は望ましくない。脚の緩衝特性も空力特性ほどではないが大きな影響力をもつ。そのうち前脚と主脚との剛性の比が重要である。前脚の剛性が過大のものは不利である。緩衝装置の減衰度の大きいかんは大きな影響をもたない。

6) 跳躍運動の安定性を増すためには着陸時の減速性を大きくするとともに着地直後に揚力を減殺する装置をもつことが有効である。フライト・スポイラのブレーキ転用はその一つの典型と考えられる。

追記 本論文の作製にあたって御指導を賜った池田健先生、有益な助言をして下さった鷺津東大教授、

市川輝雄技官(航技研)、アナログ計算機による計算をして下さった岡遠一技官(航技研)に厚く御礼申し上げます。

なお、本論文の詳細については航技研報告を参照されたい。

参考文献

- 1) HALL, H. and BUTTON, C. B.: Operational and Theoretical Studies on the Effect of Pilot Action on Heavy Landing. : C. P. No. 1119, Dec. 1969.
- 2) 荒木浩: 飛行機の滑走中の不安定振動について, 日本航空学会誌, 第9巻87号, 1961.

鈍頭物体の淀み点近傍における実在気体流れ*

第1報 平衡流

斎 田 暢 三**

Real Gas Flow near the Stagnation Point of Blunt Nosed Bodies

Part 1 Equilibrium Flow

Nobumi SAIDA

Abstract

This paper presents an approximate solution for the equilibrium inviscid flow in the shock layer about the stagnation region of a blunt body generating a spherical shock wave. With the assumptions of thin shock layer and strong shock, the flow variables are expanded in series in powers of the ratio of the density ahead of the shock to that behind the shock (ϵ). The results are obtained in closed formulae to second order in ϵ . The effects of altitude and velocity enter solely through the normal-shock density ratio appropriate to the flight conditions. Comparison of the present results with those based upon an exact numerical solution shows reasonable agreement.

1. ま え が き

極超音速速度で飛行する鈍頭物体は、その前方に強い離脱衝撃波をとめない、この衝撃波後では高温のために空気分子の振動モードの励起や解離、さらに電離などの実在気体効果を伴う流れとなる。したがって物体頭部への熱伝達や衝撃層内の流れの場を計算するにあたっては、これらの実在気体効果による影響を知る

必要がある。

実在気体を取り扱う場合、気体を構成している分子の内部運動エネルギーと並進運動エネルギーが分子間の衝突によって釣り合った状態に達するまでの時間(緩和時間)が問題になる。2原子分子の回転運動の緩和時間は非常に短いので回転運動は常に熱的平衡にあると考えて差し支えない。しかし振動の励起や解離の緩和時間は、飛行条件や物体の大きさによっては流れの代表的時間と同一のオーダーになる場合もあり、したがって平衡な流れと非平衡な流れとが考えられる。

本論文では熱的および熱化学的に平衡な流れについて論ずる。この種の問題についての従来の研究では数値計算による方法が多く行なわれてきた^{1)~3)}。しかし問題を大ざっぱに把握し、現象を理解するには解析的な手法が便利である。その一つとして定密度解⁴⁾はこの種の問題に適しているが大きな密度の変化を伴う非平衡流の解析への拡張には適さない。

本論文では、鈍頭物体の淀み点近傍の流れへの実在気体効果による影響を簡潔に求めることを主目的とし、衝撃波は球状で十分に強く、衝撃層も十分に薄いと仮定する。第1報においては熱的および熱化学的に平衡な流れについて論じ、第2報においては熱的非平衡流について論ずる。

* 昭和45年11月第2回流体力学講演会にて講演。昭和46年9月11日原稿受理

** 青山学院大学理工学部

2. 基礎方程式と境界条件

ここでは球状の衝撃波をとまなう鈍頭物体まわりの軸対称流れを考えることにする。流れを極座標 (r, θ) で表わせば(第1図), 質量, 運動量とエネルギー保存の方程式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho u r^2) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v r \sin \theta) = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\rho v^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\rho u v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} - u \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

