材料の構造解析と有限要素法*

Structural Analysis of Materials
by the Finite Element Method

(固体材料の3つの力学的モデル)

—Three Mechanical Models of Solid—

宮 本 博**

Hiroshi MIYAMOTO

1. はじめに—2つの見解—

1970年8月のIUTAMの総会はベルギーのリエージュ工大の講堂で行なわれていた。議長のKOITER教授がサイツチ頭をふりふり司会していた。書記のNIORDSON教授の英語が読経のように流れていた。議事は極めて事務的に溜々と運ばれていた。議題は1972年以後のsymposiumをどうするかという話であった。鷲津教授と小生はobserverとして後方に神妙に控えていた。

やおら独逸の代表が立ち上がった。“わが国のARGYIS教授によるとも早光弾性は有限要素法にとって代われ不用となった。然るに光弾性のsymposiumを催すのは時代錯誤ではなからうか。議長の御意見は……”という趣旨の質問である。

やや低調にみえた議場には一瞬緊張した空気が流れた。提案国のベルギーのFraeijis DE VEUBEKE教授が立って、次のような発言を行なった。“……なるほど有限要素法(FEM)は有能である。しかし光弾性が既に無用というのは言いすぎではないかと……”KOITER教授はすかさずDE VEUBEKE教授の解答を支持した。独逸の代表も敢えて自説にこだわらなかった。

かくしてベルギー提案の議題はあっ気なくパスしたが、小生にはいささか拍子ぬけであった。実はこの発言は小生にとっては大変興味深かったのもう少しつっこんだ議論を期待していた。というのは同様な議論を日本でも一度する必要があると思っていた。

9月に帰朝早々に私は英国のNottingham大学のOLLERTON博士の訪問を受けた。Nottingham大学は、英国の光弾性の中心といわれて、20数台の光弾性装置をならべて研究をしているところである。同博士の訪問の目的は、彼が只今実験中で私が日立の本堂博士と数年前に発表したポンプのインペラの光弾性実験に関する質問および討論にあった。終わって私は敢えてIUTAMの話をして彼の意見を求めた。彼の解答

は次のようなものであった。“……私のスポンサーは私にポンプ・インペラの光弾性実験を依頼すると同時に、別の人に同じ問題をFEMでも解くことを依頼している。3次元光弾性、3次元FEM単独よりは両者を比較検討してはじめて結果の正しさがより確められよう。したがって現時点では光弾性もFEMも必要である”。

私はOLLERTON博士の発言が妥当だと思う。3次元の応力、歪み分布を求める手段としてかつてはわれわれには光弾性実験が唯一の手段であったが、今やわれわれは光弾性と、FEMという2つの手段をもつ。そしてFEMのみによっては正解の上、下界をはさむことができない現在、われわれは一方によって得られた結果を他方で確かめるのがより一層良心的であろう。

これが首題に関する私の現在の解答でもある。次に私は、副題にうつろう。

2. 固体材料の3つの力学的モデル

これは構成要素の性質を知って、固体の力学的性質を推定しようという試みである。ここに私は3つのモデルを提案したい。これを表示したのが第1表である。以下これらについて順次申し上げよう。

2.1 Al粗大結晶粒のすべり線(決定論的モデル)¹⁾

試験片は巾10mm、厚さ0.8mmのJIS7号引張試験片に準じた形状を有する99.99%の純アルミニウ

第1表 3つのモデル

	モデル	例題	手法	問題点、その他
1	決定論的モデル	Al粗大結晶粒のすべり線	有限要素法	*粒界の仮定
2	確率論的モデル(その1)	多結晶金属(Al, Cu)の E, ν	有限要素法とモンテ・カルロ法	方位のランダムネス形と大きさのランダムネス結晶粒の寸法効果
3	確率論的モデル(その2)	砥石の E, ν	有限要素法とモンテ・カルロ法	2相(陶器)への応用強度への拡張

