流体力学における計算機の利用*

Utilization of Computer for Fluidynamics

安 喜 隆 幸**
Takayuki Aki

1. はじめがき

流体力学における計算機の利用という題目は、これ一つでも大きなシンポジウムを維持できる。つまり流体力学の展望規模はマッハ数とレイノルズ数の面とらえただけでも、その広がりには驚くべきものを持っている。まして宇宙飛しょうで遭遇するようなパラメータを次々と座標軸に加えると、展望の次元も増加し関連性も複雑となる。それは個人の努力程度では到底覆いつくせない対象である。そこで、題目に恥じることにはなるが、筆者の経験を中心とした話題を提供し、流体力学における計算機の利用の一断面をみるということにしたい。それでもなお、筆者の負担能力をこえるという勝手な理由のもとに割愛した話題もある。それらについて、後日会員諸兄のどなたか話題提供を試みて下さることに期待をかけていることを申しそえさせていただきます。

2. 流体力学における計算機の利用—鈍頭問題

アポロ・カプセルのように、飛行方向にむかって大きな先端曲率をもつ物体は鈍頭であるといわれる。衛星または月軌道から大気圏へ再突入し直接的に地表到達する物体は、突入径路上で遭遇する熱的負荷軽減のため鈍頭に設計される。突入径路上で、速度は減少し大気密度が増加するから飛行条件は時々変化している。しかし、多くの場合、各時刻に対応する条件においての定常流れを仮定した解析によって問題の解決が計られている。この定常流解析方法が意味を持つのは、飛行条件の時間的変化に対して流れ場の中における力学的あるいは物理化学的変化の緩和時間が十分に短い場合である。人間宇宙飛しょう体の再突入径路の大部分でこの条件は(実用的精度内で)満たされている。こうして、非定常性に基づく困難は一応回避できるとしても、稀薄流から連続流にわたる広い範囲の解析を必要とさせる事情は変わらない。また鈍頭が選ばれた結果、物体前面における気体圧縮は化学的活性化を促し、この影響が後流に著しく及んでくる。通信や追跡に関係をもつ電磁波減衰は流れの中における電

子密度分布、したがって電離反応を無視しては考えられない。第1図は展型的鈍頭高速飛行体まわりの流れ模様である。物体(球)の前方に衝撃波が形成されるのと、長い伴流が続くのが特徴である。熱的負荷のみが問題であれば、先端付近が最大であるのでその領域のみの考察でも実用性はある。通信、とくにその途絶(black out)の問題を考察するならば、通常、アンテナが設置される先端に引き続く物体上のプラズマ流れが解析されねばならない。さらに追跡におけるレーダ断面積を考えようとするならば、伴流領域も考察の対象としなければならない。伴流領域における電子密度が無視し得る程度にまで小さくなる長さが物体半径の 10^3 倍をこえることも珍しくない。結局、高速飛行体の流れ場は解かれるべき空間範囲もまた広いことを要請される。目下のところ、このような流れ全域を一つの問題として解く*ことのできる方法原理は見つかっていない。そこで、常識的に選ばれるのは、

- (1) 鈍頭の先端付近の流れ
- (2) (1)に続く物体壁に沿う流れ
- (3) 伴流**

のように分割し、解を接続する方法である。(2)と(3)における接続には1段前の流れ場の解から得られ

第1図 球の自由飛行実験シュリーレン写真
空気中360 Torr, 速度 0.96 km/sec において観測された。離脱衝撃波、頸部をもつ伴流、浮動衝撃波などがよくみられる。(東大・宇宙研 小口教授のご好意による)

* 一組の基礎方程式と境界条件のもとに全領域が解けるという意味においてである。

** 多くの場合、近接領域と遠隔領域に分割して解析される。たとえば第1図の頸部より上流と下流が分割される。

* 昭和46年10月28日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所

第2図 鈍頭先端付近の流れ場のスケッチ

飛行マッハ数 (M_{∞}) が増加するにつれ、衝撃波面 (W_1-W_2) は物体表面 (B_1-B_2) に近づく。 S_1-S_2 は音速線、 C_1-C_2 , C_3-C_4 は極限特性線である。(I) は球, (II) は円柱における流れ場である。

る条件が用いられる。実際にはこれが大変な労力と広い範囲にわたる流体力学の素養を要求する仕事になる。労力のほうについていえば、最新鋭の電子計算機によっても数十時間を必要とすることは珍しくもない。また素養のほうについていえば、化学反応と流れの干渉に関する知識はどの場合においても必要である。衝撃層の解析においては気体中の反応が主役を演ずるが、境界層においては物体壁の触媒性、物質付加の効果も入ってくる。また乱流領域があれば、乱れと化学的エネルギーの相互作用を考慮した乱流理論によらねばならない。こうした化学反応による効果の総和によって、物体への熱伝達あるいは電磁波との干渉が支配される。反応を伴わない古典的粒子にたいする流体力学ですら今日なお未解明の分野があり、とくに稀薄流、乱流などと一口で呼ばれている分野では世界観ないし指導原理における混沌をいまだ抜けきってはいない。こうした背景のままで高速飛行体まわりの流れの解析には、非常な困難があることを認めていただこう。

ここでは、当面の解決策が物体先端付近の流れの解析に始まることを基に、それを鈍頭問題と呼びそこでの事情がどのようにあるかを調べてみよう。その中で流体力学と電子計算機の利用の問題を考察することにしよう。

3. 逆解法

鈍頭問題はその領域が亜音速であるため、解析上遭遇する数値的困難で特徴づけられる。その本質的性格は非粘性連続流の解析方法を調べることで十分に理解される。

解析法を方法論で分類すると

- (1) 衝撃波形状を与え、その背後の流れ場を解き、物体形状を最終的に求める、
- (2) 物体形状を与えて流れ場を解く

もののいずれかになる。(1)に属する手法は、それが

解析的であろうと数値的であろうと、逆(または間接)解法、(2)に属するものを直接解法と呼ぶ。もちろん、いずれにおいても一樣流条件*と物体壁上条件は与えておく。

それぞれの解法に立ち入る前に、流れ場の状況を対称流れを例にとって述べておく。対称流れの代表として、2次元円柱まわりのそれと、軸対称である球まわりのそれとを取りあげる(第2図)。物体の前方に衝撃波が形成される。対称中心近くで衝撃波を通過した粒子は強い圧縮を経験しながら物体表面に近づく。対称中心上の粒子は物体面に達したところで速度0(よどみ点または線)となったのち物体表面に沿って流れる。この粒子は次第に加速を受け物体面上のある所で音速に達する。対称中心から離れて衝撃波面を通過する粒子は物体面に到達することこそしないが、すなわち速度0を経験しないことを除けば大体類似的経過をたどって超音速になる。衝撃波面上のあるところで粒子速度が局所音速に等しいことがおこる。したがって衝撃波面上のある点と物体上のある点との間を結んで連続な音速線(または面)を描くことができる。つまり、衝撃波、対称中心、物体表面、音速面で囲まれる領域は亜音速となっている。音速面、衝撃波形状はマッハ数と気体比熱比の関数であることは確かだがあらかじめわかっているわけではない。また衝撃波と物体間の距離も未知である。与えられた一樣流条件と物体形状について、これらの未知量を求めることが問題である。物体面上条件は今の場合唯一で、流れが物体表面に沿うことを要請するだけである**。

