left[\lambda \times \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{P=Q_0} dS = F(Q_0)$$

となる。これらは vortex 分布 λ による表現に外ならない。

はあるがその解を得さしむるものであることをわれわれは知っている。同じような手法をわれわれの場合に対して用いる可能性は未だほとんど試みられていないが、このような物理的直観に支持された解の求め方が有効な結果を生むかもしれないことは期待できる。いずれにしても、われわれは第一種方程式を回避するわけにはゆかない。この方面の今後の発展が望まれる。

最後に、第三の問題として、流れ場の中における特異点について考えてみよう。これは主として、翼の後縁における KUTTA の条件に関連した問題である。

二次元の場合、KUTTA の条件は、周知のように、circulatory flow を唯一つに定め、流れ場の解の一意性を保証する役割を果たした。三次元の場合も事情は同じであろうか。

二次元問題では、函数論を援用することによって、例えば KUTTA の条件が意味するところのものを解り易く示すことができたが、三次元問題に対するわれわれのアプローチは積分方程式による定式化であるから、その可否を考える一環として、二次元問題に対して積分方程式による定式化を行ない、それによる結果と、函数論による結果とを比較することにより、何らかの示唆が得られるかもしれない。

二次元翼型の contour 上に source または vortex を分布させ、それによる擾乱速度を $\text{grad } \phi$ とする。翼後縁上の一点 T において source または vortex の強さが HÖLDER 連続 (64 ページ脚註参照) であると仮定すると、流れ場の中に T に近い点 P を考え、 $\overline{PT}=r$ とおくと、(10) と同様に

$$\text{grad } \phi(P) = B \log r + (\text{terms finite when } r \rightarrow 0) \quad (14)$$

であり、一方函数論に基づく方法によれば、

$$\text{grad } \phi(P) = D r^{-k} + (\text{terms finite when } r \rightarrow 0) \quad (15)$$

となる。(例えば文献 34) ここに、 B は T における source や vortex の強さに関係し、 D は、循環を Γ 、翼型の写像たる円の半径を R 、翼型の迎角を α 、とするとき、 $\Gamma - 4\pi R U_\infty \sin \alpha$ に比例する。また、 k は、翼型の後縁角を τ として、 $(\pi - \tau)/(2\pi - \tau)$ に等しく、したがって $0 < k \leq 1/2$ である。すなわち、積分方程式による表現では、翼後縁における特異性は $\log r$ の型であり、函数論に基づく方法によれば、 r^{-k} の形である。特異性として、 $\log r$ と r^{-k} とは截然たる相違がある。この違いはどこから生まれたのか。後縁付近における source や vortex の強さは、HÖLDER 連続ではない分布をしているのか、あるいはまた、source や vortex 分布に基づく積分方程式表示は、問題を正しく表現していないのだろうか。それともこのような差

は、KUTTA の条件を要請するとき、trivial なものと見做してよいものなのだろうか。筆者にとって、これらの疑問は依然として疑問のままである。

(10) や (14) に現われた $\log r$ の形の特異性は、揚力面理論においてしばしば現われる。例えば、円形翼についての揚力面理論の厳密解に対する JORDAN の分析¹⁸⁾によれば、翼面上各点で吹き下ろしが有限であるためには、span loading $L(y)$ は $(s^2 - y^2) \log \sqrt{s^2 - y^2}$ (s は半翼幅) の項を含まねばならず、一方、従来の collocation method において行なわれたように、 $L(y)$ を $\sqrt{s^2 - y^2}$ の多項式で近似した場合には、翼端で吹き下ろしが無限大とならなければならない。また、フラップなどの操縦面をもつ揚力面では、吹き下ろしが不連続となる場所が存在するが、LANDAHL¹⁹⁾によれば、そのような場所では一般に空気に $\log r$ の特異性を生ずる。このようなこと、および、二次元薄翼理論においては、本来 r^{-k} の形の特異性が、見掛け上は $\log r$ の形の特異性として現われる²⁰⁾ということなどは、上述の疑問に対して何らかの関わりを持つものかもしれない。