* 粒界とは結晶方位が異なっている境界と仮定する。

* 昭和46年9月14日原稿受理

** 東京大学工学部

第1図 試験片形状

ム板である (第1図)。

この試験片を前焼なまし (300℃で30分) を行なった後、約1.5%の引張歪み (引張速度 1.0 mm/min) を与え、その後歪み焼きなまし法による粗大化焼きなまし (620℃で24時間) を行なって直径10mm前後の粗大結晶粒をえた。その後ふっ化水素と蒸留水を1:19に混合した溶液中で腐食して粒界をあらわし、それを写真撮影にする。さらに紙やすり (0/6~0/10) でメチルアルコールを研摩液として研摩したあと、パフ仕上げ (酸化クロームとアルミナ) した。さらにエチルアルコールと過塩素酸を4:1に混合した溶液中で電解研摩して鏡面仕上げをする。試験片の結晶粒の結晶方位を決定するため背面ラウエ真写を用いた (第2図)。以上のようにして作製した試験片をインストロン形のオートグラフ IS-5000 で引張試験を行ない、すべり線が試験片表面に認められるまで引張る (引張速度は 0.5 mm/min)。試験片表面は金属顕微鏡によりすべり線などの観察を行ない、必要に応じて写真撮影を行なった (第3図)。

第2図(a) 粗大結晶粒試験片 No. 1

第2図(b) 粗大結晶粒試験片 No. 2

第3図(a) 第4図(a)のAの部分に発生したすべり線

第3図(b) 第4図(b)のAの部分に発生したすべり線

第4図は結晶粒界の形状をスケッチしたものである。図中の番号は結晶粒を表わすためにつけられた番号である。なおすべり線の発生状況も示してある。第3図(a)は第4図(a)のすべり線の写真を示す。試験片の側面となす角は 107.0°であった (第4図(b)の場合は 41.0°)。第5図は(a), (b)の試験片の結晶粒の結晶方位を規準三角形内の点で示したものである。

計算にあたっては、第4図の点線ではさまれた部分を取りだし、それを第6図(a), (b)に示すように三角柱で分割する。この試験片(a)に使用した要素数 297, 節点数 352, 試験片(b)で要素数 344, 節点数である。

そして“すべり線が何処で、どの方向に発生する

第4図(a) 試験片 No. 1 の概略図

第4図(b) 試験片 No. 2 の概略図

第5図

か”について解析を行なった。すなわち純 Al の弾性係数 c_{ij} , 方向余弦 (背面ラウエ法によって結晶粒の結晶方位を決定) を使って, 異方非均質体の解析を行なう。

第7図に, 試験片のある結晶粒の結晶方向にそって取った局所座標系 (x', y', z') と試験片全体について取った基準座標系 (x, y, z) の関係を示す。この時結晶粒内に存在する三角柱要素の基準座標系に関する応力 $\{\sigma\}$ と歪み $\{\epsilon\}$ の関係は式(1)で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D^*] \{\epsilon\} \quad (1)$$

ただし,

$$[\Phi] = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ l_1 l_2 & m_1 m_2 & n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ l_2 l_3 & m_2 m_3 & n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ l_3 l_1 & m_3 m_1 & n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここに $l_1, m_1, n_1, \dots$ は基準座標系に対する局所座標系の方向余弦である。式(2)が考えている結晶粒に含まれる三角柱要素の基準座標系に関する弾性応力-歪マトリックスである。

つぎに試験片表面に最初にすべり線の発生する場所とその方向の計算法について述べる (この計算は弾性計算であるから, 厳密に言えば最初に一本のすべり線が発生するまでしか適用できない)。

Al のような FCC 金属ではすべり面は $\{111\}$ 面であり, すべり方向は $\langle 110 \rangle$ 方向である。 $\{111\}$ 面は4

第6図(a) 試験片 No. 1 の三角柱要素への分割

第6図(b) 試験片 No. 2 の三角柱要素への分割

第7図 基準座標系と局所座標系

$$[D^*] = [\Phi]^T [c] [\Phi] \quad (2)$$

で $[c]$ は Al 単結晶の弾性係数である。

$$[c] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$[\Phi]$ は歪み $\{\epsilon\}$ を局所座標系に関する歪み $\{\epsilon'\}$ に変換するマトリックスである。

つあり, $\langle 110 \rangle$ 方向は3つあるから, すべり系は12組となる。すべり線の発生条件としては, 最大分解せん断応力がある値に達したらすべるとする。1つの三角柱要素の局所座標系に関する応力 $\{\sigma'\}$ より12個の分解せん断応力が算出される。試験片全体の解析に使用している三角柱要素の数を N とすると, $12N$ 個のすべり系と分解せん断応力が存在する。すべり線が最初に発生する場所は $12N$ 個の分解せん断応力のうち, 最大の値を与える要素である。またその要素とすべり面がわかると, 試験片表面にあらわれるすべり線が試