文章で示せばわずかな行数で記述され、また実験観測写真でみても非常に簡潔にみえる流れ場ではあるが、理論解析の方はそのようにはいかなかった。流れ

* 物体に固定した座標系でみた無限上流からの流れ条件で、前述の飛行条件と同じ意味をもつ。

** 他の等価は表現で置きかえられることもある。

場の簡潔な美しさに魅かれてこの問題に立ち向かった解析的研究はいずれも成功に程遠い結果でしかなかった。VAN DYKE は、その当時までの解析的手法を総点検し、いずれもの理論が発散や収束の点で問題を抱えていることを指摘した¹⁾。そして目を覆うばかりの理論の貧困さを救う対策として電子計算機による数値厳密解を求めることを考えた。ちょうどそのころ電算機が実用化の域に達していたことが動機の一つであったかもしれない、がとにかく一連の軸対称鈍頭問題の逆解法厳密解を求めた²⁾。彼に前後して幾つかの厳密解が逆解法で調べられているが、不安定回避対策における差を除けば軌を一にするものであり、徹底さの点では VAN DYKE に止めをさすといえよう。そこで逆解法について簡単な説明を行ない、付随した問題点の幾つかを指摘しておこう。後の説明の便宜もあるから、基礎方程式の提示をしておく。非粘性完全気体の流れ場は Cartesian (x^1, x^2, x^3) 座標において次式により記述される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho uu + pI) = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(u[E + p]) = 0 \quad (1c)$$

ここで、 ρ, u, E および p は密度、速度ベクトル、単位体積あたりの全エネルギー、圧力を表す。式中の I は単位テンソルを、 uu は速度ベクトル成分 (u^1, u^2, u^3) の dyadic product を意味している。6個の未知量に対し、5個しか式がないので、系を完結されるため熱状態方程式

$$p = \rho(\gamma - 1)e \quad (2)$$

が追加されねばならない。 γ は気体の比熱比、 e は熱エネルギーである。今は定常流を考えるから(1)式の時間微分項を落とすものとする。また2次元や軸対称では空間座標2個 (x^1, x^2) についての div 演算を考えればよい。

まず、衝撃波形状を仮定して、波面が座標面と一致する座標系を選ぶ。この座標系は、解を求める範囲でよいが、特異点を持ってはならない。これは解析的衝撃波形状したがって解析の流れ場を想定したことと同等である。また特異点が物体内部であるものは差し支えないし、変換の Jacobian が1であれば直交座標でなくともよい^{*}。変換された座標空間を (ξ, η) とし、 η = 一定上に衝撃波面があるものとしよう。解かれるべき未知量を代表的に $X(\xi, \eta)$ で書くことにすると、

変換後の式を適当に代入消去することにより

$$X_\eta = X_\eta(\xi, \eta, X, X_\xi, \eta) \quad (3)$$

の形で η 微分を表わすことができる。一方 X の Taylor 展開を考えると

$$X(\xi, \eta + \Delta\eta) = X(\xi, \eta) + \Delta\eta \cdot X_\eta + \frac{(\Delta\eta)^2}{2} X_{\eta\eta} +$$

であるから、基礎方程式を用いて得た(3)式の X_η を代入することにより

$$X(\xi, \eta + \Delta\eta) = X(\xi, \eta) + \Delta\eta \cdot X_\eta$$

すなわち、打ち切り誤差 $(\Delta\eta)^2$ で η 方向への計算が進められる。 X_η 中に含まれる $X_\xi(\xi, \eta)$ は $X(\xi, \eta)$ がわかっていれば、数値微分などで評価可能である。実際の計算は、 (ξ, η) を微小間隔 $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ で分割した格子空間(第3図)上で行なわれる。衝撃波面($\eta = \eta_s$)上において、 $\Delta\xi$ ごとの点において、斜め衝撃波関係式が解かれ初期値 $X(j\Delta\xi, \eta_s)^{***}$ を設定する。その後は上記を繰り返し手順とし η 方向へ前進計算し物体表面に達するまで続けられる。物体面到達は境界条件の充足によって感知される、とはいっても一般に物体面と座標面は一致しないから、逆に探し出される。通常物体内部に突入した格子点上の流れ量は、負の密度、速度の符号反転などの異常を示す。これが $(k+1)\Delta\eta$ であったとき、 $k\Delta\eta$ に立ち戻って、そこから境界条件が満足されるような $\delta\eta_j$ を求める^{***}。こうして対称面に近い方から物体形状 $(j\Delta\xi, k\Delta\eta + \delta\eta_j)$ が定まってゆく(第3図)。以上のようにして求められた物体形状が予定したものでないならば、衝撃波形状を選び直して計算を再出発させる。幾回かの試行錯誤的計算の結果、許容誤差内で目的形状を得ることができる。このように書くと、いかにも簡単そうであるが、不安定性にたいする回避策が十分であればというた

第3図 逆解法の模型の表示

^{*} g は座標変換におけるパラメータで解析的に求められる。

^{**} j および k は整数。

^{***} 文献4)では、この煩雑さ避けるため η に沿ったの流量を監視する方法が用いられた。

^{*} 目的によっては、このような座標系を積極的に選ぶ(文献3), 4), および5)など)。

し書きのもとにいい得ることに注意しなければならない。数学によれば上記の方法は、楕円型偏微分方程式の Cauchy 問題を解くカテゴリに属する。したがって improperly posed であるため、解の存在に対する初期値の制約をはじめとして、一意性、収束性に関する本質的困難を抱えていて、解の存在や一意性に関しては、例によって実験との比較で何とか切りぬけることにしても、収束性は安定な解であることの検証なしには主張し得ないので注意はもっぱらこの点に集中される。このため、(ξ, η) 両方向で*の解の単調性を要請する形で smoothing が行なわれる。このような微分方程式に根拠をもたない外部的な解の補正は、いかにもっともらしくあろうとも膏藥張りの誇りを逃れない。筆者の考えでは、格子刻み幅および差分近似度を武器としての問題攻撃が再検討されるべきだとするが、筆者自身それを試みてはいないので、問題点として指摘するだけである。ともあれ何らかの工夫のもとに、結果的に実験と良好な一致を示す解を得ることができる。逆解法は安定化操作を含めてもそのアルゴリズムは比較的簡単であり、計算時間も1形状あたり数分程度である。実際、われわれの身近で得られた例によれば、軸対称(5点数値微分, 32ビット演算, smoothing 無し)で1分以下⁵⁾**, 2次元(7点微分, 64ビット, smoothing あり)で2分以下である***。いわば幾らでも欲するだけの解を生産することが可能である。