積分方程式による二次元問題の取り扱いに関しては、GIESING の研究^{21), 22)}がよく知られているが、そこでは、(14) に示される性質について何らの顧慮も払われていない。すなわち、(14) によれば KUTTA の条件を満たすためには後縁で $B=0$ 、いい換えれば source や vortex の強さの後縁における値が零、でなければならないが、GIESING の取り扱いではそのようなっていない。GIESING の方法による計算結果は厳密解とよく一致するが、それは、 $\log r$ が特異性としては極めて弱いものであるため、数値計算の精度に及ばず影響が小さいことによると考えられる。

5. 数値解法における問題点

積分方程式 (5) や (13) を数値的に解こうとする際生ずる問題は無数といってよいほど存在するが、ここでは次の四点について述べることにする。

- (a) パネル化の方法
- (b) 境界条件の満たし方
- (c) 係数行列の性質
- (d) 精度の改善法

まず (a) の問題であるが、積分方程式を和分近似によって解くため、前述したように、境界面 S_B および S_V を平面要素 (panel または box) の集合で近似する。具体的にこれをどうするかは解の精度にかかわる大きな問題であるが、これに対する解析はこれまでほとんど試みられておらず、また、経験的な基準に頼るにしても、その経験が未だごく僅かしか集積されてい

第2図 二次元翼のパネル化

ないので、パネル分割化の方法に関しては何もわかっていないといってもいい過ぎではない状態である。常識的に判断して、面の曲率の大きい所は分割を細くするべきであるから、パネルの寸法を、それが代表する面の部分の曲率と関係させてきめるのは一つの方法であろう。例えば二次元翼の場合、分点 $j-1$ および j をその両端とする contour の部分 J の長さを s_J とし、これに置き換えるパネル（この場合は線分）の長さを l_J とすると、この部分の曲率の平均値 $1/\bar{R}$ は、

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{s_J} \int_{j-1}^j \frac{d\theta}{ds} ds = \frac{1}{s_J} (\theta_j - \theta_{j-1})$$

であり、 l_J と $\bar{R}$ とが比例するように分割をきめるとすれば、 $l_J = s_J$ であるから、これは $|\theta_j - \theta_{j-1}| = \text{const}$ すなわち J 上の角度変化一定、となるように分点を選ぶことになる。三次元の場合は、通常の座標のとり方からして計算に便利のように、パネル分割の境界線は、主流に平行な直線と、翼の母線を代表するような翼幅方向の分割線とで構成されるのが常である。このとき、翼弦方向の分割の数 N_c と翼幅方向のそれ N_s との関係は、解の精度に最適のようにあらかじめきめることができると都合がよい。翼弦方向の分割は上述した二次元の場合に倣うとしても、翼幅方向の曲率の変化は一般に翼弦方向のそれに比べ小さいから、翼幅方向の分割の基準に同じ量の角度変化を用いることは現実的でない。揚力面理論では、例えば ALBANO & RODDEN²³⁾によれば、各パネルの縦横比が1に近くなるように分割するのがよいとか、また、CUNNINGHAM²⁴⁾によれば、 N_c と N_s との間に

$$N_s/N_c = 0.8 \beta A / \cos \Lambda_m$$

第3図 三次元翼におけるパネル化と doublet lattice method

の関係があれば数値計算における収束の問題に好都合であるとかがいわれている。ここに β は Prandtl-Glauert factor, A は縦横比, Λ_m はパネル前縁と後縁の後退角の平均値である。このような基準がわれわれのアプローチにおいても有効であるか否かは未だ不明である。

ここで、実用上満足し得る解の精度を得るために各種の形態に用いるべきパネルの数の程度を述べると、二次元翼単独の場合は 60~120, 三次元翼単独の場合は、対称性を利用しかつ S_v に対し極めて単純な取り扱いをして 400~800, 胴体+主翼の場合は 1,000~2,000, というのがこれまでの経験から得られた大体の概念のようである。少なくともこれだけの元数の連立一次方程式を解かなければならないわけで、例えば 1,000 元の場合、係数行列の要素の数は 10^6 , すなわち 1,000 K 以上の記憶容量をもつ計算機でなければわれわれのアプローチを実行することができない。一方、揚力面理論で用いられるパネルの数は、フラップ付き三次元後退翼で 80~120, T-tail 解析の場合で 200~240 程度である。