ここで u, v はそれぞれ r, θ 方向の速度成分であり, ρ は密度を, p は圧力を, h は比エンタルピーを表わし, それぞれ主流での速度 U_∞ , 密度 ρ_∞ , $\rho_\infty U_\infty^2$ と U_∞^2 で無次元化されたものである。また長さは衝撃波の曲率半径 R_s で無次元化されたものを使うことにする。

いまの状態に対する境界条件はつぎのようになる。

物体表面上では法線方向の速度成分が零であることから

$$u_s - v_s \frac{(dr_s/d\theta)}{r_s} = 0$$

ここでは極超音速流の場合について考えているので衝撃波は物体に非常に接近しており, 特に淀み点の近傍のみを考えるので物体も衝撃波と同じ形状をしていると見做して差し支えない。したがって

$$u_s = 0 \quad (5)$$

で近似することにする。

衝撃波上では, 波面が球状であり, さらに **strong shock** の条件がみたされているものと仮定すれば, 波面上でつぎの関係が成立する。

$$u_s = -\epsilon \cos \theta, \quad v_s = \sin \theta$$

$$(\text{rot } \mathbf{q})_s = \epsilon^{-1}(1-\epsilon)^2 \sin \theta$$

第1図 極座標系

$$p_s = (1-\epsilon) \cos^2 \theta, \quad h_s = \frac{1}{2}(1-\epsilon^2) \cos^2 \theta \quad (6)$$

ここで $\mathbf{q}$ は合成速度を, ϵ は衝撃波前後の密度比 $1/\rho_s$ を表わし, $\epsilon \ll 1$ である。また添字 b は物体表面上の条件を, 添字 s は衝撃波直後の条件を表わす。

3. 流体力学的な方程式の解

3.1 基礎方程式の単純化 ここでは極超音速流中におかれた球状衝撃波をとまなう鈍頭物体の淀み点近傍の流れを考えることにするので, つぎのように仮定することができる。

i) 衝撃層は十分に薄い。

ii) 淀み点の近傍では物体も衝撃波と同じ中心をもった球と見做せる。

iii) 衝撃波は十分に強く, $\epsilon \ll 1$ で **strong shock** の仮定が成り立つ。

あたらしい独立変数 y を次式によって定義する。

$$y = 1 - r \quad (7)$$

いま従属変数 u, v, p, ρ と h の θ 方向の変化を, 衝撃波上での条件(6)式と比較することによってつぎの級数で近似できるものとする。

$$\left. \begin{aligned} u(y, \theta) &\sim -u_1(y) \cos \theta + \dots \\ v(y, \theta) &\sim v_1(y) \sin \theta + \dots \\ p(y, \theta) &\sim p_1(y) \cos^2 \theta + p_2(y) \sin^2 \theta + \dots \\ \rho(y, \theta) &\sim \rho_1(y) + \dots \\ h(y, \theta) &\sim h_1(y) \cos^2 \theta + h_2(y) \sin^2 \theta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8)式を(1)~(4)式へ代入し, 三角関数の同べきの項を零とおくことによって y についてつぎの常微分方程式系を得る。なお衝撃層が十分に薄いことから方程式内では $r \approx 1$ と仮定した。

$$\frac{d}{dy}(\rho_1 u_1) + 2\rho_1(v_1 - u_1) = 0 \quad (9)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{du_1}{dy} + \frac{dp_1}{dy} = 0 \quad (10)$$

$$\rho_1 u_1 v_1 - \rho_1 v_1^2 - \frac{dp_2}{dy} = 0 \quad (11)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{dv_1}{dy} + \rho_1 v_1^2 - \rho_1 u_1 v_1 - 2p_1 + 2p_2 = 0 \quad (12)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{dh_1}{dy} - u_1 \frac{dp_1}{dy} = 0 \quad (13)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{dh_2}{dy} - u_1 \frac{dp_2}{dy} + 2\rho_1 v_1(h_2 - h_1) - 2v_1(p_2 - p_1) = 0 \quad (14)$$

