の必要性が痛感される。

6. あとがき

ATC 自動化システムについて、簡単に紹介したが、このシステムの整備は、増大する航空交通を安全に円滑に管制するためには必須のものと考えられる。管制自動化は処理能力の増強のみならず、管制方式の標準化、人的エラーの減少等から安全性が飛躍的に向上するという重要な利点をもたらすものと考えられる。

最後に一言申し上げたいことは、現在行なわれている管制自動化は、管制官の判断資料を如何に早く、正確に管制官に提供するかであり、最終的な判断は人間である管制官が行なうものである。したがってこのシステムはあくまでも管制官の道具であることが基本となっている。一般的に自動化の用語は、化学工場のプロセス・コントロールのように計算機が大半の業務を人間の代わりに行なう場合に用いられるものであり、ATC の場合は誤解のないように部内では、“航空交通管制情報処理システム”の用語を使用している。

わが国の航空界の発展の一端をになう管制官の一員として、一日も早く管制施設の近代化のために、システムの導入が行なわれることを願いつつ筆をおきた

参文献考

- 1) ICAO Bulletin (Aug. 1971), CAUTRA IV Automated ATCC operational.
- 2) Interavia (Sept. 1971), UK Military and Civil Air Traffic Control in Harmony.
- 3) FAA: The National Aviation System Plan Ten Years Plan 1972-1981 (Mar. 1971).
- 4) FAA: Design for the NAUS (1962).
- 5) FAA: System Description National Air Space System en Route Stage A (May 1968).
- 6) FAA: FAA Specification for Modularly Expandable Arts III (Tracon "C") Beacon Tracking Level System (Apr. 1971).
- 7) 岡田他: 電気通信学会研究資料, SANE 67-1 (1967-04), 我国の ATC 自動化計画.
- 8) Aviation Week & Space Technology, ARTS-3 Readied for FAA Service, (Jan. 1971).
- 9) Aviation Week & Space Technology, (May 1971).
- 10) FAA: Use of Computers in air Traffic Control (June 1970).
- 11) FAA: ARTS III System Description (Aug. 1970).
- 12) Sperry Rand: Engineering Review, (Air Traffic Control Part I-1971).
- 13) ICAO: DOC, 4444-RAC/501/10. Procedures for Air Navigation Service Rules of the Air and Air Traffic Services Attachment D Guidance Material on the Application of Automation in ATC.

衝撃波を伴わない遷音速翼型について (2)*

On Shock-Free Transonic Aerofoil Sections

重 見 孝**・高 梨 進**

Takashi SHIGEMI and Susumu TAKANASHI

8. 数値的ホドグラフ法

同じくホドグラフ法により翼のまわりの shock-free の流れを求めて、NIEUWLAND につづいて成功を収めたのは KORN²³⁾ である。彼の手法は、以前に GARBEDIAN²⁴⁾ が超音速流中の鈍頭物体が造る detached shock の後方の流れを求めるため案出した“複素空間の特性曲線法”の応用である。速度成分 u, v が独立変数、また物理面での座標 x, y が従属変数となるように圧縮性流の基礎式を変換(これもホドグラフ変換)すると、次の線型一階連立偏微分方程式となる(付録 [I] 参照)。

$$(a^2 - u^2)y_v + 2uvx_v + (a^2 - v^2)x_u = 0 \quad (92)$$

$$-y_u + x_v = 0 \quad (93)$$

変数分離にたよらないから(3)式のように流れ関数 Ψ

を用いず、独立変数にも (q, θ) や (τ, θ) を用いない。つぎに上式に特性変換を行なう。すなわち次の特性をもつ characteristic coordinates ξ, η を導入する。

$$\partial/\partial\xi = \partial/\partial v + \lambda_+ \partial/\partial u, \quad \partial/\partial\eta = \partial/\partial v + \lambda_- \partial/\partial u, \quad (94)$$

ここに λ_-, λ_+ は

$$\lambda_{\pm} = \{uv \pm a\sqrt{q^2 - a^2}\}/(a^2 - u^2) \quad (95)$$

(ただし a は局所音速) で表わされる characteristic directions である。すると

$$u_{\xi} = \lambda_+ v_{\xi}, \quad u_{\eta} = \lambda_- v_{\eta}; \quad (96)$$

$$y_{\xi} + \lambda_- x_{\xi} = 0, \quad y_{\eta} + \lambda_+ x_{\eta} = 0 \quad (97)$$

なる、characteristic coordinates を用いた基礎方程式が得られる。 (x, y) 面または (u, v) 面で $\xi = \text{一定}$, および $\eta = \text{一定}$ の曲線群はそれぞれ family を作り、これらの曲線を characteristics と呼ぶ。

超音速 ($q/a > 1$) では $\lambda_{\pm}$ は実数で、式は双曲型である。亜音速 ($q/a < 1$) では λ_+ と λ_- とは共役複素

* 昭和46年11月18日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所

数で、式は楕円型となる。前者の場合は衆知のごとく実数範囲で特性曲線法が適用でき、初期値が与えられれば流れが計算できる。一般に各 family に属する characteristic 一本ずつ (たとえば $\xi=\xi_0$ と $\eta=\eta_0$) の上で初期値 (characteristic initial data) が与えられる場合を characteristic initial value problem という。(KORN の方法もこれに属する。)