さて、パネル化が定まったとき、数値計算の次のステップは、積分方程式を連立一次方程式に書き直すことである。この場合、得られた連立方程式が、境界条件(5)式や(13)式をある特別な点で満たすようにするか、それとも大局的な意味で満たすようにするかの二つの道がある。後者をとれば最小自乗法的な変分問題に導かれるが、これまで計算された例でこのような行き方をとったものは見当たらない。それは、計算が極めて複雑である一方、前者の行き方に比べ精度の上で得られるメリットがはっきりしない故であろう。前者の行き方をとる場合は、境界条件を満たすようにする点（すなわち control point, c. p.）をパネル上のどこに置くかは解の精度に大きく影響する問題となる。これについてはすでに、3節の HESS & SMITH の方法、および WOODWARD et al. の方法の紹介の所で若干述べたが、source 分布の場合はほとんど問題がなくて、HESS & SMITH のとり方か、あるいはパネルの面積中心で十分と思われる。一方、doublet あるいは vortex 分布の場合は、3節で述べたように、いささか混乱状態にある。すなわち、WOODWARD et al. は、超音流中の平板翼について、c. p. 位置をパネル中央翼弦上 50% 弦長点から 100% 弦長点まで変化させ、それに対応する圧力分布を揚力面理論による結果と比較して、c. p. 位置はパネル後縁に近いほどよいとの結論を得た¹⁴⁾。これは前・後縁とも超音速的である場合の結論であるが、亜音速後縁の場合は後縁で吹き下ろしが無限大となるので、結局全く任意に、いかな

る場合 (亜音速流でも) についても c. p. を 95% 弦長点にとることとした¹⁵⁾。ところが, この WOODWARD et al. の方法においては c. p. は 85% 弦長点に置かれるべきであると R. M. JAMES が指摘したことが文献 25 に述べられている。c. p. のとり方によって結果がどのように変わるかを示す一例として, 第 4 図を文献 25 から引用する。これは円筒状胴体 (計算では環状翼として扱われる) に高翼配置で一定弦長の後退翼がとりつけられている場合を, KALMAN et al.²⁵⁾, GIESING²⁶⁾, WOODWARD et al.¹⁵⁾ の三方法によって計算し比較したものである。WOODWARD et al. の方法による計算は, c. p. を 95% 弦長点においたものであるが, これを 82% 弦長点にした場合は, 図には示さなかったが, KALMAN et al. の計算とほぼ一致する結果が得られている。

揚力面理論における vortex lattice method では, 束縛渦を 25% 弦長線上に, c. p. をパネル中央翼弦上 75% 弦長点に置く (第 3 図参照) ことはすでに 3 節で述べたが, これは HEDMAN¹²⁾ が, 二次元平板の場合について, 厳密解と lattice method による解とを比較して見出したものであり, JAMES の解析²⁷⁾ は, これらの数値が誤差を小さくする上で最適のものであることを示している。第 5 図は, 二次元平板について, 束縛渦の位置を 25% 弦長点とし, c. p. と束縛渦との距離 (と翼弦長との比) を Δ として, Δ を変えると擾乱速度 u の計算結果がどのように変わるかを示したもので, 文献 27 より引用した。これは平板を 10 分割した場合の計算結果であるが, $\Delta=1/2$, すなわち c. p. が 75% 弦長点にあるとき厳密解とよく一致する一方,

第 4 図 c. p. の位置の影響 (1) (文献 25 より)

第 5 図 c. p. の位置の影響 (2) (文献 27 より)