対応する境界条件も(8)式を(6)式へ代入することによって得られる。

$$u_{10}=0 \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \epsilon, \quad v_1 = 1, \quad \left(\frac{dv_1}{dy} \right)_s = -\epsilon^{-1} + 3 - 2\epsilon \\ p_1 &= 1 - \epsilon, \quad p_2 = 0, \quad h_1 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon^2) \\ h_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

いま y および u を

$$\eta = \int_0^y \rho_1 dy, \quad w_1 = \rho_1 u_1 \quad (17)$$

によって変換すれば, (9)~(14)式は

$$w_1' + 2(v_1 - u_1) = 0 \quad (9a)$$

$$w_1 u_1' + p_1' = 0 \quad (10a)$$

$$u_1 v_1 - v_1^2 - p_2' = 0 \quad (11a)$$

$$w_1 v_1' + v_1^2 - u_1 v_1 - 2p_1/\rho_1 + 2p_2/\rho_1 = 0 \quad (12a)$$

$$w_1 h_1' - u_1 p_1' = 0 \quad (13a)$$

$$w_1 h_2' - u_1 p_2' + 2v_1(h_2 - h_1) - 2v_1(p_2 - p_1)/\rho_1 = 0 \quad (14a)$$

となる。ここでダッシュは η についての微分を表わす。境界条件は

$$w_{10}=0 \quad (15a)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 1, \quad v_1 = 1, \quad \epsilon^{-1}(v_1')_s = -\epsilon^{-1} + 3 - 2\epsilon \\ p_1 &= 1 - \epsilon, \quad p_2 = 0, \quad h_1 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon^2), \quad h_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

となる。

各変数のオーダーは (16a) 式や物体表面上でのニュートン圧等から推定すれば

$$\begin{aligned} w_1 &\sim O(1), \quad u_1 \sim O(\epsilon), \quad v_1 \sim O(1), \quad \rho_1 \sim O(\epsilon^{-1}) \\ p_1 &\sim O(1), \quad p_2 \sim O(1), \quad h_1 \sim O(1), \quad h_2 \sim O(1) \\ \eta &\sim O(1) \end{aligned}$$

である。したがって流れの変数をつぎのような ϵ のべき級数に展開できるものとする。

$$\left. \begin{aligned} u_1(\eta) &\sim \epsilon u_{10}(\eta) + \epsilon^2 u_{11}(\eta) + \dots \\ v_1(\eta) &\sim v_{10}(\eta) + \epsilon v_{11}(\eta) + \dots \\ w_1(\eta) &\sim w_{10}(\eta) + \epsilon w_{11}(\eta) + \dots \\ p_1(\eta) &\sim p_{10}(\eta) + \epsilon p_{11}(\eta) + \dots \\ p_2(\eta) &\sim p_{20}(\eta) + \epsilon p_{21}(\eta) + \dots \\ h_1(\eta) &\sim h_{10}(\eta) + \epsilon h_{11}(\eta) + \dots \\ h_2(\eta) &\sim h_{20}(\eta) + \epsilon h_{21}(\eta) + \dots \\ \rho_1(\eta) &\sim \epsilon^{-1} \rho_{10}(\eta) + \rho_{11}(\eta) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(18)式を(9a)~(16a)式へ代入し, ϵ について同べきの項をまとめて零とおくことによって近似方程式系と対応する境界条件を得る。