しかし楕円型の場合でも、(92), (93) 式の係数は解析的に与えられているから、 u と v とを複素数へ拡張することができる (すると独立変数は四次元空間へ拡張することになる)。初期値も、もしそれが解析的に与えられていれば、この複素空間に延長することができる。複素空間では微分方程式の型の概念は重要でなくなり、亜音速でも特性曲線法を形式的に適用することができる。

u, v を複素数領域に拡張したから ξ, η もまた複素数で、各 characteristic は四次元空間内の (二次元) 面である。特性変換の singularity は $q=a_*$ (音速の個所) で現われる。これを complex sonic line と呼ぶが、実はこれも u, v 空間内の (二次元) 面である。一般に複素ホドグラフ空間内の任意の点 (u, v) を通る characteristics は ξ, η の二つである (したがってその点をしばしば (ξ, η) と呼ぶ) が、complex sonic line 上では (95) 式から両 characteristic directions が合致する。流れを亜音速から超音速へ延長するさいこの

complex sonic line が重要な役割をする。

KORN の方法では翼型まわりの流れをホドグラフ上の特性曲線法により characteristic initial value problem で解く。計算の実行には差分法を用いる。しかし翼のまわりの流れのホドグラフには前各節に述べたとおり singularity があるから、まずこの singularity を解析的に求め (singular solution)、残りの regular 部分 (regular solution) を差分法で求め、両 solution を加え合わせる (原方程式が線型なることを利用)。

Singular solution を特性曲線法に便利な形で求めるにはまた非圧縮流から出発する。ここで

$$\eta(\zeta) = (1-\zeta)^{1/2} \quad (98)$$

なる新変数を導入する。あとでこの η は一つの characteristic であることが分かる。循環なしの円柱まわりの流れでは (12) 式より

$$z = (1-\zeta)^{-1/2} = 1/\eta \quad (\text{円柱}) \quad (99)$$

であるが、これを拡張して

$$z = 1/\eta + f(\eta) \quad (100)$$

($f(\eta)$ は流れの領域で regular な η の関数) とすればかなり一般的な物体形状を表わせるであろう。例えば楕円柱まわりの流れ (第 11 図参照) は (26) と (27) とより z' を消去し、特に $\beta=1/\sqrt{1-\varepsilon}$ とおき、さらに (98) より ζ を η で置換えると、

$$z = \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \eta^2 \right)^{1/2} + \frac{\varepsilon \eta}{1-\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \eta^2 \right)^{-1/2} \quad (101)$$

$$\equiv 1/\eta + g(\eta) \quad (\text{楕円柱}) \quad (102)$$

となり (100) の形であることが分かる ($g(\eta)$ は (101) の右辺から $1/\eta$ を引いた regular 部分である)。

一方、非圧縮流の基礎式は (92), (95) において $a \rightarrow \infty$ とすればよいから、characteristic directions は

第 11 図 円柱 (1a), 1b), 1c) または 2a)), 楕円柱 (2b)~2e)) まわりの非圧縮流を $(z'), z, \zeta, \eta, 1/\eta$ 面で示す。流線を伴介として各面の写像関係の概念が得られる。なお 2b) の楕円の半長軸・半短軸の長さは、8 節の写像 ($\beta=1/\sqrt{1-\varepsilon}$) では $(1+\varepsilon)/\sqrt{1-\varepsilon}$; $\sqrt{1-\varepsilon}$ であり、4 節の写像 ($\beta=1$) では $(1+\varepsilon)$; $(1-\varepsilon)$ である。

$$\lambda_{\pm} = \pm i \quad (103)$$

である。すると(94)式の形から

$$\zeta = u - iv, \quad \bar{\zeta} = u + iv$$

は一对の characteristic coordinates を成すことが分かる。ある characteristic coordinate の任意関数もまた characteristic coordinate であるから、(98)式で定義した $\eta(\zeta) = (1 - \zeta)^{1/2}$ もその一つで、(94), (96), (97)式中の η に充当してよい。これと一对をなす ξ には

$$\xi = (1 - \bar{\zeta})^{1/2} \quad (104)$$

を用いることにする。

よってもし楕円柱まわりの非圧縮流を characteristic initial value problem として解こうとするなら、(96), (97), (103) を characteristic initial data:

$$\left. \begin{aligned} \eta = \eta_0 \text{ 上で } x &= g(\xi, \eta_0) \\ \xi = \xi_0 \text{ 上で } x &= g(\xi_0, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{\xi}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} + \frac{\xi \eta}{1 - \xi} \left(1 + \frac{\xi}{1 - \xi^2} \right)^{-1/2} - \frac{1}{\eta} \quad (106)$$

について解き (もちろんこのとき $x = g(\xi, \eta)$, $y = -ig(\xi, \eta)$ がその解として数値的に得られるであろう), その解 x, y に対し, x の実数部には singular solution $1/\eta$ の実数部を, y の実数部には $1/\eta$ の虚数部を加えて, 最終的に楕円柱まわりの非圧縮解が得られる。

以上の議論を圧縮性の場合に拡張しよう。いま

$$q = (u^2 + v^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1}(v/u) \quad (107)$$

で定義される極座標系 (q, θ) (いま一般にはどちらも複素数) を導入すると, $\bar{\zeta} = qe^{i\theta}$, $\zeta = qe^{-i\theta}$ と表わされるから, これらに対応する圧縮流の characteristic coordinates の一对として $m = e^{i-i\theta}e^{i\theta}$, $n = e^{i-i\theta}e^{-i\theta}$ を試みる。付録(A・29)より $s = \lambda + \sigma$ (σ : 常数) であるから $s - s_1 = \lambda - \lambda_1$, ここに s_1, λ_1 は一般流 $q=1$ (亜音速) における s, λ の値で, 実数である。 $e^{-\lambda_1} (= e^{\sigma - i\theta_1}) \equiv C$ (実数) として,

$$m = e^{i-i\theta}e^{i\theta} = Ce^{\lambda+i\theta}, \quad n = e^{i-i\theta}e^{-i\theta} = Ce^{\lambda-i\theta} \quad (108)$$