$\Delta \neq 1/2$ のときは極めて大きな誤差を伴うことがわかる。JAMES によれば, u の曲線は, 分割の数 N を大きくすると, 翼前・後縁付近を除いて $[(1-x)/x]^4$ に漸近する。一方厳密解は $\sqrt{(1-x)/x}$ である。ただしいずれも比例定数を除く。

vortex lattice method の非定常流への拡張である doublet lattice method (ただしこの場合は加速度ポテンシャルの doublet) でも, 数値実験の結果 doublet および c. p. の位置について vortex lattice method を踏襲している^{23), 25)}。WOODWARD et al. の方法では, vortex は強さ一定でパネル上に分布されており, また, 本来超音速流の場合について考えられたものであるから, c. p. の位置について lattice method と相違するのは不思議ではないかもしれないが, われわれのアプローチは分布した vortex を問題にするのであるから, この場合の c. p. のとり方についてははっきりした根拠を得ることが望まれる。

次に第三の問題(c)は, 以上のようにして連立方程式を得たとき, これを如何にして解くかに関わるものである。一般に, source 分布の場合, すなわち (5) 式を連立方程式で近似した場合, その係数行列は diagonal dominant となり例えばよく知られた GAUSS-SEIDEL 法などによって解を効率よく求めることができる。このことは, 4 節で FREDHOLM 型積分方程式の一種と二種を区別したが, 第二種方程式において積分にかかる係数が特性数に比べて小さい場合に常に成

立することであって, source 分布に基づく定式化がちょうどこのような好条件の場合に該当することは特筆すべきであろう。前述したように連立方程式の元数が千にもなろうとすると、このような好条件に由来する利点は極めて大きい。これに反して, doublet や vortex による定式化は, 対照的に大きな悪条件の下に置かれているといえる。(13)式は第一種方程式に属するが, 一般に第一種方程式を和分近似によって連立方程式に持ち込んだとき, それは ill-conditioned になる可能性の大きいことが, 例えば BELLMANN のテキスト²⁶⁾に述べられている。連立方程式 $Ax=b$ が ill-conditioned であるというのは, x の一つの近似解 y が見出されたとして, $Ay-b=z$ とおくと, $\|z\|<\epsilon$ (ϵ は例えば最大許容誤差)であるが, $y=A^{-1}(b+z)=x+A^{-1}z$ において $A^{-1}z$ が極めて大きくなり, y と x との差が実は大きいというような場合である。

手掛けた問題が ill-conditioned であるらしいとわかったらばどうするか。第一種方程式を何らかの方法で第二種方程式に転換し, それが well-conditioned であるようにするのは一つの方法である。これとは別に, 前記テキストに Tychonov Regularization なるものが説明されているので紹介すると, まず, $Ax=b$ を解くことを, $\|Ax-b\|$ を最小ならしめるような x を求める変分問題と解釈する。今, x の一つの近似解 x_0 が知られているものとし, ベクトル a のノルム $\|a\|$ を $a^T a$ とすることに, $\|Ax-b\|=(Ax-b)^T(Ax-b)$ を最小にする代わりに, $(Ax-b)^T(Ax-b)+\lambda(x-x_0)^T(x-x_0)$ を最小にすることを考える。 λ は未定係数である。この結果, 連立方程式 $(A^T A + \lambda I)x = A^T b + \lambda x_0$ に導かれるが, λ を適当にとることによってこれを $Ax=b$ に比べ, better-conditioned のものにすることができる。 x_0 に対する依存関係を無くするため, 実際は例えば $(A^T A + \lambda I)x_n = A^T b + \lambda x_{n-1}$ により列 $\{x_n\}$ を作っていくが, この列の収束の速さと, $A^T A + \lambda I$ なる行列の well-conditioned である度合とは, パラメタ λ に対しちょうど相反する要求をもつことになるので, λ の値のきめ方が苦心を要するところである。

ill-conditioned system の regularization として他にいろいろな方法の存在することが考えられるが, 差し当たって, vortex 分布に基づく定式化が ill-conditioned system に導くものであるか否かの見極めが大切である。現在のところ, これに関する資料は無きに等しい。

最後に(d)に挙げた解の精度の向上の方法について簡単に述べる。

積分の和分近似における二つの大きなステップは,

境界面のパネルによる近似と, パネル上の singularity の強さの分布に関する近似である。HESS & SMITH および RUBBERT & SAARIS の方法では, パネルは平面で, singularity の強さは各パネル上で一定, とされたが, DJOJODIHARDJO & WIDNALL になると singularity の強さは二次式で近似されるようになる(3節参照)。パネルについても, 平面ではなく, 例えば二次曲面で近似することはもちろん可能で, ARGYRIS & SCHARPF はこのような行き方を論じている²⁹⁾。

