技 術 論 文 CONTRIBUTED PAPER

板曲げ問題の定常クリープについて* On the Stationary Creep in Plate Bending Problems

内 野 和 雄**・浜 中 順 一**
Kazuo UCHINO & Jun-ichi HAMANAKA

Abstract

The plate bending problem in the stationary creep state was investigated by means of the finite element method. The Stationary creep problem was transformed into a non linear elastic problem in accordance with the HOFFS' analogy and a REISSNER type variational principle was formulated. Based on the above-mentioned principle, the finite element method was applied to the plate bending problem and a computer program was made to solve the bending problem of arbitrary shape plate subjected to arbitrary load. The bending moment and stationary creep strain rate were calculated for circular and rectangular plates under uniform loading. The results obtained here for circular plates show a good agreement with the results calculated by using the RUNGE-KUTTA method.

1. 緒 言

最近の有限要素法の発達にともなう、複雑なクリープ問題も初期ひずみ法や直接反復法をもちいて解くことが可能になった。これらの方法はいずれもその基礎を仮想仕事の原理に依っている。ここでは観点をかえて定常クリープにおける応力-歪み速度関係に立脚した変分原理を導きこれに有限要素法を応用して平板の定常クリープ問題を解いた。平板の定常クリープに関しては従来円板の等分布荷重問題が RUNGE-KUTTA 法で解かれている程度で、矩形板等では解析的な解法は不可能である。この方法によれば任意形状、任意境界条件の平板が任意荷重を受ける場合の定常クリープ問題が良好な精度で求めることが可能である。

2. 記 号

S_{ij} : 偏差応力
 I_2 : 偏差応力の 2 次の不変量
 k, n : クリープ定数
 σ_e, ϵ_e : 等価応力, 等価歪
 w, h : 平板の垂直撓み, 板厚

M_x, M_y, M_{xy} : 平板の曲げモーメント
 $\bar{V}_n$: 強制等価剪断力
 $\bar{R}_n$: 強前回転角
 M_n : 要素の辺に直角方向の曲げモーメント
 $\bar{T}_i, F_i$: 与えられた表面力, 物体力

3. 定常クリープ問題における Reissner 型変分原理

応力歪み速度関係が

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} k (3I_2)^{(n-1)/2} S_{ij}$$

で表わせる定常クリープ問題は HOFF の類似により

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} k (3I_2)^{(n-1)/2} S_{ij} \quad (1)$$

なる応力歪み関係をもつ非線型弾性体の問題に帰着できる。この場合ポテンシャル・エネルギーは

$$\Pi_p = \int_V \frac{n}{n+1} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_{S_1} \bar{T}_i u_i dS - \int_V F_i u_i dV$$

ここで適合条件と変位の境界条件を拘束条件からはずすために LAGRANGE の未定係数 α_{ij}, β_i を導入すると、

$$\begin{aligned} \Pi_q = & \int_V \left(\frac{n}{n+1} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - F_i u_i \right) dV \\ & - \int_V \alpha_{ij} \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV \\ & - \int_{S_1} \bar{T}_i u_i dS - \int_{S_2} \beta_i (u_i - \bar{u}_i) dS \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $n \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}$ を考慮して $\delta \Pi_q = 0$ より α_{ij}, β_i を求めると

$$\alpha_{ij} = \sigma_{ij} \text{ in } V, \quad \beta_i = T_i \text{ on } S_2 \quad (3)$$

となる。(3)式を(2)式に代入して応力歪み関係を考慮すると

$$\begin{aligned} \Pi_k = & \int_V (\sigma_{ij} u_{i,j} - F_i u_i - B) dV \\ & - \int_{S_1} \bar{T}_i u_i dS - \int_{S_2} T_i (u_i - \bar{u}_i) dS \end{aligned} \quad (4)$$

* 昭和 46 年 12 月 27 日原稿受理

** 石川島播磨重工業株式会社技術研究所

となる。ここで B はコンプリメンタリ・エネルギー密度を表わし

$$B = \frac{1}{n+1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

となる。

4. 平板の定常クリープへの応用

変位と歪みの関係は法線保存則がなり立つとして

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

とおく。ここで

$$\sigma_x = 0$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3k}{2} \sigma_i^{n-1} S_{ij}$$

より $\varepsilon_z = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ を考慮して等価歪みを計算すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= \left(\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^2 \right)^{1/2} \\ &= z \left\{ \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} = zA \end{aligned} \quad (6)$$