と書ける。まず q, θ が実数の範囲では, 亜音速では(A・26)で定義される λ は (したがって s も) 実数で, (A・31)より $a \rightarrow \infty$ のとき m, n は $\bar{\zeta}, \zeta$ となる。

$$\lim_{a \rightarrow \infty} m = \bar{\zeta} = qe^{i\theta}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} n = \zeta = qe^{-i\theta} \quad (109)$$

次に, 超音速では(A・26)より λ は虚数となるからこれを iA と書く (A は実数, (A・27)参照)。このとき(108)式より, m 一定なら $A + \theta = \text{一定}$; n 一定なら $A - \theta = \text{一定}$ だから m, n は real な特性曲線法での characteristic coordinates の一对となる(付録(A・28)参照)。以上の関係を q, θ が複素数の場合に拡張し, やはり m, n は亜, 超音速を通じて, 非圧縮流の $\bar{\zeta}, \zeta$ に対応する characteristic coordinates の一对と考えてよい。さらにここでは非圧縮流と相似に,

$$\xi = (1 - m)^{1/2}, \quad \eta = (1 - n)^{1/2} \quad (110)$$

(いずれも一般に複素数) を characteristic coordinates として用いることにする。

循環なしの圧縮流では基礎式(97)の解は, やはり非

圧縮流からの類推で(100)式と同様の形:

$$z = Z^I/\eta + Z^{II} \quad (111)$$

が期待できる (Z^I, Z^{II} は一般的には ξ, η の関数で, $\xi = \eta = 0$ で regular)。そこで次の形を仮定しよう。

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{Re.} \{ X^I(\xi, \eta)/\eta + X^{II}(\xi, \eta) \} \\ y &= \text{Re.} \{ Y^I(\xi, \eta)/\eta + Y^{II}(\xi, \eta) \} \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

ここに X^I, Y^I ($i = I, II$) は $\xi = \eta = 0$ で regular である。(112)を基礎方程式(97)に入れ次の関係が出る。

$$Y_\xi^{II} + \lambda - X_\xi^{II} = -(Y_\xi^I + \lambda - X_\xi^I)/\eta \quad (113)$$

$$Y_\eta^{II} + \lambda + X_\eta^{II} = (Y_\eta^I + \lambda + X_\eta^I)/\eta^2 - (Y_\eta^I + \lambda + X_\eta^I)/\eta \quad (114)$$

regular solution X^{II}, Y^{II} が得られるためにはこれらの右辺が regular である必要がある。よって characteristic $\eta = 0$ 上で

$$Y_\xi^I + \lambda - X_\xi^I = 0 \quad (115)$$

$$Y^I + \lambda + X^I = 0 \quad (\eta = 0 \text{ 上で}) \quad (116)$$

$$Y_\eta^I + \lambda + X_\eta^I = 0 \quad (117)$$

(116)より $Y_\eta^I + \lambda + X_\eta^I + (\lambda)_\eta \cdot X^I = 0$, これと(117)より,

$$(\lambda)_\eta \cdot X^I = 0 \quad (\eta = 0 \text{ 上で}) \quad (118)$$

いま取扱う上下対称翼で循環なしの場合は(110)式より, n は η の偶関数だから, $\eta = 0$ 上で $(\lambda)_\eta \equiv (\lambda)_\eta \cdot (dn/d\eta) = 0$, よって(118)は自ら満たされる。

$X^I(0, 0) = 1$, すなわち解が無遠点 $\xi = \eta = 0$ で非圧縮流と一致するようにきめると, これと(115), (116)とから $X^I(\eta = 0)$ に関する一階線型微分方程式が生じ, その解は次のように閉じた形で書ける。

$$X^I(\xi, 0) = \exp \left\{ \int_0^\xi - \left[\frac{(\lambda)_\xi}{\lambda - \lambda_\xi} \right]_{\eta=0} d\xi \right\} \quad (119)$$

これは SIMPSON 法則のような簡単な求積法で数値計算できる。(119)を満足する任意の X^I とそれに対応する Y^I とで singular solution を組立ててよいから, X^I は ξ のみの関数とすることができる, すなわち $X^I(\xi, \eta) = (119)$ 式の右辺。

X^I, Y^I が決定されると(113), (114)の右辺は既知となりこれらは X^{II}, Y^{II} に関する非同次の連立線型偏微分方程式となる。これらと(96)式とを差分近似式に直して MASSAU の方法²⁵⁾で数値積分する。複素数計算となる。

Characteristic initial value problem として characteristic surfaces $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ 上で解析的データを与える (特異点 $\eta = 0$ の付近は計算上の困難が生じるから避けた方がよい)。 $\xi = \xi_0$ 面上に $\eta = \eta_0$ から出発する一つの characteristic path: $\eta = \eta(\nu)$ をとり, その grid 点を $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_N$ とする。同様に $\eta = \eta_0$ 面上でも path: $\xi = \xi(\mu)$ を選び, その上に grid 点をとる。これら ξ_0, η_0 面上での u, v の値は characteristic coordinates とホドグラフ変数との関係が(108), (110)式

で閉じた形で分かっているから計算できる. ξ_0, η_0 両面で関数 X'' を初期値として与えれば, その上での Y'' は (114) または (113) 式をそれぞれ積分して求められる.