第1近似方程式

$$w_{10}' + 2v_{10} = 0 \quad (19a)$$

$$p_{10}' = 0 \quad (20a)$$

$$v_{10}^2 + p_{20}' = 0 \quad (21a)$$

$$w_{10}v_{10}' + v_{10}^2 = 0 \quad (22a)$$

$$h_{10}' = 0 \quad (23a)$$

$$w_{10}h_{20}' + 2v_{10}(h_{20} - h_{10}) = 0 \quad (24a)$$

境界条件

$$w_{10}(\eta_b^{(0)}) = 0 \quad (25a)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{10}(0) &= 1, \quad v_{10}(0) = 1, \quad v_{10}'(0) = -1 \\ p_{10}(0) &= 1, \quad p_{20}(0) = 0, \quad h_{10}(0) = \frac{1}{2}, \quad h_{20}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

第2近似方程式

$$w_{11}' + 2v_{11} = 0 \quad (19b)$$

$$w_{10}w_{10}' + p_{11}' = 0 \quad (20b)$$

$$w_{10}v_{10} - 2v_{10}v_{11} - p_{21}' = 0 \quad (21b)$$

$$w_{10}v_{11}' + v_{10}'w_{11} + 2v_{10}v_{11} - w_{10}v_{10} - 2p_{10} + 2p_{20} = 0 \quad (22b)$$

$$h_{11}' = 0 \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} w_{10}h_{21}' + w_{11}h_{20}' - w_{10}p_{20}' + 2v_{10}(h_{21} - h_{11}) \\ + 2v_{11}(h_{20} - h_{10}) - 2v_{10}(p_{20} - p_{10}) = 0 \end{aligned} \quad (24b)$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} w_{11}(0) &= 0, \quad v_{11}(0) = 0, \quad v_{11}'(0) = 3 \\ p_{11}(0) &= -1, \quad p_{21}(0) = 0, \quad h_{11}(0) = h_{21}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26b)$$

なお連続の方程式(9a)式においては, 各項のオーダーの推定より $v_1 \gg u_1$ であるので, (9a) 式の u_1 の項を無視して(19a), (19b)式を導いた。また第2近似方程式においては, 後述されているように第1近似解で $\rho_{10} \approx p_{10} = 1$ となるので u_{10} を w_{10} で近似した。

3.2 第1近似解 (22a) 式を η について微分し, (19a)式を使って整理すれば, $w_{10} \neq 0$ であることから

$$v_{10}'' = 0$$

したがって

$$v_{10} = c_0 \eta + c_1 \quad (27a)$$

上式と(19a)式より

$$w_{10} = -c_0 \eta^2 - 2c_1 \eta + c_2 \quad (28a)$$

(20a)式より

$$p_{10} = c_3 \quad (29a)$$

(21a)と(27a)式より

$$p_{20} = -\frac{1}{3} c_0^2 \eta^3 - c_0 c_1 \eta^2 - c_1^2 \eta + c_4 \quad (30a)$$

(23a)式より

$$h_{10} = c_5 \quad (31a)$$

(24a), (19a)式より

$$h_{20}' - \frac{w_{10}'}{w_{10}} h_{20} = -\frac{w_{10}'}{w_{10}} h_{10}$$

したがって(31)式を使って積分すれば

$$h_{20} = c_6 w_{10} + c_5 \quad (32a)$$

(27a)~(32a)式の常数 $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ は境界条件(26a)式により決定される。すなわち

$$c_0 = -1, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 1, \quad c_4 = 0$$

$$c_5 = \frac{1}{2}, \quad c_6 = -\frac{1}{2}$$

したがって第1近似方程式の解はつぎの式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} v_{10} &= 1 - \eta, \quad w_{10} = (1 - \eta)^2 \\ p_{10} &= 1, \quad p_{20} = -\frac{1}{3}[1 - (1 - \eta)^3] \\ h_{10} &= \frac{1}{2}, \quad h_{20} = \frac{1}{2}[1 - (1 - \eta)^2] \end{aligned} \right\} \quad (33a)$$