ただし

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

ここで

$$S_{ij} = \frac{2}{3} k^{-1/n} \varepsilon_i^{-(1-1/n)} \varepsilon_{ij}$$

より応力成分を計算すると

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2k^{-1/n}}{3\varepsilon_e^{1-1/n}} (2\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ &= -\frac{2k^{-1/n}}{3A^{1-1/n}} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) |z|^{1/n} \operatorname{sgn} z \\ \sigma_y &= \frac{2k^{-1/n}}{3\varepsilon_e^{1-1/n}} (2\varepsilon_y + \varepsilon_x) \\ &= -\frac{2k^{-1/n}}{3A^{1-1/n}} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) |z|^{1/n} \operatorname{sgn} z \\ \tau_{xy} &= \frac{2k^{-1/n}}{3\varepsilon_e^{1-1/n}} \varepsilon_{xy} \\ &= -\frac{2k^{-1/n}}{3A^{1-1/n}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) |z|^{1/n} \operatorname{sgn} z \end{aligned}$$

ただし $\operatorname{sgn} z$ は $z > 0$ の場合は 1, $z = 0$ の場合は 0, $z < 0$ の場合は -1 をとる。モーメントは上式を

積分して

$$M_x = -\frac{2k^{-1/n}}{3A^{1-1/n}} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{2+1/n}$$

$$M_y = -\frac{2k^{-1/n}}{3A^{1-1/n}} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{2+1/n}$$

$$M_{xy} = -\frac{2k^{-1/n}}{3A^{1-1/n}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{2+1/n}$$

上式より A を M_x, M_y, M_{xy} であらわすと

$$A = \left(\frac{2}{3B} \right)^n (M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2)^{n/2}$$

となるので曲率をモーメントであらわすことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{1}{3B} \left(\frac{2}{3B} \right)^{n-1} (M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 \\ &\quad + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} (2M_x - M_y) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{1}{3B} \left(\frac{2}{3B} \right)^{n-1} (M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 \\ &\quad + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} (2M_y - M_x) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{B} \left(\frac{2}{3B} \right)^{n-1} (M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 \\ &\quad + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} M_{xy} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし

$$B = \frac{2k^{-1/n}}{3} \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{2+1/n}$$

次に平板の曲げ問題に適した REISSNER 型の変分原理を導びく。そのために (7), (8), (9) を考慮して

$$M_{x,xx} + 2M_{x,xy} + M_{y,yy} + q = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w_{,xx} + C(M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} \\ \times (2M_x - M_y) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} w_{,yy} + C(M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} \\ \times (2M_y - M_x) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} w_{,xy} + 3C(M_x^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} \\ \times M_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ただし

$$C = \frac{1}{3B} \left(\frac{2}{3B} \right)^{n-1}$$

また強制等価剪断力の与えられている境界 S_2 上で

$$M_{n,n} + 2M_{n,s} = \bar{V}_n \quad (14)$$

強制回転角の与えられている境界 S_3 上で

$$w_{,n} = \bar{R}_n \quad (15)$$

なる 6 個の式を自然条件とする汎関数を求める。

(10)~(15) 式より

$$\begin{aligned} & - \iint (q + M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{x,xy}) \delta w \, dA \\ & - \iint (w_{,xx} + C(M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 \\ & \quad + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} (2M_x - M_y)) \delta M_x \, dA \\ & - \iint (w_{,yy} + C(M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 \\ & \quad + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} (2M_y - M_x)) \delta M_y \, dA \\ & - \iint (w_{,xy} + 3C(M_x^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2)^{(n-1)/2} M_{xy}) \delta M_{xy} \, dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3M_{xy}^{(n-1)/2}(2M_y-M_x)\delta M_y dA \\
& -\iint (w_{,xy}+w_{,yx}+6C(M_x^2-M_xM_y \\
& +M_y^2+3M_{xy}^2)^{(n-1)/2}M_{xy})\delta M_{xy}dA \\
& +\int_{S_2} (M_{n,n}+2M_{n,s}-\bar{V}_n)\delta w ds \\
& +\int_{S_3} (w_{,n}-\bar{R}_n)\delta M_n ds=0
\end{aligned}$$

上式を変形すると

$$\delta F=0 \quad (16)$$

なる汎関数 F が求まる。ただし

$$\begin{aligned}
F=& \iint \left\{ -qw + M_{x,x}w_{,x} + M_{y,y}w_{,y} \right. \\
& + M_{xy,y}w_{,x} + M_{xy,x}w_{,y} \\
& -\frac{2C}{n+1}[(M_x^2-M_xM_y+M_y^2 \\
& +3M_{xy}^2)^{(n+1)/2}] dx dy - \oint w_{,s}M_{n,s} ds \\
& \left. -\int_{S_2} \bar{V}_n w ds - \int_{S_3} \bar{R}_n M_n ds \right\} \quad (17)
\end{aligned}$$