第8図 試験片表面に現われたすべり線と x 軸のなす角

験片側面となす角度 (第8図) は次式で計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(-\frac{l_1 + l_2 + l_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right) && \text{すべり面 } a \text{ (第1象限)} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(-\frac{-l_1 + l_2 + l_3}{-m_1 + m_2 + m_3} \right) && \text{すべり面 } c \text{ (第2象限)} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(-\frac{-l_1 - l_2 + l_3}{-m_1 - m_2 + m_3} \right) && \text{すべり面 } b \text{ (第3象限)} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(-\frac{l_1 - l_2 + l_3}{m_1 - m_2 + m_3} \right) && \text{すべり面 } d \text{ (第4象限)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

荷重条件は両端に等分布荷重が作用するとした。また弾性係数 c_{ij} は

$$c_{11} = 12,543 \text{ kg/mm}^2$$

$$c_{12} = 7,220 \text{ kg/mm}^2$$

$$c_{44} = 3,151 \text{ kg/mm}^2$$

を使用した。

試験片表面に最初にすべり線を発生する場所とその方向の実験と計算の比較を第2表に示す。両者の一致は良好である。なお実験の場合、試験片表面に最初に認められたすべり線は一応肉眼で見分けることのできる範囲のもので、単一のすべり線を見分けることは無理である。また計算も弾性計算であるが、この実験で取り扱った変形量の範囲〔最終荷重：試験片(a) 3.6 kg ($\sigma_s = 1.15 \text{ kg/mm}^2$), (b) 3.75 kg ($\sigma_s = 1.51 \text{ kg/mm}^2$)〕では、かなりすべり線が生じても十分近似できるようなのである。またこの結果から粒界の評価 (第1表の*) はこの場合は一応妥当と考えられる。

2.2 多結晶金属の弾性係数¹⁾ (確率論的モデル—その1) 多結晶金属は多数の結晶粒からなっていて巨視的には等方均質とみなせる。多結晶の挙動を単結晶のそれを結びつける試みは古くからなされている。そのためには²⁾

第2表 すべり線が最初に現われる場所とその方向

		すべり線が最初に現われる所	すべり線が側面となす角度
No. 1	有限要素法	207 番の要素	109.2°
	実験	207 番の要素付近	107.0°
No. 2	有限要素法	228 番の要素	44.5°
	実験	228 番の要素付近	41.0°

(1) 単結晶の性質の測定値

(2) 多結晶体の条件

① 粒界の性質

② 結晶粒の挙動と単結晶試料での測定結果の異同

③ 結晶粒の相互作用

(3) 集合組織についての情報

(4) (1)~(3)に基づく平均操作

(5) 多結晶体の性質の測定値

の5つの段階を考えることが必要であるとされている。ここでは(4)の平均操作の代わりに、個々の結晶粒の挙動を有限要素法を応用して追求した上で多結晶体の性質を論じる。

この際問題となるのは結晶粒の形と結晶粒界のモデル化である。後者については2.1に従った (第1表の*)。前者については2つの方法を試みた。1つは結晶粒の形はすべて正六角柱と考え、その方位のみランダムと仮定する。したがって形や大きさのランダムは入らない。もう1つは形も方位もランダムの場合である。すなわち結晶の核を考えている領域 (例題では短形領域) 上にばらまいて、結晶粒はその核から等速度で周囲に成長すると仮定し、その成長圏の交りが結晶粒界になると考える (陣取り遊び)。これによって結晶粒の形がきまるので方位はモンテ・カルロ法によって与える。Al および Cu のヤング率 E とポアソン比 ν の計算を行なった。第9図のように正六角柱要素を矩形の中に規則正しく配列させ、方位はモンテ・カルロ法でランダムに与える。解析は有限要素法で行なった。

式(6)は結晶方位を与える式である。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\beta\alpha' + \alpha\gamma\beta'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\alpha\alpha' - \beta\gamma\beta'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \beta'\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \frac{\beta\beta' - \alpha\gamma\alpha'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & -\frac{\alpha\beta' + \beta\gamma\alpha'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \alpha'\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \quad (6) \end{aligned}$$

第9図 正六角柱の結晶粒より成る試験片

ここに,

(α, β, γ) : 3次元の単位ベクトル

(α', β') : 2次元の単位ベクトル である.