球状の衝撃波に対する第1近似解での物体までの距離 $\eta_s^{(0)}$ は, (25a), (33a)式より

$$\eta_s^{(0)} = 1 \quad (34)$$

となる。

3.3 第2近似解 (22b)式を η について微分し, (33a), (19a), (19b), (21a), (22a)式を使って整理すれば

$$v_{11}'' = -1$$

したがって

$$v_{11} = -\frac{1}{2}\eta^2 + d_0\eta + d_1 \quad (27b)$$

上式と(19b)式より

$$w_{11} = \frac{1}{3}\eta^3 - d_0\eta^2 - 2d_1\eta + d^2 \quad (28b)$$

(20b)式と(33a)式より

$$p_{11} = -\frac{1}{2}w_{10}^2 + d_3 = -\frac{1}{2}(1 - \eta)^4 + d_3 \quad (29b)$$

(21b)と(33a)式より

$$p_{21} = -\frac{1}{2}\eta^4 + \frac{2}{3}(2 + d_0)\eta^3 - \frac{1}{2}(3 + 2d_0 - 2d_1)\eta^2 + (1 - 2d_1)\eta + d_4 \quad (30b)$$

(23b)式より

$$h_{11} = d_5 \quad (31b)$$

(24b)式へ(33a), (27b), (28b), (31b)を代入し, 整理すれば

$$\begin{aligned} h_{21} + \frac{2}{1 - \eta}h_{21} &= -\frac{1}{2}(1 - \eta)^2 - \left(d_0 + d_1 - \frac{1}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{1 - \eta}(d_0 + 2d_1 - d_2 + 2d_5 - 3) \end{aligned}$$

となる。したがって積分すれば

$$\begin{aligned} h_{21} &= -\frac{1}{2}\eta(1 - \eta)^2 - \left(d_0 + d_1 - \frac{1}{2}\right)(1 - \eta) \\ &+ \frac{1}{2}(d_0 + 2d_1 - d_2 + 2d_5 - 3) + d_6(1 - \eta)^2 \end{aligned} \quad (32b)$$

(27b)~(32b)式の常数 $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ は境界条件(26b)式により決定される。すなわち

$$d_0 = 3, \quad d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = 0$$

$$d_3 = -\frac{1}{2}, \quad d_6 = \frac{5}{2}$$

したがって第2近似方程式の解はつぎの式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} v_{11} &= -\frac{1}{2}\eta^2 + 3\eta, \quad w_{11} = \frac{1}{3}\eta^3 - 3\eta^2 \\ p_{11} &= -\frac{1}{2}[1 + (1 - \eta)^4] \\ p_{21} &= -\frac{1}{2}\eta^4 + \frac{10}{3}\eta^3 - \frac{9}{2}\eta^2 + \eta \\ h_{11} &= 0, \quad h_{21} = -\frac{1}{2}\eta(1 - \eta)(6 - \eta) \end{aligned} \right\} \quad (33b)$$

第2近似まで考慮した流れの変数は, (18), (33a, b)式によってつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} v_1(\eta) &\sim (1 - \eta) + \epsilon\left(3 - \frac{1}{2}\eta\right)\eta + \dots \\ w_1(\eta) &\sim (1 - \eta)^2 - \epsilon\left(3 - \frac{1}{3}\eta\right)\eta^2 + \dots \\ p_1(\eta) &\sim 1 - \frac{1}{2}\epsilon[1 + (1 - \eta)^4] + \dots \\ p_2(\eta) &\sim -\frac{1}{3}[1 - (1 - \eta)^3] \\ &+ \epsilon\left[1 - \frac{9}{2}\eta + \frac{10}{3}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3\right]\eta + \dots \\ h_1(\eta) &\sim \frac{1}{2} + \dots \\ h_2(\eta) &\sim \frac{1}{2}[1 - (1 - \eta)^2] - \frac{1}{2}\epsilon(1 - \eta) \\ &\times (6 - \eta)\eta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

また第2近似まで考慮したときの衝撃波から物体までの距離, すなわち衝撃波の離脱距離 η_s は(15a)式により

$$\begin{aligned} w_{1s} &= w_1(\eta_s) \sim (1 - \eta_s)^2 - \epsilon\left(3 - \frac{1}{3}\eta_s\right)\eta_s^2 + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