μ, ν は arc-length parameter で実数であるから, 上記の初期値から得られる解の領域は (μ, ν) 平面を描いて視察できる (第 12 図). 解の domain は $\xi_0, \eta_0, \xi_N, \eta_N$ の四 characteristics にかこまれた矩形である. 初期値より出発して解の domain 内へ次々と MASSAU の方法を進めてゆく様子を第 12 図に示す.

物理的意味のあるのは u, v が実数の解のみであるから, それが生ずるよう characteristic path を選ばなければならない. (108) 式を調べると, m と n が共役複素数であれば λ, θ は実数であり, もし $mn = |m|^2 = |n|^2 \leq C^2$ したがって $\lambda \leq 0$ すなわち超音速の条件が満たされれば点 $u(m, n), v(m, n)$ は実数ホドグラフ上にあることが分かる. m, n が共役のときは (110) より ξ, η もそうであるから, path $\xi(\mu), \eta(\nu)$ を共役に選べば, $|1 - \xi^2| \leq C, |1 - \eta^2| \leq C$ である限り実数ホドグラフ上にあることが分かる. ξ_0, η_0 より発するこのような path を多数選ぶことにより, その解の path で全超音速ホドグラフを蔽うことができる. 共役の initial paths が sonic line に達すると $\lambda_+ = \lambda_-$ となり, 解は停止する.

次に超音速領域で解を求めるための path を考える. Initial characteristic $\eta = \eta_0$ 上で $|1 - \xi^2| = C$ なる ξ 点の軌跡を upper sonic locus と呼び, 同様に $\xi = \xi_0$

第 12 図 超音速部分での典型的 grid. 各 initial characteristic 上に 11 点をとる. 矢印は次の計算点 (文献 23)

第 13 図 Initial characteristics $\eta = \eta_0$ (上图) と $\xi = \xi_0$ (下图) に沿う initial paths の典型. これらが超音速領域での解を生む. (文献 23)

上で $|1 - \eta^2| = C$ となる η 点の軌跡を lower sonic locus と呼ぶ (第 13 図). いま問題を離れて実数ホドグラフ平面での超音速の特性曲線法を考えてみよう. すなわち q, θ は実数で, $a^* \leq q \leq q_{\max}$. このとき (108) 式の λ は純虚数だから $|m| = |n| = C$ である. よって超音速領域内の任意の点は, とともに絶対値が C である二つの characteristics m, n の交点である. ところがこの m, n に対応する ξ, η は (110) 式から分かるように upper と lower の sonic locus に属している—たとえば第 13 図の ξ_1 と η_1 (共役であってはいけない). したがってそれぞれの出発点 ξ_0 と η_0 よりこの ξ_1, η_1 に達する両 path を選び, その上のすべての ξ, η の組み合わせで $\lambda_+ \neq \lambda_-$ となるようにすれば, 点 (ξ_1, η_1) は超音速領域にある. さらに path $\xi_0 \dots \xi_1$ を upper locus 上で延長して点 $\xi_2 \dots \xi_N$ を加えれば, 点 $(\xi_2, \eta_1), \dots, (\xi_N, \eta_1)$ はやはり η_1 -characteristic 上の超音速点であろう. ξ_N が η_1 の共役点とすれば (ξ_N, η_1) で sonic line に達し, 解はここで終結する. ふり出しに戻って今度は path $\eta_0 \dots \eta_1$ を lower locus 上 η_2 まで延長し, η_2 について同様の過程をくり返し η_2 -characteristic 上の超音速点 $(\xi_2, \eta_2) \dots (\xi_N, \eta_2)$ が得られる. $\eta_1, \eta_2, \dots$ は ξ_1 の共役点 η_N まで延長できる. かくして超音速領域で, sonic line と二本の characteristics ξ_1, η_1 とで区切られる範囲の解が, 一对の initial path 上のデータから得られる (第 14 図). これは real の特性曲線法で initial data が sonic line 上で与えられた場合と同一の範囲である (第 14 図右上).

第14図 第13図の initial paths に対応する grid を μ, ν 面で示す。右上はこの initial paths を用いて見出される実数ホドグラフ上の解の領域。(文献 23)

Regular solution まで求められると x, y が u, v の関数として得られるから流れ関数 $\Psi = (1/\rho_0) \int (\rho v dx - \rho u dy)$ をやはり差分式に直して計算する。 $q=0$ で $\Psi=0$ として内挿により $\Psi=0$ の軌跡を求め、翼型形状がきまる。

KORN はこの方法で対称翼型の 1 family を得た。Initial characteristics は $\xi_0 = \eta_0 = \text{実数}$ とし、その上で X^H に対する initial data を次のように解析的に与える。

$$\left. \begin{aligned} \xi = \xi_0 \text{ 上で } H_1(\eta) &= q(\xi_0, \eta) - \varepsilon_0 \log(\alpha_0 - \eta) \\ &\quad - \varepsilon_1 \log(\eta - \alpha_1) \\ \eta = \eta_0 \text{ 上で } H_2(\xi) &= q(\xi, \eta_0) - \varepsilon_0 \log(\alpha_0 - \eta_0) \\ &\quad - \varepsilon_1 \log(\eta_0 - \alpha_1) \end{aligned} \right\} (120)$$

ここに $q(\xi, \eta)$ は (106) の楕円柱の式で与える。したがって KORN の翼型も quasi-elliptical 翼の同類と考えられよう。特に $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$ の場合は、 $M_\infty \rightarrow 0$ とすると ξ_0 の値の選択にからわず楕円柱まわりの非圧縮流に近づく。