逆解法にはもう一つの手法があって、GARABEDIAN と LIEBERSTEIN の用いたもので⁶⁾、複素変数の導入により問題の移し替えがはかられるものである。その概要は、物理量 $W(x, y)$ が実(物理)空間での楕円型初期値問題であるとき、変数の一方を $(y = y_1 + iy_2)$ の複素変換により双曲型初期値問題にひきなおすものである。このとき初期条件を解析接続しなければならないので新たな問題を生ずる恐れを除けば楕円型の Cauchy 問題より事情は楽になる。求められた解のうち $y_2 = 0$ の断面におけるものが意味をもつ。しかし初期値が解析的でないと接続困難が起こること、計算時間が前述の逆解法の200倍以上にもなることなどの理由でほとんど利用されていない。

2次元でも軸対称でも逆解法がほとんど無力化するの、平頭円柱のように表面勾配に不連続をもつ物体形状の発生に対してである。逆解法において何らかの形で仮定される解析性のため、このような形状発生に

成功した例を見受けることはできない。また、迎角付鈍頭物体ではよどみ流線の位置が既知でないなどの3次元性のため複雑さが増す。流れ状態量の解析性に関して、比較的強い制約をうける逆解法は攻撃力を失なう場合も強い。比較的小さい迎角の場合だけが僅かに解かれたにすぎず⁷⁾⁻⁹⁾、VAN DYKE 流の解法に做ったものは Joss⁹⁾ によるものを見受けることができる程度である*。数値解というのははもとより優雅さの点では劣るのが当然といっても、対称から非対称問題へ移るときのその失われ方は落差がありすぎる。とあれ、ある範囲の鈍頭流れが電算機によって厳密に解かれることが容易になったことは一つの事実として認めておかねばならない。

このようにして得られた解の結果を、引き続き流れ領域における境界データとして用いる、その一例は文献5)にみられるようなものとなる。とにかく容易に解が得られそして現実的にその結果が使用されていることから、鈍頭問題が解決されたと考えることは早計である。事実次のような厳しい批判が待ちかまえている。すなわち、“逆解法は厳密解を得るのには比較的簡単な方法で、電算機をもってすれば厳密解をカタログ化することも可能であろう。しかしこれによって直接解法に代わり得るとするのは、空気力学に限らず普遍的意味でも科学の進歩を遅らせる危険な思想である”という内容である¹⁰⁾。工学的見地からみて、物体の形を先に与える直接解法の方が自然な受け入れ易さをもっていることは事実であるから、この批判は厳しすぎるというものではないと思われる。

VAN DYKE をめぐってのもう一つの話を提供しよう。彼は数値厳密解の発表後ふたび鈍頭問題の検討を行なった¹¹⁾。その中で、直接解法も含めた数値解法全体について、“計算はあまりにも個人の洞察力に頼りすぎ、自動化不十分で、流れの単純さに見合わない努力を強いる点で不成功である。例えば米国の研究所はそれぞれが鈍頭の計算プログラムを持っていたが、その手法の多様性にみられるように完全に満足していない”といった後、“計算を実在気体効果を含む問題へ拡張するに忙しい”と嘆く。彼の見解は、“計算機はわれわれを袋小路に追いやり、問題を注意深く考えさせるより算術に向けての飽くなき欲望に委ねさせる。ゆえに今や以前の解析ないし半解析的手法を再検討すべき時機”となる。そして収束の貧困は、その原因を追究し対策を講ずれば研究に値する理論展開が可能であることを示す。彼は、良い理論によれば計算はたかだか常微分を解く程度で済み、1分以内の機械使

* アルゴリズムの簡単化のためη方向だけをsmoothingすることが多い。

** HITAC 5020 F 使用

*** HITAC 5020 による。筆者手持ちのプログラムで計算法は3)と同じである。

* SWIGART の方法は VAN DYKE のとは思想が異なるが逆解法である。

用で事足りる、逆にいえばその程度で現象把握を正確になし得るのが良い理論であり、そのように志向した研究を進めるべきであると考えているようである。これに対し、後で説明するような時間依存解法を使った BOHACHEVSKY は、“提案されたのは逆解法ばかりで、迎角付きの場合合理的でないことがある。またその精度が数値厳密解と比較され、精度収束性が自明でない。特別な場合についてのみそれらをチェックしても一般性を保証する理由にはならない。そして、機械使用が15秒であることを強調するが、計算機を1分使うか1時間使うかのコスト差は200ドルに過ぎないだろう。誰かが1時間計算を短かくするのに1年働かねばならぬとしたら2万ドルはかかるだろう”などと問を出す。VAN DYKE は、“簡単な場合にさえ単純な方法が見つからないとしたら複雑な場合には2万ドルでも駄目だろう。私が Garabedian-Lieberstein 法を好ましくないとするのはそれが3時間もかかるほど長い時間である。この方法を化学非平衡流に拡張すると IBM-7094 で25時間はかかる。これは長過ぎると考える”，と答えている。問答に割って入った(?) HAYES は、“現在の計算機は人間よりスマートでない。解析手法あるいは良い理論は本質を捉える点で計算機より秀れている”。とコメントする〔以上 11〕。

現実には、VAN DYKE の嘆きや反省にもかかわらず反応流や粘性流への拡張が止まるところをしらない勢いをもってなされてしまったし、今日もなおなされつつある。VAN DYKE を慰めるような仕事は、非常にまれに、しかも数値解に気兼ねを意味する言葉を添えてでしかなされない。

ところで、逆解法がなした功績をあげ、それが決して悪者でないことを指摘しよう。VAN DYKE の仕事は今日でもなお、その徹底さの故でもあるが鈍頭解析の基準であり、非対称流れのよどみ流線にまつわる仮説の信憑性を問う指導原理を導いたのは逆解法である*。このように先導的・開拓的仕事において夢よ再びが失われたとはいえない。

4. 直接解法—(1) 定常流解析

偏微分方程式を何らかの近似手段によって常微分におとせれば、解を引き出すのはより容易となる。Method of integral relations¹²⁻¹⁶⁾ と呼ばれるものは、これを物理的考察に頼りきらないで行なった点が境界層で馴じみのものとの差となっている。

(1) 式のように保存形式で書かれた場合の一般形は、

$$\frac{\partial}{\partial x} P_i(x, y, w_1, \dots, w_k) + \frac{\partial}{\partial y} Q_i(x, y, w_1, \dots, w_k) = F_i(x, y, w_1, \dots, w_k) \quad (4)$$