または

$$\eta_s^3 + \frac{3(1 - 3\epsilon)}{\epsilon}\eta_s^2 - \frac{6}{\epsilon}\eta_s + \frac{3}{\epsilon} = 0 \quad (36)$$

を満足する η_s を求めればよい。

以上により流れの変数が η の関数として求められたのでつぎに完全気体と熱的および熱化学的に平衡な場合についての η と y の関係を導けば, 流れの変数と y の関係が得られる。

4. 完全気体

完全気体の場合、状態方程式は

$$p = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \rho h \quad (37)$$

で与えられる。ここで γ は定圧比熱と定積比熱の比を表わし一定の値である。

(8)式によって

$$p_1 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \rho_1 h_1$$

一方衝撃波直後でも上式が成立するので(16a), (35)式を使って

$$\rho_1 = \rho_{1s}, \quad \frac{h_1}{p_1} = \frac{p_1}{\rho_{1s}}, \quad \frac{p_1}{\rho_{1s}} = \frac{1}{\epsilon(1-\epsilon)} p_1$$

したがって

$$\rho_1(\eta) = \frac{1}{\epsilon(1-\epsilon)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \epsilon [1 + (1-\eta)^4] \right\} \quad (38)$$

(17)式によって

$$y = \int_0^\eta \frac{1}{\rho_1} d\eta \quad (39)$$

であるから(38)式を代入すれば

$$y = \frac{\epsilon(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)a} \left\{ \tan^{-1} \frac{a\eta}{1+a^2(1-\eta)} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \left[\frac{1-a(1-\eta)}{1+a(1-\eta)} \right] \right\} \quad (40)$$

となる。ここで $a^4 = \epsilon/(2-\epsilon)$ である。

また衝撃波の離脱距離 δ_0 は(40)式の η へ(36)式から求めた η_s を代入すれば得られる。

$$\delta_0 = \frac{\epsilon(1-\epsilon)}{(2-\epsilon)a} \left\{ \tan^{-1} \frac{a\eta_s}{1+a^2(1-\eta_s)} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \left[\frac{1-a(1-\eta_s)}{1+a(1-\eta_s)} \right] \right\} \quad (41)$$

(40), (41)式には逆三角関数や対数関数を含み取り扱いにくい。が $a^4 \ll 1$ であることより $1/\rho_1$ を $\epsilon/(2-\epsilon)$ のべき級数に展開してつぎの式で近似することもできる。

$$y = \frac{2\epsilon(1-\epsilon)}{2-\epsilon} \left\{ \eta + \frac{1}{5} \left(\frac{\epsilon}{2-\epsilon} \right) [1 - (1-\eta)^5] + \frac{1}{9} \left(\frac{\epsilon}{2-\epsilon} \right)^2 [1 - (1-\eta)^9] + \dots \right\} \quad (40a)$$

衝撃層内が一定密度と見做せる場合には(39)式より

$$(\delta_0)_{\text{一定密度}} = \epsilon \eta_s \quad (42)$$

となる。

なお物体の曲率半径 R_s を基準長とした衝撃波の離脱距離 $\Delta_0 (\equiv \delta_0/R_s)$ を求めるには $R_s = R_s + \delta_0$ と仮定することにより

$$\Delta_0 = \delta_0 \frac{R_s}{R_s} = \delta_0 (1 + \Delta_0)$$

したがって

$$\Delta_0 = \frac{\delta_0}{1 - \delta_0} \quad (43)$$

となる。

5. 熱的および熱化学的平衡流

熱的および熱化学的に平衡な空気の熱力学的な性質は非常に複雑であり、統計力学によって計算された結果は表または図によってしか表わすことができない⁵⁾。しかし実際に計算を行なう場合には簡単な近似式の方が好ましいため、多くの経験式が導かれている。W. L. BADE⁷⁾ はつぎの近似式を与えている。