5. 有限要素法の適用

前述の変分原理(16)に有限要素法を適用する。まず第1図の如く、平板を3角形の要素のあつまりと考える。

ここで I_i ($i=1, 2, 3$) は3角形の頂点節点を表わし、 J_i ($i=1, 2, 3$) は辺上の節点を示す。今 I_i 点の垂直撓みを

$$\bar{q}^T = (w_1, w_2, w_3), \quad (T \text{ は転置を示す})$$

と表わし J_i 点の辺に垂直な曲げモーメントを

$$\bar{m}^T = (M_{n1}, M_{n2}, M_{n3})$$

とする。すると要素内の撓みは線形分布を仮定すると

$$w = \{X\} \{T\} \bar{q}$$

と表わせる。ただし

$$\{X\} = (1, x, y)$$

$$\{T\} = \frac{1}{2A}$$

$$\times \begin{pmatrix} x_2y_3-x_3y_2 & x_3y_1-x_1y_3 & x_1y_2-x_2y_1 \\ y_2-y_3 & y_3-y_1 & y_1-y_2 \\ x_3-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A=& 0.5(x_2(y_3-y_1)+x_1(y_2-y_3) \\
& +x_3(y_1-y_2))
\end{aligned}$$

また要素内の曲げモーメント M_x, M_y, M_{xy} を一定と仮定すると

$$\begin{aligned}
(M_x, M_y, M_{xy})^T &= (B) \bar{m} \\
&= (\bar{b}_1^T, \bar{b}_2^T, \bar{b}_3^T)^T \bar{m}
\end{aligned}$$

ただし (B) は次の如きマトリクスで、 $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ はその構成行ベクトルである。

第1図 3角形要素とその座標

$$(B) = (A)^{-1}$$

(A) の成分は

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (\cos \beta_1)^2, A_{12} = (\sin \beta_1)^2, A_{13} \\
&= 2 \sin \beta_1 \cos \beta_1
\end{aligned}$$

また撓みの各辺の接線方向の傾斜は

$$\begin{aligned}
(w_{,s_1}, w_{,s_2}, w_{,s_3})^T &= (P) \bar{q} \\
&= (\bar{p}_1^T, \bar{p}_2^T, \bar{p}_3^T)^T \bar{q}
\end{aligned}$$

ただし (P) の成分は

$$P_{ij} = -T_{2j} \sin \beta_i + T_{3j} \cos \beta_i$$

ここで T_{2j}, T_{3j} はマトリクス (T) の成分である。

また $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ は (P) の構成行ベクトルである。

また各辺上の振りモーメント $M_{n,i}$ は

$$\begin{aligned}
(M_{n,1}, M_{n,2}, M_{n,3})^T &= (F) \bar{m} \\
&= (\bar{f}_1^T, \bar{f}_2^T, \bar{f}_3^T)^T \bar{m}
\end{aligned}$$

となる。ただし $(F) = (D)(B)$ で (D) の成分は

$$\begin{aligned}
D_{11} &= -D_{12} = -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \\
D_{13} &= \cos 2\beta_1
\end{aligned}$$

となる。 $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ は (F) の構成行ベクトルである。

以上の準備のもとに汎関数(17)式をマトリクス表示する。まず面積分の項は次式の如く $\bar{m}$ の非線形項となる。

$$\begin{aligned}
\iint \frac{2C}{n+1} [(M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2)^{(n+1)/2}] \\
\times dx dy = C^* (\bar{m}^T (K) \bar{m})^{(n+1)/2} \quad (18)
\end{aligned}$$

ただし

$$C^* = \frac{2C\lambda}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
(K) &= \bar{b}_1^T \bar{b}_1 + \bar{b}_2^T \bar{b}_2 - 0.5(\bar{b}_1^T \bar{b}_2 + \bar{b}_2^T \bar{b}_1) \\
&+ 3\bar{b}_3^T \bar{b}_3
\end{aligned}$$

また線積分の項は

$$\oint w_{,s} \cdot M_{n,s} ds = \bar{m}^T (H) \bar{q} \quad (19)$$

となる。ただし

$$(H) = \bar{f}_1^T \bar{p}_1 a_1 + \bar{f}_2^T \bar{p}_2 a_2 + \bar{f}_3^T \bar{p}_3 a_3$$

さらに周辺剪断力のなす仕事は

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} \bar{V}_n w ds &= \bar{q}^T (T^T) \int_{S_2} \{X\} ds \bar{V}_n \\
&= \bar{q}^T \bar{l}_2 \quad (20)
\end{aligned}$$