となっている、ここに $i=1, 2, \dots, k$ で k は未知関数の数である。これらの式を領域

$$x=0, x=a; y=0, y=D(x)$$

において x および y の境界上で k 個ずつ与えられた条件で解くわけで、 $x=0$ を対称(よどみ)流線、 $y=D(x)$ は衝撃波と対応させればよい。 $D(x)$ は既知の境界形状ではないが、ここに境界条件を適用させ系を閉じさせる。また $x=a$ で遭遇する特異性は解の正則性を適合条件として使用するなどして、境界条件不足あるいは未決定などのためによる不適切さを生じないようにする。次に、ある連続(後に示すように piecewise continuous でもよい)関数 $g(y)$ を(4)式に乘以 y に関して積分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{D(x)} g(y) P dy - D'(x) g(D) P_a + g(D) Q_a \\ - g(0) Q_0 - \int_0^{D(x)} Q g'(y) dy = \int_0^{D(x)} g(y) F dy \end{aligned} \quad (5)$$

なる k 個の式(添字 i 省略)が得られる、式中

$$P_a = |P[x, y, w_1(x, y), \dots, w_k(x, y)]|_{y=D(x)}$$

であり、 Q_a, Q_0 も同様の意味をもって定義される。そして、計算領域を

$$y=y_n(x) = \frac{n}{N} D(x) \quad (n=1, 2, \dots, N-1)$$

ただし、 $y_0=0$ および $y_N=D(x)$

のように N 個の等間隔帯に分割し、これと対応する N 個の1次独立な $g_n(y)$ を選び適切な内挿式による y 積分を行なう。その結果、たとえば

$$\int_0^{D(x)} g_n(y) P dy \rightarrow D(x) \sum_{n=0}^N A_n P_n(x)$$

となり近似積分される。 A_n は内挿式や g_n で決定できる係数である。結局、 k 個の式を1次独立に N 個に分割し、上記の意味での積分をしたものは $(k \times N)$ 個の x に関する連立常微分系になる。未知関数 $w_{i,n}$ は $k(N+1)$ 個 ($i=1, 2, \dots, k; n=0, 1, \dots, N$) であり、 y_0, y_N 上の k 個の境界条件を持つので x に関しての境界条件とともに系を閉じることになる。以上に低触しないかぎりにおいて、 g_n と P_n は任意に選べる。しかし問題によって適・不適のあることは避けられない。通常流れ場の状況を予想して選ぶが、結果が思わしくないときは選び直して再計算するなどの努力がいる。また座標系の選び方も重要である。物体面と座標面との一致、直交座標系であることなどが要請される。

物体面が $y=0$ 、対称面が $x=0$ 、衝撃波が $y=D(x)$ と対応させ、 y 積分によって x に関する常微分系を得

* その他反応性流れ、粘性流への拡張など逆解法のほうが早い時機に試みられている。

第4図 Method of integral relations における各種解法の模型図

る近似解法は第1種と呼ばれる (第4図 SCHEME I)。このとき x の積分における特異点 (音速線になる) は, 解の正則性を要求した適合条件との一致で除去される。 x 積分の初期値 (衝撃波離脱距離: $y_{s0} = \Delta(0)$) を与えて, 音速線で正則性条件が満たされるまで反復計算される。適合条件を満たす y_{s0} は精密である必要がある, つまり解曲線は y_{s0} に敏感であるといえる。特異点の性質からして適合条件の厳密な充足は不可能であるが, 特異点近傍での計算方法 (例えば数値積分刻みの変更など) の工夫によって消費時間をあまり増さずに良い精度を得ることもできる。 $N=1$ の近似においてこの状況の詳細は報告されたものがある¹⁶⁾。第1種解法は一樣流マッハ数が大きいほど低い近似で済む, すなわち収束性が良くなる。収束が高次近似解との比較で自己検査できることは良いことではあるが, それが数値的であること, 近似度1段上昇による困難の増加が近似度倍以上の負担になることなどで完全な検証はむずかしい。マッハ数が低いほど, そして当然のことながら軸対称よりは2次元流のほうが事情は悪くなる。マッハ数3の円柱まわり流れでは $N=3$ までやっても有効数字3桁がようやく一致するかどうかの程度である¹⁵⁾。したがって衝撃層が厚い流れでは別な (例えば後に述べる第3種) 解法が推奨される。

第1種解法は衝撃層に沿って帯分割を行なった。これに対して衝撃層を横切る帯分割も可能である, このとき $\eta = y/\Delta(x)$ のような変換で衝撃波物体面が平行になるようにすると便利である, これを第2種解法という (第4図 SCHEME II)。この近似解法では, 衝撃波と物体形状は離散的にしか定められないが, 第1種に付随した特異性は消去される。ただし境界値 (衝撃波と物体面上でそれぞれ $N+1$ 個) 問題が起きることになる。解法の体系からみて第1種よりはアルゴリズムが簡単となるため, 高次近似の負荷は楽になっている。流れ場としては衝撃層に沿ってよりも, それを横切った状態変化が大きいものに適していることは明らかである。収束性は近似度 N の増加につれ確実に良好となることも確かである。文献¹⁵⁾では, マッハ数10における球まわりの計算について, この事情を物語る数表がみられる。

衝撃層の両方向に帯分割をし近似積分を行なえば, その最終形は連立超越方程式となり数値積分を含まない解法を構成できる。これは第3種解法と呼ばれ (第4図 SCHEME III), 衝撃波物体面間距離が大きく第1種や2種解法では不満足な流れ場に適用して効果がある。文献¹⁵⁾には, マッハ数1.05~2.0の球まわりの計算結果が紹介されている。このような低超音速流れは第1種や2種あるいは逆解法で不得手な対象であった。ただ第3種解法は原理的にみて他の2つの解法より精度は落ちるので, 必然的に高次近似まで解かなければならない, しかし iteration の収束は比較的良好なので計算時間の負担はさほど重くはならない¹⁵⁾。また第3種解法は初めの近似積分を第1種または第2種のいずれにするかで解法構成が異なる, すなわちアルゴリズムが変わるしそれによる精度も変化するわけであるが, これらと比較検討した資料を見ることはできない。他の解法, 例えば第1種法との比較がマッハ数10の球まわりの流れについてなされている¹⁵⁾。第1種法の $N=2$ の解との比較が第3種法の $N=2\sim5$ についてなされている*が3%程度の誤差がある。

Method of integral relations による計算法の原理はソ連の DORODNITSYN¹⁷⁾**に負う。その故もあってソ連における仕事が最も組織的であり執拗ともいえるほどである。逆解法と同様反応性流れなどへの拡張も盛んに行なわれてきた, しかしこれが直接解法に属

* 衝撃層を横切る方向で2分割, それに沿う方向で N 分割され, 第1種法を第1近似にとった場合。

** DORODNITSYN および BELOTSERKOVSKII の論文に関しては, 筆者が入手したものだけを掲げておく。後の著者に関しては標題からみて内容はあまり変わらないだろうと思われるが他の場所で古い年代に発表されたものもある。それらについては, 10), 12), 13), および 15) を参照されたい。