$$\bar{\rho}/\bar{\rho}_e = (\bar{p}/\bar{p}_e)(\bar{h}/\bar{h}_e)^{-n} \quad (44)$$

$$n = 0.70 + 0.04 \log_{10}(\bar{p}/\bar{p}_e)$$

ここで $\bar{h}_e = 31.9 \text{ R } T_e = 600 \text{ cal/gm}$, $\bar{\rho}_e = 0.124 \bar{p}_e = 1.60 \times 10^{-4} \text{ gm/cm}^3$, $\bar{p}_e = 1 \text{ atm}$ である。上式は $31.9 \leq \bar{h}/\text{R } T_e \leq 480$, $0.1 \text{ atm} \leq \bar{p} \leq 100 \text{ atm}$ の範囲内で HANSEN の結果⁵⁾と 5% 以内の誤差で一致する。

(44)式を衝撃波直後の値で除すれば、つぎのように表わすこともできる。

$$\frac{p}{p_s} = \frac{\rho}{\rho_s} \left(\frac{h}{h_s} \right)^n \quad (45)$$

淀み流線上では

$$\frac{p_1}{p_{1s}} = \frac{\rho_1}{\rho_{1s}} \left(\frac{h_1}{h_{1s}} \right)^n$$

(35), (16a) 式より $h_1 = h_{1s} = 1/2$ であるから n に関係なく

$$\frac{p_1}{p_{1s}} = \frac{\rho_1}{\rho_{1s}}$$

したがって

$$\rho_1 = \rho_{1s}, \quad \frac{p_1}{p_{1s}} = \frac{1}{\epsilon(1-\epsilon)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \epsilon [1 + (1-\eta)^4] \right\} \quad (46)$$

となる。上式は完全気体の場合の(38)式と全く同じであるので y, δ_0 も同じようにして求めることができる。したがって完全気体と熱的および熱化学平衡気体との間の相違は衝撃波前後の密度比 ϵ の違いによるだけであり、与えられた飛行条件に対する ϵ を図から求めれば今の場合も完全気体の場合と同じようにして計算することができる。第2図は MOECKEL⁸⁾ により高度をパラメータとして M_∞ に対する ϵ を空気について計算した結果の一部である。

6. 本計算法と数値解との比較

本解析においてはつぎの手順にしたがって流れの場が計算される。

a) 与えられた飛行条件について衝撃波前後の密度比 ϵ を求める。

第2図 主流マッハ数に対する衝撃波前後での密度比
(NACA TN 3895 第2図より転載)

- b) (36)式より η_0 を計算する。
 c) (41)式より δ_0 を計算する。
 d) (40)式より η に対する y/δ_0 を計算する。
 e) (35)式によって $v_1, w_1, p_1, p_2, h_1, h_2$ を計算する。
 f) (46)式によって ρ_1 を計算する。
 g) $u_1 = w_1/\rho_1$ によって u_1 を計算する。

いま一例として $M_\infty = 10$, $T_\infty = 288^\circ\text{K}$, $p_\infty = 0.01$ atm なる条件の下で $\epsilon = 0.1298$ であるとして、衝撃波後で凍結流であるとしたときの計算結果を図に示す。なお図中 BELOTSEKOVSKII と DUSHIN による integral method の scheme II の方法によって計算した結果⁹⁾を比較のため記入した。

まず y と η の関係(40)または(40a)式はいまの計算ではその相違は見られず、また第3図に示すようにほぼ $y/\delta_0 = \eta/\eta_0$ なる関係で変化している。これより