解の精度の向上の方法としてまず考えられるのはパネルの数の増加であるが, 連立方程式の元数の増加は, その解法に要する努力の飛躍的な増加となって跳ね返るから, パネルの数の増加に伴う精度の向上と計算に費やされる労力との間のバランスを考えなければならない。パネルの数の増加に伴う精度の向上の様子を示す例を文献 26 から引用して第6図に示す。これは vortex lattice method によって NACA 'a=1' camber line の loading を計算したもので, vortex lattice method の妥当性を保証し得ない場合²⁷⁾でもあり, われわれの直接の参考にならないかもしれないが, パネルの数を増しても精度は期待したほど向上しない。これはどうやら一般の傾向のようであって, 解の精度の向上のためには, 単純なパネル数の増加よりも, パネルに分割するその仕方, c. p. の置き方, その他に工夫を凝らす方が酬いられるところ大きいという印象を受ける。前述したパネルの曲面近似や, その上の singularity の分布の函数近似などはその方向に沿うものであろう。

6. パネル化および数値計算の例

これまで述べてきたような方法に基づいて, 翼や翼胴体のまわりの流れ場を計算した例は, 本稿に引用した文献の中に数多く見出されるが, ここではパネル化の具体的な様子をみるため二, 三の例を示すことにする。

第7図は, RUBBERT & SAARIS の扱った fan-in-wing 形態の panelling であって, 文献9から引用したものである。このような複雑な形態の場合に必要なと

第6図 パネル分割と精度との関係 (文献 26 より)

第7図 Fan-in-Wing Configuration の panelling
(文献9より)

(a)

(c)

されるパネルの数の感じが掴めよう。

第8図は、B-58 形態に対し、WOODWARD の方法¹⁵⁾に基づいて BRADLEY & MILLER が計算を行なったものを文献 17 から引用したものである。(a) は対象となった機体、(b) はその panelling, (c), (d) は計算結果と実験結果との比較であって、(c) は亜音速 (マッハ数 0.8, Prandtl-Glauert 変換による), (d) は超音速 (マッハ 1.6) の場合である。

第9図は、trailing vortex path に対する計算例であって、(a) は NACA 0015 に対する GIESING の計算²²⁾, (b) は二次元平板に対する DOJODIHARDJO & WIDNALL の計算¹⁰⁾を示す。いずれも静止の状態から上下振動を始めたとき、翼後縁から下流に吐き出される渦の径路を求めたものである。これらは二次元の場合であるが、本稿に述べたアプローチの適用範囲の広さを示すものといえよう。

(b)

(d)

第8図 B-58 の panelling と計算結果 (文献 17 より)

(a) GIESING (文献22より)

(b) DJODIHARDJO & WIDNALL (文献10より)

第9図 Trailing vortex path の計算例

7. おわりに

以上に扱った積分方程式によるアプローチは、解の重ね合わせの原理に基づくものであるから、非圧縮性流れの場合や超音速微小擾乱理論におけるように、基礎方程式が線形の場合にのみ適用し得る。したがって、Prandtl-Glauert 変換の成立する範囲内で亜音速流の場合にも用いられるが、この変換が適用できなくなる高亜音速から遷音速にかけての流れの領域では役に立たない。遷音速領域では、微小擾乱理論における基礎方程式さえも非線形であることはよく知られており、このような困難さを持つ問題は、翼理論における次の飛躍に対する大きな挑戦である。LOEVE et al. による試み^{31), 32)}があるとはいえ、この遷音速三次元翼理論はほとんど未開拓の分野であると考えられる。

2節に述べた定式化はまた、非粘性流れの仮定に立脚している。二次元翼における粘性の影響については、subcritical, attached flow の場合に限り、実用上支障ない精度でそれを評価する方法がすでに開発されているが^{31), 33)}、三次元の場合は、これもまたほとんど未開拓の分野といえよう。