ヤング係数 E の計算は右端面の変位を平均した $\bar{u}$ より式(7)で, ポアソン比は式(8)より求める.

$$E = \frac{l\sigma}{\bar{u}} \quad (7)$$

$$\nu_x = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}, \quad \nu_z = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} \quad (8)$$

ここに l は試験片の長さである.

第3表は計算値と実験値を比較したもので, 両者は良く一致している.

次に陣取り法によって結晶の形と大きさにもランダムネスを与えた場合の結果を示す. 第10図は結晶粒界の作り方を示す. 第11図(a), (b), (c)は平均粒度を変えて寸法効果をチェックしたものである. (第12図).

2.3 砥石材料の弾性係数³⁾(確率論モデル—その2)

砥石材料は砥粒と結合剤と空孔の3相からなっている. 第13図はその電子顕微鏡写真であり第14図はそ

第3表 ヤング係数 E とポアソン比

Aluminum: Experimental Values $E=7,200$, $\nu=0.34$

Elastic Modulus	Number of Data	Mean Value	Standard Deviation	Coefficient of Variation	
Young's Modulus	10	7,237	2.50×10^2	0.03	
Poisson's Ratio	ν_x	10	0.35	1.16×10^{-2}	0.03
	ν_z	10	0.34	1.17×10^{-2}	0.03

Copper: Experimental Values $E=12,500$, $\nu=0.34$

Elastic Modulus	Number of Data	Mean Value	Standard Deviation	Coefficient of Variation	
Young's Modulus	25	13, 278	9.25×10^3	0.07	
Poisson's Ratio	ν_x	25	0.36	6.93×10^{-2}	0.19
	ν_z	25	0.35	7.00×10^{-2}	0.20

dimension kg/mm².

第10図 陣取り法による結晶粒の作り方

のスケッチである. 今これを2種類の構成要素によって理想化する. 第1の要素は砥粒を結合剤で包んだもの (G-B 要素), 第2の要素は空孔を結合剤で包んだもの (P-B 要素) であり (第15図), これらの2種類の要素をランダムに配列することによって巨視的な砥石構造のモデルとする (第16図). 今このモデルに円

第11図(a) 結晶粒の平均体積 $\bar{V}=10$ の場合の試験片

第11図(b) 結晶粒の平均体積 $\bar{V}=40/3$ の場合の試験片

第11図(c) 結晶粒の平均体積 $\bar{V}=80/3$ の場合の試験片

第12図 平均体積 $\bar{V}$ とヤング係数 E の関係

第13図 ビトリファイド研削低石の表面写真 (×40
原図を約 1/3 に縮小, 走査型電子顕微鏡による)

第14図 低石のマクロな構造の2次元模式図

第15図 低石模型を構成する2要素

板を介して圧縮転重を加えるとする。

まず低粒と結合剤のヤング係数とポアソン比から G-B 要素および P-B 要素の等価ヤング係数, 等価ポアソン比を計算する。

ヤング係数は荷重に対する上下両端面の変位量の比として, またポアソン比は両自由側面間の横方向変位

第16図 低石模型の構造

LOADING DIRECTION

第17図 一軸圧縮状態下における模型の変形

量に対する上下端面間の変位量の比として定義する。第17図は載荷による変形を示し, 第18図は計算の流れ図を示す。

第19図, 第4表は計算値と実験値を比較したものである。

第20図は3種類の典型的配列の例である。モデル内に引いた線は載荷両端面内で2種類の要素のうちで剛性の大きな G-B 要素が連続して配列している場所を示したものであるが, この線の本数とヤング係数 ($\bar{E}$) の大きさに密接の関係のあることが解る。これから $\bar{E}$ に関する上限と下限の推定がつく。すなわち上限は載荷両端面間を G-B 要素が連続して並べるだけ並んだ配列によって与えられ, 逆に下限は端面間を連続して結ぶ要素がなく, 両自由側面間を P-B 要素が連続して並べるだけ並ぶ配列によって与えられる。一