第3図 凍結流, $\epsilon = 0.1297$ の場合の y/δ_0 と η/η_0 の関係

(35)式での流れの変数と η の関係は、近似的には流れの変数と $(\eta_0/\delta_0)y$ の関係と見做せる。同一の ϵ について数値解と本計算法による結果とを比較すれば、第5図より u_1 は中間でわずかに小さく、第6図より ρ_1 はほぼ中間からわずかに大きく、また第7図より p_1 は反対にわずかに小さい。第4図は衝撃層内での接線方向の速度成分を示すものであり、第2近似まで考慮しているので物体表面上でも有限な値を有する。全体の傾向としては本計算結果は数値解とよく一致していることが分かる。また表面の圧力分布については第8

第4図 衝撃層内での接線方向の速度分布

第5図 淀み流線上での速度分布;
○ BELOTSEKOVSKII & DUSHIN

第6図 淀み流線上での密度分布

第7図 淀み流線上での圧力分布

第8図 物体表面上の圧力分布;
--- NEWTON-BUSEMANN

第9図 球の場合の衝撃波の離脱距離 (高度 100,000 ft)

図に示すように NEWTON-BUSEMANN による圧力分布よりわずかに小さくでている。

以上の結果は熱的および熱化学的に平衡な流れについても同様にいえる。一例として高度 100,000 ft におけるマッハ数と衝撃波の離脱距離 Δ_0 との関係を図 9 に示す。なお本計算においては飛行条件に対する ϵ

第1表 高度 100,000 ft において主流マッハ数 M_∞ に対する直立衝撃波前後の密度比 ϵ (文献 8, 第2図による)

M_∞	8	10	12	14	16	18	20
ϵ	.148	.126	.107	.097	.095	.089	.082

の値には MOECKEL⁸⁾ による結果を使用した。文献 8 の第2図から読みとった結果を第1表に示す。第9図には比較のため XERIKOS & ANDERSON の論文²⁾から転載した数値計算による結果も記入してある。これより本計算法によっても数値解とよく一致することが分かる。

7. 結 論

鈍頭物体の淀み点近傍の熱化学的平衡流れが逆計算法により、衝撃層が十分に薄いという仮定のもとに解析された。

本計算法では飛行条件に対する衝撃波前後の密度比 ϵ が与えられれば、淀み点近傍の流れの状態を密度の変化も含めて容易に知ることができる。凍結流の場合について衝撃層内の速度、密度と圧力を計算した結果は数値計算の結果とよく一致している。

参考文献

- GRAVALOS, F. G., EDELFELT, I. H. and EMMONS, H. W.: The supersonic flow about a blunt body of revolution for gases at chemical equilibrium, IX Astronautical Congress (Springer-Verlag, Berlin, 1959), p. 312.
- XERIKOS, J. and ANDERSON, W. A.: Blunt body integral method for air in thermodynamic equilibrium, AIAA J., Vol. 3, No. 8, (1965/8) p. 1531.
- KUBY, W., FOSTER, R. M., BYRON, S. R. and HOLT, M.: Symmetrical equilibrium flow past a blunt body at superorbital re-entry speeds, AIAA J., Vol. 5, No. 4, (1967/4) p. 610.
- HAYES, W. D. and PROBST, R. F.: Hypersonic flow theory, Vol. 1, Second Edition, Academic Press, New York, (1966).
- HANSEN, C. F.: Approximations for the thermodynamic and transport properties of high-temperature air, NASA TR R-50, (1959).
- LEWIS, C. H. and BURGESS, E. G.: Empirical equations for the thermodynamic properties of air and nitrogen to 15,000°K, AEDC-TDR-63-138, (1963).
- BADE, W. L.: Simple analytical approximation to the equation of state of dissociated air, ARS J., Vol. 29, No. 4, (1959/4), p. 298.
- MOECKEL, W. E.: Oblique shock relations at hypersonic speeds for air in chemical equilibrium, NACA TN 3895, (1957).
- BELOTSEKOVSKII, O. M. and DUSHIN, V. K.: The supersonic flow round blunt bodies of an unbalanced gas stream, Zh. Vych. Mat. i Matem. Fiz., Vol. 4, No. 1, (1964/1), p. 61.