$\xi_0 = 0$ とすれば前後対称流となるが、計算上は $\xi_0 \neq 0$ なることが必要で前後非対称翼しか計算できない。マッハ数が高まると limit line が翼内部から気流中に首を出す、その位置は ξ_0 が正なら翼の尾部、負なら頭部である。翼表面の速度分布に変化をもたせるため (120) 式の第二、第三項に見るように翼内に loga-

$M_\infty = .7906, \varepsilon = .15, \xi_0 = -.16, \varepsilon_0 = .6, \alpha_0 = .59, \varepsilon_1 = .15, \alpha_1 = -1.50, M_{\max} = 1.2708, t/c = 1372.$

第15図 KORN の対称翼の一例。(文献 23)

THEORY $M_\infty = .750, C_L = .63, C_D = .0003, \alpha = 0.00, T/C = .118$
EXPERIMENT $M_\infty = .765, C_L = .58, C_D = .0110, \alpha = .89, R = 21 \times 10^6$

第16図 揚力をもつ KORN 翼。(文献 26)

rithmic singularities を置いた。後縁近くにおくと後縁付近の速度分布がゆるやかになったが、同時に頭部の曲率を増し、ある場合は前縁を cusp にすることが分かった。これを補償するため前縁近くにもう一つの log 項をおいた。かくしてパラメーターは $M_\infty, \xi_0, \varepsilon, \varepsilon_0, \alpha_0, \varepsilon_1, \alpha_1$ の計 7 個である (すべて実数)。例を第 15 図に示す。流れはすべて対称であるから上半のみを描いた。対称軸より下の部分は翼内部への解の延長である。超音速領域では characteristics を描いてあり、その cusp するところをつなげば sonic line となる。亜音速部分の翼面は点線で描いてある。計算時間は CDC 6600 を用いて翼型 1 枚につき数分間と称している。

KORN は循環のある場合についても併行的に述べて

いて, 例えば (98) 式はそのさい $\eta(\zeta) = (1 - \zeta - b^2)^{1/2} + ib$ (b は任意常数で円柱のときは $\Gamma/4\pi$ とれば $z = 1/\eta$ が厳密な式となる), また (111) 式は $z = Z^I/\eta + Z^{II} + Z^{III} \cdot \log \eta$ である, 等々. 本稿では詳細の発表されている揚力なしの場合に限ったが, 揚力をもつ場合も計算は成功した模様である²⁶⁾. 発表されている結果を第 16 図に示す.

数値的ホドグラフ法としては別の構想がフランスの ONERA で試みられている^{6), 27)} ことを付言する. 揚力のある場合を扱ひ, ホドグラフ面でやはり解を singular, regular の両 solutions に分ける. Singular solution としては一様流に対応する点 $\tau = \tau_1$ で doublet と渦を表現するなるべく簡単な関数を与える^{6), 28)}. ホドグラフ上任意に与えた $\varphi = 0$ の曲線 (翼の contour に対応) の上で singular solution の値を計算し, それの符号を変えたものを regular solution の境界値とする. Regular solution は relaxation で解く. 純亜音速ならこの境界値問題は DIRICHLET の問題として well-posed であるが mixed flow のとき困難が伴う. また問題をやさしくするためホドグラフ上の有効流れ領域に分枝点をもたない場合 (分枝点は翼内部にある) を扱っている. またこの種の問題にお家芸の電氣的 analogy の応用も試みている²⁹⁾.

9. 実験結果

Shock-free mixed flow の翼型の実験結果をまとめて紹介しよう. ただしここに挙げるのは理論的の厳密解が得られているものに限った. したがってこれらは必ずしも実用に適する翼型ではない.

第 4 図の NIEUWLAND 対称翼に関しては SPEE & UIJLENHOET³⁰⁾ の実験結果が同時にプロットされている. 計算結果はきわめてよく再現されており, これ

を見れば誰しも essentially-isentropic compression の事実を疑わないであろう. しかし細いことを言えば, 設計マッハ数よりいくらか高いところで理論値に最も近い圧力分布の得られていること, また分布自体に局部的 disturbance のあることが認められる. これらはここで紹介するどの実験にも共通のことからである. もちろん実験では模型の製作誤差の外に境界層の影響, 遷音速風洞の壁の干渉など理論に織りこまれない要素の入ることは考慮しなければならない. この実験はレイノルズ数 (翼拡張基準) $2 \sim 2.5 \times 10^6$ 程度であるが, 12% 翼弦のところで自由遷移を行ない, また peak 後の圧力上昇部に剥離の小 bubble があるとのことである. 第 17 図はそのうちの一つの翼について, off-design 状態での圧力分布を示す. 設計点 (理論値と最もよく一致する点) を外れると, たとえばマッハ数がより高くても低くても, より顕著な衝撃波の現われることが分かる. これは mixed-flow の厳密解が孤立解であることに対応するものであろう. しかし設計点を僅か外れても抵抗増加はそれ程大きくないことが示されている.

NLR の揚力をもつ翼については, BOERSTOEL ら²²⁾ の簡単な記述中に一つの翼の実験結果が示されている. 第 9 図 (c) がそれで, 対称翼ほど計算結果との一致がよくない. これは対称翼でも生じる上記の実験的制約の外に, 揚力をもつ翼の場合は境界層の影響等により揚力係数がおちればそれが直ちに前縁吸込み点の位置に関係し, そのため翼上下面の flow pattern がくずれるためであろう. 事実この実験では理論より 20% も低い揚力係数しか得られなかった模様である. その他, 自然遷移と強制遷移とで peak およびその直後での分布がかなり異なることが認められる. 自然遷移では前縁より 18~25% 翼弦の位置に剥離 bubble のあることが報じられている.