第4表 ヤング係数とポアソン比の実験と計算結果

Elastic Modulus	Data Group	Remarks	Number of Data	Mean Value	Standard Deviation	Coefficient of Variation
Dimension				$\times 10^3 \text{ kg/cm}^2$	$\times 10^4 \text{ kg/cm}^2$	
Young's Modulus	Numerical	196 el.	30	4.65	3.05	0.07
	Experimental	Bending	26	4.65	2.93	0.06
		Compression	16	5.07	2.84	0.06
		Tension	8	5.28	1.61	0.03
Poisson's Ratio	Numerical	196 el.	30	0.17	2.54×10^{-3}	0.15
		441 el.	15	0.18	9.16×10^{-3}	0.05
	Experimental	Compression	16	0.19	4.89×10^{-3}	0.03
		Tension	8	0.19	9.52×10^{-3}	0.05

第18図 計算の流れ図

第19図 ヤング係数(E)の実験と計算との比較

般に複合材料の有効弾性係数の上限は並列モデル、下限 $\bar{E}_L$ は直列モデルによって与えられ、この範囲外の値をとることはない。

上述の砥石では $\bar{E}_V = 1.63 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\bar{E}_L = 0 \text{ kg/mm}^2$ となりわれわれのモデルの上下限の巾よりもさらに大きくなる。いずれにしても $\bar{E}$ の大なモデルの要素の配列は並列モデルに近づき、 $\bar{E}$ の小なモデルの要素の配列は直列モデルに近づくことが解る(第21図)。

3. おわりに一極めて平凡な結論一

私の話は必しも首尾一貫していない。それは初めに

第20図 有効ヤング係数(E)と要素配列との関係

第 21 図 有効ヤング係数と模型構造との関係

現状では FEM と光弾性の両立することを必要とすることを述べた。

そして次には FEM を使って固体材料の巨視的性質をその構成要素の性質に戻って推定できそうだとすることを述べた。しかしここでは計算の可能性を示したつもりで、固体材料の（できれば）総ての機械的性質を推定できるとはっていない。その主なる理由は私の考えでは—ハード・ウェア、すなわち材料の物理的性質に関する（実験的）知識がないことに基因すると思う（例をあげれば結晶粒界の性質が、計算を可能にする形では与えられていない）。ソフトウェアの計算はできるようになったがハード・ウェアがないということ、あるいは少ないということを使うのである。

すなわち、私の申し上げたいのは、ソフト・ウェア（有限要素法）とハード・ウェア（光弾性実験）の両立ということである。ここで私の論点は一貫性を持たせたつもりである。残念ながら極めて常識的当たりさわりのない結論でしかありえないが。

文 献

- 1) 宮本博, 白鳥正樹, 三好俊郎, 大藤誠: 金属材料の機械的挙動のシミュレーション, 日本機械学会誌, 74巻, 624号, pp. 53-63.
- 2) 大久保忠恒: 塑性と加工, 11巻, 111号, pp. 223-230.
- 3) 宮本博, 石島洋二, 本間森二: 研削砥石の機械的挙動に関するシミュレーション, 日本鋼構造協会, 第5回大会研究集会, マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 378-385.

節点法による温度解析*

Temperature Analysis by the Thermal Nodal Method

大 島 耕 一**

Koichi OSHIMA

要 約

いわゆる節点法による温度解析法の精度を、ある人工衛星模型のスペース・チェンバー試験結果から統計的に解析することを検討し、最もよい節点系の作り方についての一般的指標がえられた。またこのようにして得られる数学模型を利用して、計算された温度分布を観測値と比較することにより、その模型の推定精度を検定した。この結果、内部機器に対して、仮想的な外被構造を仮定し、あまり多くない節点をもった系の模型が最高であり、その推定温度の標準誤差は、約

3.2 度であった。

1. は し が き

人工衛星などの複雑な系の温度設計をする際には、いわゆる節点法と呼ばれる方法が広く行なわれている。この方法は、対象物上に、適当な数の点を選び、それぞれの点に対して、定まった量の熱容量と、熱入力を与え、一方、それぞれの点相互の熱伝達率を、何らかの方法で決定し、これらのパラメーターを使って、各節点についての熱量平衡の式を連立させて、各点の温度を求めようとするものである^{1)~3)}。この方法は、他に適当な方法がなく、スペース・チェンバーなどによる実験も信頼度の高い資料を与えないことなど

* 昭和 46 年 12 月 16 日原稿受理

** 東京大学宇宙航空研究所