揚力をもつ三次元翼のまわりの流れ場を考えると

き、翼の下流に生成される rotational flow field の影響を無視し得ないことはすでに述べたが、われわれの定式化では、そのモデルたる trailing vortex sheet の形状が、解の一部として得られるべきものとなっている。実際の計算においては、しかしながら、運動の始まりの段階を扱うものではないかぎり、形状を初めから未知量として扱うことは困難であろう。そこで、例えば一つの近似から出発し、iteration によって精度を高めていく方法などが実際にはとられるであろうが、好都合なことには、ヘリコプタの空気力学の発達や、大型輸送機の就航および航空機の運航密度の増加に伴う空港付近での航空機間の空力的干渉の問題の重大化などのため、翼の下流における rotational flow field に関する研究が活発化し、その形状などについても多くの資料が得られている。われわれの問題の見地からこれらの資料を検討した一節を本稿に加えるべきであったが、与えられた紙面の制限もあり、ここでは割愛させて置く³⁵⁾。

終わりに、文献9および32の入手に便宜を図って戴いた日本航空機製造株式会社 YX 開発室の小早川主査をはじめとする空力班の方々、および ill-conditioned system について御教示戴いた航空宇宙技術研

研究所計測部の三好甫技官に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) LANDAHL, M. T. & STARK, V. J. E.: Numerical Lifting-surface Theory-Problems and Progress, AIAA Paper No. 68-72, also AIAA J. Vol. 6, No. 11, Nov. 1968.
- 2) REVELL, J. D.: Comment on "An Efficient, Steady, Subsonic Collocation Method for Solving Lifting-surface Problems" and CUNNINGHAM, A. M., Jr.: Reply by Author to J. D. REVELL, J. Aircraft Vol. 8, No. 3, March 1971.
- 3) THWAITES, B. (ed.): Incompressible Aerodynamics, Oxford University Press, 1960.
- 4) LAMB, H.: Hydrodynamics, Cambridge University Press, 1932 (6th ed.).
- 5) COURANT, R. & HILBERT, D.: Method in Mathematical Physics Vol. II, Interscience Publishers, Inc. New York, 1962.
- 6) KELLOGG, O. D.: Foundations of Potential Theory, Frederick Unger Publishing Company, New York, 1929.
- 7) HESS, J. L. & SMITH, A. M. O.: Calculation of Non-lifting Potential Flow about Arbitrary Three-dimensional Bodies, Douglas Report No. ES 40622, 1962.
- 8) HESS, J. L. & SMITH, A. M. O.: Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies, Progress in Aeronautical Sciences Vol. 8, 1967.
- 9) RUBBERT, P. E. & SAARIS, G. R.: A General Three-dimensional Potential-flow Method Applied to V/STOL Aerodynamics, SAE Paper No. 680304, 1968.
- 10) DJOJODIHARDJO, R. H. & WIDNALL Sheila E.: A Numerical Method for the Calculation of Non-linear, Unsteady Lifting Potential Flow Problems, AIAA J. Vol. 7, No. 10, Oct. 1969.
- 11) EBIHARA, M.: A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems-Part I-Theoretical Basis, NAL TR 240 T, 1971.
- 12) HEDMAN, S. G.: Vortex Lattice Method for Calculation of Quasi Steady State Loadings on Thin Elastic Wings in Subsonic Flow, FFA Rep. No. 105, 1966.
- 13) MARGASON, R. J. & LAMAR, J. E.: Vortex Lattice Fortran Program for Estimating Subsonic Aerodynamic Characteristics of Complex Planform, NASA TN D-6142, 1971.
- 14) WOODWARD, F. A., TINOCO, E. N. & Larsen, J. W.: Analysis and Design of Supersonic Wing-body Combinations, Including Flow Properties in the Near Field-Part I-Theory and Application, NASA CR-73106, 1967.
- 15) WOODWARD, F. A.: A Unified Approach to the Analysis and Design of Wing-body Combinations at Subsonic and Supersonic Speeds, AIAA Paper No. 68-55, also J. Aircraft Vol. 5, No. 6, 1968.