するためか逆解法のような風当たりの強さはあまりない。だが批判の無いことは何をしてもよいというライセンスでないことは確かである。たとえば、迎角付き鈍頭流れにおいてよどみ流線に仮定をおいてなされた解析では逆解法の勝利によって生き残れなかったものが出ている。

この解法は表面曲率不連続や非対称物体まわりの流れに対し、逆解法ほどでないにしろ急激に精彩を失ってくる。そこでの解法は泥臭さが目立ち始め力で押す印象を残す。これらを取り除くことが大きな課題となるであろう。ソ連の組織力と執念深さをもってすれば片付くことであるかもしれない。この方法に限らないが鈍頭解析に関するソ連の仕事の紹介が文献18)にみられる。

直接解法による厳密解はわれわれの国においても試みられた¹⁹⁾。この解法は上述のようなものと比較すると、計算機と相性のよくないことがある。しかし、今日のように大型高速でかつ豊富なI/O機器をもつ計算機にとってそれほどのもではない、と筆者は考えている。論理的厳密性を具備したこの解法がわれわれの国において無関心のまま過されているのは残念なことのように思われる。Method of integral relationsにおけるBELOTSERKOVSKII一派の仕事をみるにつけ、筆者自身の反省も加えて、いつかは検討が試みられることが必要であると考えている。

5. 直接解法—(2) 時間依存解析

偏微分方程式を差分近似で解くことは目新しいことではない。しかし、差分解法が現実性を高めたのは電子計算機の大型高速化による一つの結果であるし、その数学的基礎が充実してきたためでもある。逆解法で用いられた差分解法が数学的にあまり明らかに説明されていないのに比較すれば、以下に述べる時間依存解法は幾分か優位のように思われる。といっても、アルゴリズムの中核となる差分法そのものについてだけであって、解法全体として系統づけられた理論の支配下にあるのではない。とくに初期値境界値混合問題の差分法は支配する強力な理論が欠けているから、鈍頭に限らず多くの流体力学の問題において共通して言える注意である。時間依存解法は名のとおり時間に関して解かれ、その基礎方程式は(1)式そのものになる。それが非定常流解析と呼ばれないのは、風洞実験や実機における定常流の成立過程とは異なった仮想的初期条件を使うため、非定常→定常への力学的緩和現象として途中の結果を理解しにくいためであろうと思われる。もちろん、そのように現実的な初期条件のもとに解けないわけではないが、計算時間が多くなり過ぎるため、

非定常緩和の解析が目的でないかぎり用いられない。

このカテゴリに属する計算法は大別して、基礎方程式を厳密に差分化するものと、何らかの流体粒子模型化を行なったのち差分化するものとに区別することができる。前者の方法は数学のみを武器とするから厳密性の信頼感が高く、後者の方法は直観的な理解のしやすさで秀れている。これらについては解説が出されている²⁰⁾ので、ここではそれを繰り返さないが、前者の手法で著者にも経験があるものを代表として簡単に説明しておこう。

(1)式のように保存形式に書かれた方程式はそれぞれ時間微分と空間微分がひとかたまりになっているので、ベクトル値関数表示によって

$$w_t = f^i x_i$$

と書いてしまうことができる。 w はtransposedして $(\rho, \rho u^1, \rho u^2, \rho u^3, E)$ を成分とし、 f は w の非線形関数で w に対応する成分をもつ。 t と x^i は時間および $x^i (i=1, 2, 3)$ 空間偏微分の意味である。簡単のため空間1次元流れを考える、 $x^1 = x, u^1 = u$ などとして

$$w_t = f_x \quad (6)$$

$$\text{ただし, } w^T(\rho, \rho u, E); f^T(-\rho u, -[\rho u^2 + p], -u[E + p])$$

である。 p は(2)式に示したとおり、またこの場合

$$E = \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right)$$

であって系は完結している。 w をTaylor展開すると

$$w(t + \Delta t) = w(t) + \Delta t \cdot w_t(t) + \frac{\Delta t^2}{2} w_{tt}(t) + \frac{\Delta t^3}{6} w_{ttt}(t) + \dots$$

であるから、何らかの方法で $w_t, w_{tt}, \dots$ などを評価すれば、その段階までの精度をもって $w(t + \Delta t)$ を求めることができる。基礎方程式(6)は明らかに $w_t(t)$ が $f_x(t)$ の空間微分をもって評価できることを示しており、したがって

$$w(t + \Delta t) = w(t) + \Delta t \cdot f_x(t) \quad (7)$$

としたものは打ち切り誤差 $O(\Delta t^2)$ の精度にある差分を与えることができる。

さらに f が w の微分を含んでいないことに着目して

$$w_{tt} = (f_x)_t = (f_w w_t)_x = (f_w f_x)_x$$

と評価できるから

$$w(t + \Delta t) = w(t) + \Delta t \cdot f_x(t) + \frac{\Delta t^2}{2} (f_w f_x)_x \quad (8)$$

という形式で、誤差 $O(\Delta t^3)$ の差分法を得られることも容易に理解できる。上式中 f_w は、この場合、 3×3 の行列*になるが、 $w(t, x)$ を用いて直ちに値が求めら

* この固有値3個がともに実数であることで、(6)式は双曲型偏微分方程式であることが示される。

れる。この評価法によるものは LAX-WENDROFF²¹⁾ らが考え、多くの人々によって実用計算が試みられ信頼性が高められてきている。差分式の具体的表現および計算例を報告でみることができる²²⁾。

打ち切り誤差 $O(\Delta t^4)$ 以上の差分法は LAX-WENDROFF 流の考え方では困難がある、そこでは f_w の微分が必要となりその評価に self-consistent なものを見つけないためである*。それで RICHTMYER²³⁾ が提案したような逐次近似法が有効性を発揮してくる。この方法は、常微分における RUNGE-KUTTA の思想を採用したものとみることができる。RUNGE-KUTTA のときと同様に r 回目反復公式を

$$w^{(r)} = w^{(0)} + \Delta t \sum_{s=0}^{r-1} \alpha_{rs} f_x^{(s)}, \quad r=1, 2, \dots, k$$

と書き、 k 回目に $w(t+\Delta t)$ を求めるように解法構成を行なう。このとき $f^{(s)}$ は $t=t_0+\tau_s \Delta t$ ($s=0, 1, \dots, k-1$) の各レベルでの値であり、 $\tau_0=0$, $w^{(k)}=w(t+\Delta t)$ および $w^{(0)}=w(t)$ などとする。例えば $k=2$ とおいて

$$\begin{aligned} w^{(1)} &\equiv w(t+\tau_1 \Delta t) = w(t) \alpha_{10} + \Delta t \cdot f_x(t) \\ w(t+\Delta t) &= w(t) + \{\alpha_{20} f_x(t) \\ &\quad + \alpha_{21} f_x(t+\tau_1 \Delta t)\} \Delta t \end{aligned}$$