第 17 図 第 4 図の Aerofoil 1 に対する off-design 性能. (文献 30)

航技研の翼型については、第10図a)中に2m 超音速風洞で実験した結果³¹⁾をプロットした。この例では前縁 peak はあまり強くなく、limit line の出現までにはまだマッハ数に余裕がある。理論値とかなりよく合っているが、理論値よりやや高めのマッハ数、やや大きい迎角で最良の一致が得られていることは BOERSTOEL らのものと共通の傾向である。その理由はやはり粘性の影響などによる揚力の低下、またそれに基く前縁激み点の移動にあると思われる。図に示す最も理論値に近い分布は、激み点位置をほぼ理論値に合わせて得られたものである。しかしマッハ数、迎角が理論とおりでないため結果的には peak が強すぎ、また超音速領域の下流端で過圧縮の現われているのが注目される。

KORN翼の揚力をもつ場合について最近カナダNAEの60in×15in 二次元風洞で実験された結果が第16図中にプロットされている。これも理論圧力分布に最もよく合ったデータを示したもので、それが設計点をやや上まわるマッハ数、迎角で得られていることは他の翼型と同様である。やはり下面の合致はよいが上面に若干の disturbance が認められる。この結果では上面の peak が理論値より低く現われている。後縁付近の分布は理論値をきわめてよく再現しているが、これは後縁付近の厚みが少ないこと、試験レイノルズ数がきわめて高いことに基づくものであろう。

NIEUWLAND に先立って楕円柱まわりの流れを基とする厳密解を LEVEY が求めたことはさきに述べたが、quasi-elliptical 翼の成功に刺激されて LEVEY 翼の再試験を最近 SECOMB³²⁾ が行なった。その結果を第18図に紹介する。これは前後縁とも cusp の(上下)対称翼で、形状、速度分布とも友近・玉田の翼³³⁾(ホドグラフ法の近似解法により求められたもの)に似てい

る。図に見るように翼弦の中央部に超音速領域があり、50% 翼弦をこえた後でやや急激に亜音速へと再圧縮される。理論と実験との一致は必ずしもよくないが、この圧縮もほぼ等エントロピー的と見てよいのではないであろうか。前縁が cusp であるから LEVEY 翼は実用的に興味の少ないものであるが、非 peaky 翼の一例としてその実験的検証は興味がある。

10. む す び

前節に述べた実験結果により(それに厳密解によらない多数翼型の実験結果をも加えて)、PEARCEY の peaky 翼提唱以前に支配的であった shock-free flow に対する偏見はふっしょくされたと考えてよいであろう。Shock-free flow に対する過去の否定論が根拠としたのは、よく知られているように次の諸点にある。

i) たとえ翼のまわりに isentropic mixed flow が理論的にあったとしてもそれは孤立解であるから実現は困難であろう。超音速領域に接する物体形状に局部的微小変化があれば isentropic flow としての隣接解がないから shock-free flow はけしとんでしまうであろうとの数学的議論、また ii) 超音速領域の下流に生じる小攪乱は超音速領域を通りぬけて上流に伝播できないから、時間がたつにつれて超音速領域末端で蓄積し、衝撃波を構成せずにはすまない、等々である。このうち i) については数学的には正にそのとおりかも知れない。しかし自然現象の常として shock-free flow に隣接して強い shock を伴う流れが必ずあるとは考えられず、もしその近傍にほとんど shock-free である流れのかなりの領域が存在すれば実用上はまず問題がない。また ii) についても一次元の管内の流れとは異なり、二次元の翼まわりの流れでは攪乱の蓄積されない例が (peaky 翼については) 実験的、理論的³⁴⁾に

第18図 LEVEY 翼の実験結果。(文献 32)

実証されようとしている (これらの反論についてはたとえば文献 35 参照)。

本稿で述べた厳密解による shock-free 翼型は、何といってもまだ種類が少なく、またある実際的の意図をもって設計されたというより、いわば数学上の便宜に合わせて構成されたものであることは否定できない。古典翼理論の歴史上に類似を求めれば、やっとジュコフスキー翼が得られたぐらいのところであろうか。もっと family をふやして shock-free 翼型の可能性の範囲を探究することは有意義であろう。また shock-free 翼型が peaky 型のものに限るかの疑問に確信ある解答を与えるにはもう少しデータが必要であろう。

遷音速翼型の性能の良否をきめるのは衝撃波の関連ばかりでなく、もちろん粘性に関係する数多くの要素に支配されるし、実用翼型としては低速性能との妥協も必要であろう。これらは今後実験データの積重ねによって解明される問題であり、翼型研究の次の段階の仕事は主としてこの分野で展開するのではあるまいか。

最後に“直接問題”に関する最近の成果を一、二紹介する。直接問題では翼型形状をあらかじめ与えるから isentropic mixed flow の得られる保証はなく、流れを解くさいには衝撃波の出現を覚悟し、その用意がなければならない。そのため人工的粘性の導入など数値計算上の技術が開発されている。直接問題のうち、非定常運動方程式を時間を追って数値的に解き、その極限として定常解を求める方法は MAGNUS & YOSHIMURA³⁶⁾ を始め多くの人が試み、かなりの成果を得ている。LAX & WENDROFF 法の応用が主体で、これらは流体力学の基礎式を電子計算機の助けを借りて解こうとする一つの流れに属すると見てよからう。これらについては里深³⁷⁾の展望に詳述されている。