- 16) CARMICHAEL, R. L., CASTELLANO, C. R. & CHEN, C. F.: The Use of Finite Element Methods for Predicting the Aerodynamics of Wing-body Combinations, NASA SP-228, 1970.
- 17) BRADLEY, R. G. & MILLER, B. D.: Lifting-surface Theory-Advances and Applications, AIAA Paper No. 70-192, 1970.
- 18) JORDAN, P. F.: The Parabolic Wing Tip in Subsonic Flow, AIAA Paper No. 71-10, 1971.
- 19) LANDAHL, M.: Pressure Loading Functions for Oscillating Wings with Control Surfaces, AIAA J. Vol. 6, No. 2, Feb. 1968.
- 20) VAN DYKE, M. D.: Second-order Subsonic Airfoil Theory Including Edge Effects, NACA Rep. 1274, 1956.
- 21) GIESING, J. P.: Potential Flow about Two-dimensional Airfoils, Part I & II, Rept. No. LB 31946, Douglas Aircraft Co., 1965.
- 22) GIESING, J. P.: Unsteady Two-dimensional Potential Flow with Lift, Rept. No. LB 32144, Douglas Aircraft Co., 1965, also J. Aircraft Vol. 5, No. 2, March-April 1968.
- 23) ALBANO, E. & RODDEN, W. P.: A Doublet Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows, AIAA J. Vol. 7 No. 2, Feb. 1969.
- 24) CUNNINGHAM, A. M., Jr.: A Rapid and Stable Steady Subsonic Collocation Method for Solving Lifting Surface Problems by the Use of Quadrature Integration, AIAA Paper No. 70-191, 1970, also, J. Aircraft Vol. 8 No. 3, March 1971.
- 25) KALMAN, T. P., RODDEN, W. P. & GIESING, J. P.: Application of the Doublet Lattice Method to Nonplanar Configurations in Subsonic Flow, AIAA Paper No. 70-539, 1970.
- 26) GIESING, J. P.: Lifting Surface Theory for Wing Fuselage Combinations, Rept. DAC-67212 Vol. I, McDonnell-Douglas Aircraft Co., 1968.
- 27) JAMES, R. M.: On the Remarkable Accuracy of the Vortex Lattice Discretization in Thin Wing Theory, Rept. DAC-67211, McDonnell-Douglas Aircraft Co., 1968.
- 28) BELLMANN, R.: Methods of Nonlinear Analysis, Vol. I, Academic Press, New York, 1970.
- 29) ARGYRIS, J. H. & SCHARPF, D. W.: Two-and Three-dimensional Potential Flow by the Method of Singularities, and Two-and Three-dimensional Flow Using Finite Elements, Aeronautical J. of RAS Vol. 73, No. 707, Nov. 1969.
- 30) BAALS, D. D., WARNER ROBINS, A. & HARRIS, R. V., Jr.: Aerodynamic Design Integration of Supersonic Aircraft, J. Aircraft Vol. 7, No. 5, Sep.-Oct. 1970.
- 31) LABRUJERE, Th. E., LOEVE, W. & SLOOFF, J. W.: An Approximate Method for the Determination of the Pressure Distribution on Wings in the Lower Critical Speed Range, AGARD C.P. No. 35, 1968.
- 32) LOEVE, W.: Computer Programmes in Use at NLR for the Calculation of Flow Details around Wing-body Combinations at Subsonic Speeds, NLR AT-6902, 1969.
- 33) LOCK, R. C., POWELL, B. J., SELLS, C. C. L. & WILBY, P. G.: The Prediction of Aerofoil Pressure Distributions for Subcritical Viscous Flows, AGARD C. P. No. 35, 1968.
- 34) SPENCE, D. A.: Prediction of the Characteristics of Two-dimensional Airfoils, J. Ae. Sci. Vol. 21, No. 9, Sep. 1954.
- 35) 海老原正夫: Wing Trailing Vortex について (An Unpublished Interim Note, 航空宇宙技術研究所空気力学第二部, 1971年11月)。