となる。ただし

$$l_{2k} = l_{2i} = \frac{\bar{V}_n a_i}{2}; \quad k=3+i, \quad l=3+j$$

また強制回転角による仕事は

$$\int_{S_1} \bar{R}_n M_n ds = \bar{m}^T \bar{l}_3 \quad (21)$$

となる。ただし

$$l_{3i} = \bar{R}_n a_i$$

また要素面に作用する分布垂直力の荷重ベクトルを $\bar{l}_1$ とする。以上(18)~(21)式等を(16)式に代入する。

$$\begin{aligned} \delta F = & -(\delta \bar{m}^T [K]^* \bar{m} + \delta \bar{m}^T [H] \bar{q} \\ & + \delta \bar{q}^T [H]^T \bar{m} + \delta \bar{q}^T \bar{l}_1 + \delta \bar{q}^T l_2 + \delta \bar{m}^T \bar{l}_3) \\ = & 0 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} [K]^* = & \frac{n+1}{2} C^* (\bar{m}^T [K] \bar{m})^{\frac{n-1}{2}} \\ & \times ([K] + [K]^T) \end{aligned}$$

上式をマトリクス表示すると

$$\begin{aligned} (\delta \bar{m}^T, \delta \bar{q}^T) \begin{pmatrix} [K]^* [H] \\ [H]^T 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{m} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \\ + (\delta \bar{m}^T, \delta \bar{q}^T) \begin{pmatrix} \bar{l}_3 \\ \bar{l}_1 + \bar{l}_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ここで $(\delta \bar{m}^T, \delta \bar{q}^T)$ の任意性より

$$\begin{pmatrix} [K]^* [H] \\ [H]^T 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{m} \\ \bar{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{l}_3 \\ \bar{l}_1 + \bar{l}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (22)$$

なる方程式を得る。(22)式の $[K]^*$ なるマトリクスは $\bar{m}$ に関する非線形項を含むので(22)式は複雑な非線形方程式となる。これを直接反復法で解く。すなわち、まず初期値として弾性解を用いて逐次解を(22)式に代入して収束するまで計算をつづける。

6. 例 題

例題1 等分布荷重をうける円板 第2図に等分布荷重をうける周辺支持、周辺固定円板の撓み速度分布

$$\dot{w} = \dot{v} a^2 \left(\frac{p a^2}{6 \mu} \right)^n$$

$$\mu = C^{-\frac{1}{n}}$$

$$C = k (3)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2n+1}}$$

第2図 等分布荷重をうける円板の撓み速度

を示す。図において単純支持と固定で n に対する撓み速度の順位が逆転しているがこれは固定の影響が n が大なるほど大きいことを示している。

第3図に周辺支持円板の M_r, M_θ の分布を示す。中央における最大モーメントは n が増すに従って減少している。

第4図には周辺固定円板の M_r, M_θ の分布を示す。

第5図には上記円板の最大撓み速度を当有限要素法で計算したものと、RUNGE-KUTTA 法で計算したものとを比較してある。両者の一致はおおむね良好であるが、単純支持板の n の大きい領域でくいちがいがみられる。

例題2 等分布荷重をうける矩形板 第6図に等分

布荷重をうける周辺支持、周辺固定正方形板の撓み速度を示す。円板の場合と同様 n が大きくなるほど固定の影響が顕著にあらわれる。

第7図に上記正方形板のモーメント分布を示す。

第8図～第11図に等分布荷重をうける周辺支持、周辺固定の矩形板の最大撓み速度、最大モーメントを種々の縦横比に対して計算し設計の資料とした。

7. 結 言

非線形の応力・歪み速度関係をもつ定常クリープ問題に適用可能な混合タイプの変分原理を導き、これに有限要素法を応用して平板の定常クリープ曲げ問題を解いた。

第3図 等分布荷重をうける周辺支持円板の曲げモーメント

M_r半径方向曲げモーメント
 M_θ周方向曲げモーメント

第4図 等分布荷重をうける周辺固定円板の曲げモーメント

M_r半径方向曲げモーメント
 M_θ周方向曲げモーメント

従来解析的な方法では非常に単純な問題しか解かれていないが、当方法によれば、任意の荷重条件、任意

の境界条件をもつ平板の応力、撓み速度の解析が可能である。

参考文献

1) 林, 村: 変分法, コロナ社.

2) HERRMANN, LR: "Finite Element Bending Analysis for Plates", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Oct., 1967.

第7図 等分布荷重をうける正方形板の中央の曲げモーメント

$$\dot{w}(0) = \dot{w}(0) a^2 \left(\frac{p a^2}{6 \mu} \right)^n n^{-1} (1.015 + 0.569n)$$

$$M = C - \frac{1}{n}$$

$$C = k(3)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{1}{n^{2n+1}}$$

第8図 等分布荷重をうける周辺支持矩形板の最大撓み速度

第9図 等分布荷重をうける周辺支持矩形板の最大モーメント

第10図 等分布荷重をうける周辺固定矩形板の最大変形速度

第11図 等分布荷重をうける周辺固定矩形板の最大モーメント