最近、圧縮流の定常方程式を物理面で、あるいは便利な面に変換した上で relaxation で解く方法が予想外の進展を見せている。Relaxation 途上で、grid 上の各点で速度を計算して亜音速か超音速かを判断し、楕円型と双曲型とにそれぞれ適した差分のとり方を使い分ける³⁸⁾などの技術が功を奏しているようである。MURMAN & COLE³⁹⁾ および KRUPP & MURMAN³⁹⁾ は遷音速小じょう乱方程式を差分化して、前者は揚力をもたない翼型の場合を、後者は揚力をもつ翼型と軸対称物体を取り扱い、いくつかの例を計算している。STEGER & LOMAX⁴⁰⁾ は圧縮流の完備した式 (小じょう乱でなく) を適当な座標に変換した上で同様の計算を揚力あり、なしの場合につき行なっている。さらに GARABEDIAN & KORN²⁶⁾ は、純亜音速の翼型解析に

広く利用される SELLS⁴¹⁾ の方法 (微分方程式の座標を変換して翼のまわりの流れを単位円—物理面無限遠点とその中心となるよう—の内部領域に写像する) と MURMAN & COLE の差分方式とを組み合わせる方法を編み出し、KORN の揚力をもつ翼型の一つにつき設計点および設計点外での圧力分布を求め、KORN の理論および実験と比較し良好な結果を示しているのが印象的である。第 16 図に analysis と注記してある曲線がそれである。(ここに示したのは設計点での計算。)

最後に面積法則の創案者である WHITCOMB が“supercritical wing”なる名称で遷音速翼を開発し、飛行試験を行なっているとの報道があるが、詳細不明で紹介できないのが残念である。噂によれば第 16 図の KORN 翼型に似た形状とのことである²⁶⁾。

本講座を書くにあたり最新の文献を提供して下さいた佐藤淳造氏に厚く感謝の意を表する。

付 録

〔I〕 基礎方程式の誘導

$$\text{連続の式: } (\rho u / \rho_0)_x + (\rho v / \rho_0)_y = 0 \quad (\text{A} \cdot 1)$$

および渦なしの条件

$$v_x - u_y = 0 \quad (\text{A} \cdot 2)$$

から次式で定義される速度ポテンシャル Φ , 流れ関数 Ψ を導く

$$\Phi_x = u, \quad \Phi_y = v; \quad \Psi_x = -\rho v / \rho_0, \quad \Psi_y = \rho u / \rho_0 \quad (\text{A} \cdot 3)$$

ただし ρ_0 は常数, ここでは渦み点の密度をとる。(A・3) より,

$$\begin{aligned} d\Phi + i(\rho_0/\rho)d\Psi &= (u dx + v dy) \\ &+ i(-v dx + u dy) = (u - iv)(dx + idy) \\ &= q e^{-i\theta} dz \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

よって q, θ を独立変数とすると

$$\left. \begin{aligned} \partial z / \partial q &= (e^{i\theta}/q)(\Phi_q + i(\rho_0/\rho)\Psi_q) \\ \partial z / \partial \theta &= (e^{i\theta}/q)(\Phi_\theta + i(\rho_0/\rho)\Psi_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 5)$$

これより $\partial^2 z / \partial q \partial \theta = \partial^2 z / \partial \theta \partial q$ の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} i(e^{i\theta}/q)(\Phi_q + i(\rho_0/\rho)\Psi_q) \\ = -(e^{i\theta}/q^2)\Phi_\theta + ie^{i\theta}[d(\rho_0/\rho q)dq]\Psi_\theta \end{aligned}$$

この実数部と虚数部をとればポッドグラフ式:

$$\Phi_q = q[d(\rho_0/\rho q)/dq]\Psi_\theta, \quad \Phi_\theta = (\rho_0 q/\rho)\Psi_q \quad (\text{A} \cdot 6)$$

を得る。

断熱法則 $p = k\rho^\gamma$ (k は常数) を仮定すれば BERNOULLI の式は

$$\begin{aligned} q^2/2 + \int dp/\rho &= (q^2/2 + \{k\gamma/(\gamma-1)\}\rho^{\gamma-1}) \\ &= \text{const} = q_{\max}^2/2 \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

$q=0$ のとき $\rho=\rho_0$ で, $\{k\gamma/(\gamma-1)\}\rho_0^{\gamma-1}=q_{\max}^2/2$

これと(A・7)より, $\tau = q^2/q_{\max}^2$ を用いて

$$\rho/\rho_0 = (1-\tau)^{1/(\gamma-1)} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

これを(A・6)に入れ, q をすべて τ に変えれば

$$\left. \begin{aligned} P(\tau) \cdot \partial \Phi / \partial \tau &= \partial \Psi / \partial \theta \\ Q(\tau) \partial \Psi / \partial \tau &= \partial \Phi / \partial \theta \\ P(\tau) &= \frac{2(\gamma-1)\tau}{(\gamma+1)\tau - (\gamma-1)} (1-\tau)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ Q(\tau) &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 9)$$

が得られる。これらより Φ を消去して本文(3)式を得る。

また別途(A・7)より, $d\rho/d\rho = a^2$ (局音速)として,

$$q dq + d\rho/\rho = u du + v dv + (a^2/\rho) d\rho = 0 \quad (\text{A} \cdot 10)$$

これと(A・1)より ρ を消去して

$$(a^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (a^2 - v^2)v_y = 0 \quad (\text{A} \cdot 11)$$