が得られる。まず上の式によって $w(t+\tau_1 \Delta t)$ を求め、それにより下の式の $f_x(t+\tau_1 \Delta t)$ を計算して $w(t+\Delta t)$ を得ることになる。荷重係数 α_r は $w^{(s)}$ の Taylor 展開

$$\begin{aligned} w^{(s)} &= w + \tau_s \cdot \Delta t \cdot w_t + \frac{(\tau_s \Delta t)^2}{2} w_{tt} + \dots \\ &= w + \tau_s \cdot \Delta t \cdot f_x + \frac{(\tau_s \Delta t)^2}{2} f_{xt} + \dots \end{aligned}$$

を各必要精度まで比較し決定することができる。上例の場合

$$\alpha_{10} = \tau_1, \quad \alpha_{20} + \alpha_{21} = 1, \quad \alpha_{21} \tau_1 = \frac{1}{2}$$

であって、1パラメタ τ_1 を与えることにより α_r が決定される。 $\tau_1=1$ または $1/2$ とした2通りの差分法が紹介され、比較検討されている²²⁾。これは打ち切り誤差 $O(\Delta t^3)$ のもので LAX-WENDROFF のものと等価である。同様な手順を繰り返すことにより打ち切り誤差 $O(\Delta t^4)$ の差分法が RUSANOV²⁴⁾ および BURSTEIN²⁵⁾ によって導かれている。

空間次元が増した場合でも、ここに紹介した1次元の手順を繰り返すことにより必要な差分法を展開することができる。 $O(\Delta t^5)$ の打ち切り誤差をもった差分法の完成もそう遠いことではあるまいから、少なくとも原理的に常微分に較べて、そんなに遜色を持つようなこ

となく偏微分の数値解が得られると考えてよい。

ここに紹介したもののばかりでなく、ここでのカテゴリに属する計算法の大部分が持っている大きな特徴は、流れ場の中に存在する不連続面あるいは極限線を境界面として特別扱いしないで済むことである。衝撃波のような不連続面を横切って計算する場合でも、そこに衝撃波面が存在することによって流れ場を分割しなければならないというようなことは起こさないで済む。差分法の打ち切り誤差項が散逸的であるような工夫、あるいは衝撃波面通過のような状態変化の大きいところでは効くが他の比較的滑らかな流れ場のところでは打ち切り誤差項程度に落ちてしまうような人工粘性項の工夫などによってこれが可能になる。また極限線にも無関心でいられることは、亜音速から超音速までを含む流れ場でも全く一種類のアルゴリズムで一気に解けることを意味している。したがって迎角を持つ場合でも、勾配不連続を持つ物体でも、ひたすら空間格子の各点で同じ計算を繰り返しさえすればよい。この馬鹿みtainな手法は自動化の点で全く計算機むきである。それだけに、不用意に使うと計算機と力較べをしてしまうことも起こる。たとえば、空間分解能 $1/100$ を要求した計算を行なうとしよう。差分法の最大安定条件の下で衝撃波が2~3の格子点幅で表現されることから、少なくとも1座標方向200個の格子点、空間座標が2個なら40,000個の格子点が必要である。この場合、流れ状態量4個が各点で記憶されていなければならないから、総計160,000個の記憶用領域が入用となる。1語長演算としても160k語を rapid access memory* で確保できるような計算機はそうざらにはない。このため補助記憶媒体を使うことになるが、これが計算に著しい負担をもたらす。筆者の属する研究所の計算機 (HITAC 5020 F) システムに、この例をあてはめてみよう。ユーザ・エリア55k語のこの計算機では160k語の1/3をコアで確保するのが精一杯であるから、 Δt 1回につき3度媒体とデータ受授を行なうことになる。磁気ドラムを媒体に選ぶとしてもコア・ドラムのブロック・データ輸送に2,027 msec**, アクセス20 msecを含めると2,047 msecの間はコア・データに手をつけるような作業(差分計算)ができない***。こうして Δt ごとに6秒強、この種の計算の通常の繰り返し回数1,000 Δt では6,141秒にも達する。

筆者が用いるような差分演算では1格子点あたりのステップが860ほどあり、この計算機のギブソン・ミクス値 $1.9 \mu\text{sec}$ によれば1点あたり1.63 msec、全格

* 通常コア・メモリと呼ばれる領域をさす。

** $2/3 \times 160(\text{kW}) \times 19(\mu\text{sec}/\text{W})$

*** 媒体が磁気ディスクではほぼ1桁悪く、磁気テープを使うのはほとんどナンセンスに近い。

* 特別に f ついては可能であるが、それは数学的興味
の双曲型偏微分方程式である。

子数 40,000 では 65 秒ほどであるから、上記のような転送待ち時間はフラクシオンとしてみても無視できない。これらは高速機になるほど大きな問題であり*、この種の計算には高速かつ大型(コア容量)機でなければ経済性の犠牲を強い力較べの印象がましめる。

話を元へ戻して、このカテゴリの計算実例を示そう。アポロ・カプセルによく似た鈍頭物体の例がある²⁶⁾。(7)式による LAX の差分法が球面極座系において適用された。物体形状および計算領域などのスケッチを第5図に示しておく。空間格子は総計 24,000 点であるから、5 個の流れ量を保存するため 120 k 語の記憶場所がある。使用した計算機が IBM 7044 であったから、媒体として磁気テープが使われ定常流到達まで 150 回の繰り返し計算がなされた。その所要時間はディバックも含めて 15 時間であった²⁶⁾。

このほか鈍頭の計算は LAX-WENDROFF によるもの²⁷⁾、境界の取り扱いに工夫を払ったもの²⁸⁾、またもう少し違う原理によるもの^{29), 30)}など、代表的にみただけでもかなり試みられてきた。その多くは数時間程度の占有時間を必要とするものである。このため計算機に対して、より速く、より大容量を要求する声が上がリ、現状への不満を語ることは当然とされているかのようである。しかし、この種の解法の先覚者である RICHMYER が、“計算機の不適当さよりは数学的方法の不適当さによる制約の方が大きい。問題の特異性などの性質を良く知り、適切な公式化に持ち込むよう工夫する必要がある”とたしなめている言葉³¹⁾を味わい直すことは重要である。

第5図 迎角つき鈍頭物体まわりの流れにおける計算領域
球面極座系における $\varphi=0$ 面を示す。 φ 方向は 6° 間
隔で格子面を切っている ($\varphi=0\sim\pi$)。

* 昭和 47 年後期には国産機でもギブソン・ミクス値 0.2 μsec 程度のものが運転されるがドラムやディスクの性能はあまり変わらない。

計算機自体は量子物性工学の進歩とともにまだ早くなりうる余地を持っているし、原理的には 1,000 kW 程度のコア・メモリを制御する機械を作るのも容易である。また設計概念を変えることにより巨視的にもっと早い計算機も出現している。ここで述べたような計算では ILLIAC IV が独走的優位性を発揮する。この機械は 64 個の独立した処理装置を持っており、一つの処理装置の性能はそんなにすばらしいものではないが、これらの処理装置が並列運転されることにより驚くべき速さをみせる*。今の場合のような差分計算では、格子点を順次に追って演算を繰り返さなければならないというアルゴリズムをもったものは少なく、どこからまた何個所から手をつけ始めても差し支えないものの方が多い。だから同じ計算でも ILLIAC IV にまかせれば、大ざっぱにいて 64 倍の速さで答を出してくれると期待できる。こうして 100 時間を要した計算でも 1 時間そこそこのものになってしまうことにより、輸送過程を含むような複雑な流れでも数値解析の現実性が高められる。このようにして、時間依存解法は流れをシミュレートするという言葉に似つかわしい手法のように思われる。しかし、筆者はこの解法が定常問題の解析に利用され勝ちな点に不満を持っている。この解法が本来他の解法の守備範囲でないところにおいて活躍してこそ流れのシミュレートに恥じない内容をもつとしたいのである。とはあれ、この解法の有用性が増してくることは事実であろう。そのときわれわれが持つべき不満はわれわれの側にある機械への頼り過ぎにあると考える。もっと多くの手法が考えられ、ためされるべきであろう。そのようなことで、この解法は始まったばかりといって差し支えない。吹き出しをもつ鈍頭物体³³⁾、円柱まわりの衝撃波回折³⁴⁾などの複雑な流れの解析もわれわれの国で行なわれ始めた。

6. む す び

鈍頭問題という流体力学の局所的場面をとらえて、流れの解析がどのようにして行なわれるかの方法論の概略とそれがどのような目でみつめられているかを示す素材を提供したつもりである。このようなわずかりの問題においても筆者の経験は不十分で、とうてい物事を断定的に述べる勇氣は無い。ただ、かなりの計算時間を使った経験を持つ者の一人として、作業過程の中で考えてきたことを誌して結びとさせていただきます。

実験と計算との対比論としてよくいわれることがあ

* この結果ギブソン・ミクス値換算 5 nsec 相当の処理速度が得られている (文献 32)。

る。それは、実験は設備が無ければならぬ誰にでも使えるというものではない。人手もいる。またあらゆる条件を実験室実験では再現できないし、研究者の個性や能力あるいは経験によって良いデータを出さないという意地悪さがあると、対比論は立場があってなされると危険を自ら招くことにもなる。上記のは計算の側からであるのは明らかで、それをいい得る条件の確保なしに大きな声で主張してはならないものである。まず、何といても計算機からでてくる数字は現象自身ではない点あげられる。予想をこえた結果の出現ということは計算でも実験でも起こりうることであるが、計算の結果の場合、そのような事態の発生に対して因果関係を求めて物理的説明をほどこそうとしても無駄である。計算機にはこの世のものではないことでも、何食わぬ顔をして出てくる意地悪さがある。それを見分けることができないと計算機に愚弄されてしまう。溜々と語られた計算結果が、注意深い追試者によって単なる桁落ちの結果であったという指摘を受けた実例がある。これなどは指摘された研究における計算技術の低さが嘲笑されたにとどまらず、背景となった理論への理解度が疑われたと受けとめるべきである。たとえ理論が十分に理解されていても、これと大同小異の事態を引き起こす危険性を計算機は持っている。その素張らしい速さの故に計算過程の一つ一つを監視しているわけにはゆかない。手計算であればそれほど注意深くなくとも気付いたであろうような簡単な事ですら見逃されることもある。多くの場合、異常結果は胸ときめかす新事実の発見ではなくて、自らの経験か注意の不足の発見に終わる。

計算技術と関係して、もう一つ指摘を行ないたいことがある。それは手計算であれば到底やらないような事が平然とプログラムされているということである。それは、たとえば2で割る10で割る、あるいは定数計算といった類の細かいことやら、零要素の多い行列演算など初等的なことから始まって種々の事柄がある。要するに手計算であれば耐え難いようなことが平然と繰り返される、しかも特別な目的無しにという点である。筆者はそのようなプログラムを見ると必ずアレルギーを起こす。そこでは人智の進歩の面影は何も無く、計算機の速さにどっぴりとひたった怠惰が目につくからである。確かに計算機は速く、そして第4世代に向けて1桁以上の速さ上昇がみられそうである。われわれはその速さに見合う感覚をもって物事を見つめるべきで、上記のようなことについて(多少のムダはというような)日常生活の感覚での判断は、速さの進歩の故にもたらされる人智の退歩への前兆と受けとめるのは考え過ぎであらうか。一事が万事という

こともある。そのような感覚がもっと本質的で重要なこと、研究の philosophy にまで染みついてしまったら全ては終わりである。

計算機は正しい手続きで頼みさえすれば、いくらでも仕事を引き受けてくれ、倦むことを知らない。こうした気楽さに馴れ過ぎると、山と積まれた結果の前で人間は溜息をつくばかりという根性悪なところもある。計算機が作られ、そして進歩をしたがために起こる滑稽劇の実例は幾らもある。そうした場面において、計算計画の悪さを笑うことで済まない別の問題がある。

工学の研究の立場にあるかぎり、計算機の利用を研究の philosophy と切り離して考えることはできない。それは実験においても同様である、批判されるものは研究の基礎におかれている philosophy であって結果の合法性を争うだけで判断することは誤りであるといえよう。いつのころからか、実験家・理論家という区別があらわれて、現象観察という根本を忘れたところへ議論を持ちこむ危機を生じかけた。近ごろは、またひとつ計算家なるものが出てきて、数値実験などということを始め、もう一つの核化が起こりそうでもある。このような事態において、そして本シンポジウムの課題に答えて、それぞれが相補性をもって工学の進歩に寄与すべきだという心地良い言葉を使いたくない気持である。それが必然的結論として得られるだけの経過をわれわれが踏んではいけないと考えるからである。

参考文献

- 1) VAN DYKE, M. D.: The Supersonic Blunt-Body Problem-Review and Extension, JASS, 25, 1958, pp. 485-496.
- 2) VAN DYKE, M. D. and GORDON H. D.: Supersonic Flow Past a Family of Blunt Axisymmetric Bodies, NASA TR R-1, 1959.
- 3) FULLER, F. B.: Numerical Solutions for Supersonic Flow of an Ideal Gas Around Blunt Two-Dimensional Bodies, NASA TN D-791, 1961.
- 4) 安喜隆幸: 鈍頭物体の先端付近における非平衡流, 日本航空学会誌, 第13巻, 第140号, 昭和40年9月.
- 5) 河本巖: 鈍い頭部を有する円筒物体まわりの超音速流れ, 航空宇宙技術研究所報告 TR-199, 昭和45年6月.
- 6) GARABEDIAN, P. R. and LIEBERSTEIN, H. M.: On the Numerical Calculation of Detached Bow Shock Waves in Hypersonic Flow, J.A.S., 25, 1958, pp. 109-118.
- 7) SWIGART, R.: A Theory of Asymmetric Hypersonic Blunt-Body Flows, AIAA J. 1, 1963, pp. 1034-1042.
- 8) SWIGART, R.: Hypersonic Blunt-Body Flow Fields at Angle of Attack, AIAA J. 2, 1964, pp. 115-117.
- 9) JOSS, W. W.: Application of the Inverse Technique to the Flow Over a Blunt Body at Angle of Attack, NASA CR-445, 1966.
- 10) HAYS, W. D. and PROBST, R. F.: Hypersonic Flow Theory, 2nd. ed., Vol. 1, Inviscid Flows,

- Academic Press, 1966, pp. 391-479.
- 11) VAN DYKE, M. D.: The Blunt-Body Problem Revisited, in Proc. Internatl. Symp. on Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow, J. G. Hall, ed., Cornell Univ. Press, 1966, pp. 52-65.
 - 12) BELOTSEKOVSKIY, O. M. and CHUSHKIN, P. I.: The Numerical Method of Integral Solutions, NASA TT F-8356, 1963.
 - 13) BELOTSEKOVSKIY, O. M. and CHUSHKIN, P. I.: The Numerical Solution of Problems in Gas Dynamics, in Basic Developments in Fluid Dynamics, Vol. 1, M. Holt, ed., Academic Press, 1965.
 - 14) BELOTSEKOVSKIY, O. M., BULEKBAEV, A. and GRUDNITSKIY, V. G.: Algorithms for Numerical Schemes of Method of Integral Relations for Calculating Mixed Gas Flows, U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys., Vol. 6, No. 6, 1966, pp. 162-184.
 - 15) BELOTSEKOVSKIY, O. M. ed.: Supersonic Gas Flow Around Blunt Bodies, NASA TT F-453, 1967.
 - 16) 神元五郎, 石井隆次: Method of Integral Relationsによる鈍頭物体まわりの流れの研究, 日本航空宇宙学会誌, 第17巻, 第185号, 昭和44年6月.
 - 17) DORODNITSYN, A. A.: A Contribution to the Solution of Mixed Problems of Transonic Aerodynamics, in Advances in Aeronautical Sciences, Vol. 2, Pergamon, 1959, pp. 832-843.
 - 18) BELOTSEKOVSKIY, O. M.: Numerical Methods of Some Transonic Aerodynamics Problem, J. Comp. Phys. 5, 1970, pp. 587-611.
 - 19) UCHIDA, S. and YASUHARA, M.: The Rotational Field Behind Curved Shock Wave Calculated by the Method of Flux Analysis, JAS., 23, 1956, pp. 830-845.
 - 20) 里深信行: 圧縮性流体力学における数値計算, 日本航空宇宙学会誌, 第18巻, 第197号, 昭和45年6月.
 - 21) LAX, P. D. and WENDROFF, B.: Systems of Conservation Laws, Comm. Pure Appl. Math., 13, 1960, pp. 217-237.
 - 22) 安喜隆幸: 人工粘性付 LAX-WENDROFF およびその変形差分法に関する数値実験, 航空宇宙技術研究所報告 TR-217, 昭和45年9月.
 - 23) RICHTMYER, R. D.: A Survey of Difference Methods for Non-Steady Fluid Dynamics, NCAR TN 63-2, 1963.
 - 24) RUSANOV, V. V.: On Difference Schemes of Third Order Accuracy for Nonlinear Hyperbolic Systems, J. Comp. Phys. 5, 1920, pp. 507-576.
 - 25) BURSTEIN, S. Z. and MIRIN, A. A.: Third Order Difference Schemes for Hyperbolic Equations, J. Comp. Phys. 5, 1970, pp. 547-571.
 - 26) BOHACHEVSKY, I. O., RUBIN, E. L., and MATES, R. E.: A Direct Method for Computation of Nonequilibrium Flows with Detached shock Waves. I. Two Dimensional Flows, AIAAJ. 4, 1966, pp. 600-607, II. Axisymmetric Blunt-Body at an Angle of Attack, ibid, pp. 776-782., also AIAA paper No. 65-24, and also NASA CR-483, 1966.
 - 27) BURSTEIN, S. Z.: Finite-Difference Calculations for Hydrodynamic Flows Containing Discontinuities, J. Comp. Phys. 2, 1967, pp. 198-222.
 - 28) LAPIDUS, A.: A Detached Shock Calculation by Second-Order Finite Differences, J. Comp. Phys. 2, 1967, pp. 154-177.
 - 29) MORETTI, G. and ABBERT, M.: A Time-Dependent Computational Method for Blunt Body Flows, AIAA J. 4, 1966, pp. 2136-2141.
 - 30) MORETTI, G. and BLEICH, G.: Three-Dimensional Flow Around Blunt Bodies, AIAAJ, 5, 1967, pp. 1557-1562.
 - 31) RICHTMYER, R. D. and MORTON, K. W.: Difference Methods for Initial-Value Problems, Wiley, 1967.
 - 32) SLOTNIK, D. L.: The Fastest Computer, Scientific American, 224, No. 2, 1971, pp. 76-87.
 - 33) 広瀬直喜: 空気力学的諸問題の非定常差分法による数値計算の研究, 東京大学学位論文, 昭和46年3月.
 - 34) 安喜隆幸: 円柱まわりの衝撃波回折, 第1回および第2回流体力学講演会予稿集.

モンテ・カルロ法の応用*

Application of Monte Carlo Method

古 浦 勝 久**

Katsuhisa KOURA

高速大容量の計算機の出現により, 理論式の数値解を求める通常の方法とは異質な, 数値実験が可能になっている。数値実験は問題の素過程の設定とその生起に対する仮定により, 計算機で素過程を多数回生起させ必要な情報を得る。素過程の設定とその生起の仮定は理論および実験室実験によって検証される。モンテ・カルロ法は素過程の生起の仮定に確率論的モデルを用いる場合の数値実験法である。

数値実験は計算機の性能に大きく依存するため, 現在の計算機では限られた問題にのみ可能である。しかし, NASA における Illiac IV のような新システムによる高速大容量計算機の出現は, 数値実験の効率化とともに, 数値実験の可能な範囲を大きく拡張することが期待される。

数値実験は次の場合に有効である。

- (1) 理論, 実験室実験ともに存在しない問題
- (2) 実験室実験の存在しない問題
- (3) 理論の存在しない問題, および存在しても通

* 昭和46年9月2日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所