これと渦なしの条件(A・2)とを

$$\left. \begin{aligned} u_x &= jv_y, u_y = -jx_v, v_x = -jy_u, v_y = jx_u; \\ j &= u_x v_y - u_y v_x \text{ (Jacobian)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 12)$$

により変換すれば本文(92, 93)式となる。

また本文 7. までの理論では流れ関数をホドグラフ面で求めることに終始するが, そのあと物理面で物体形状 ($\Psi=0$ の軌跡), また必要なら流線形状を求めることが残っている。その変換には(A・4)を用いる。具体的には(A・6)を用いて(A・5)より Φ を消去し, q を τ に直した次式を用いる:

$$\left. \begin{aligned} z_\theta &= \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1/2} \cdot \frac{2\tau}{(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}} \cdot e^{i\theta} \left(\Psi_\tau + \frac{i}{2\tau} \Psi_\theta \right) \\ z_\tau &= \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1/2} \frac{2\tau}{(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}} \\ &\quad \times e^{i\theta} \left(\frac{i}{2\tau} \Psi_\tau - \frac{1-(\gamma+1)\tau/(\gamma-1)}{4\tau^2(1-\tau)} \Psi_\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 13)$$

(ただし $\tau_1 = 1/q_{\max}^2$)。上式より z が計算できるが, それは Ψ の計算に劣らず手数のかかる仕事である。

(II) 微分方程式の変換

上記微分方程式(A・6)より出発して, 独立変数のうち q の代わりに別の尺度を用いて方程式を変換しいくらか整った形にすることができ, 解の性質を調べるときに利用される。 $\lambda = \lambda(q)$ を新しい変数とすると(A・6)は

$$\left. \begin{aligned} \lambda'(q) \Phi_\lambda &= q(d(\rho_0/\rho q)/dq) \Psi_\theta \\ \Phi_\theta &= (\rho_0 q/\rho) \lambda'(q) \Psi_\lambda \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 14)$$

BERNOULLI の式(A・10)を用いて $q(d(\rho_0/\rho q)/dq)$ を

$-(\rho_0/\rho q)(1-M^2)$ と書き ($M=q/a$), $1-M^2 > 0$ (純亜音速) のとき

$$\lambda'(q) = \sqrt{1-M^2}/q,$$

$$\text{すなわち } \lambda(q) = -\int_q^a \sqrt{1-M^2} \cdot dq/q \quad (\text{A} \cdot 15)$$

と置く (積分の上端には音速 a を選ぶ)。すると(A・14)は

$$\Phi_\lambda = -\lambda'(q)(q\rho_0/\rho)\Psi_\theta, \quad \Phi_\theta = \lambda'(q)(q\rho_0/\rho)\Psi_\lambda \quad (\text{A} \cdot 17)$$

さらに

$$\lambda'(q)(q\rho_0/\rho)(\sqrt{1-M^2}\rho_0/\rho) = 1/[V(\lambda)]^2 \quad (\text{A} \cdot 18)$$

と置けば

$$\begin{aligned} V &= [(1-\tau)^{1/\tau} \cdot (1-\tau/\tau_*)]^{1/4} \\ &= [-P(\tau)/Q(\tau)]^{1/4} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 19)$$

と表わされる ($\tau_* = (\gamma-1)/(\gamma+1)$ で音速のときの τ の値)。すると(A・17)は

$$-[V(\lambda)]^2 \cdot \Phi_\lambda = \Psi_\theta, \quad [V(\lambda)]^2 \Phi_\theta = \Psi_\lambda \quad (\text{A} \cdot 20)$$

これから Φ を消去すれば

$$\Psi_{\lambda\lambda} + \Psi_{\theta\theta} = T\Psi_\lambda \quad (\text{A} \cdot 21)$$

ここに

$$\begin{aligned} T &= 2V'/V = -\{d/d\lambda \cdot (\rho_0 \sqrt{1-M^2}/\rho)\} \\ &\quad \div (\rho_0 \sqrt{1-M^2}/\rho) \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 22)$$

さらに従属変数 Ψ も, 次の Ψ^0 に置換える。

$$\Psi(\lambda, \theta) = V(\lambda) \cdot \Psi^0(\lambda, \theta) \quad (\text{A} \cdot 23)$$

すると(A・21)は

$$\Psi_{\lambda\lambda}^0 + \Psi_{\theta\theta}^0 + F(\lambda) \cdot \Psi^0 = 0 \quad (\text{A} \cdot 24)$$

となる。ここに

$$F(\lambda) = -\frac{d^2}{d\lambda^2} \left(\frac{1}{V(\lambda)} \right) \bigg/ \left(\frac{1}{V(\lambda)} \right) = \frac{V''}{V} - \frac{2V'^2}{V^2} \quad (\text{A} \cdot 25)$$

(A・21), (A・24) のように方程式が簡単化されたのは変数 λ の採用による。(A・15) で定義された λ を τ で表わすと,

$$\begin{aligned} \lambda \left(= -\int_q^a \frac{\sqrt{1-M^2}}{q} dq \right) &= \tau_*^{-1/2} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{\tau_* - \tau}{1 - \tau}} \\ &\quad - \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1 - \tau/\tau_*}{1 - \tau}} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 26)$$

となる。 λ の値は $q=0$ で $-\infty$, $q=a_*$ (音速) で 0; 超音速では虚数となり通常使われない。

しかし超音速, すなわち λ を虚数にまで拡張して $\lambda = iA$ (A : 実数) とすれば, A は PRANDTL-MEYER 関数⁴²⁾

$$A = \int_a^q \sqrt{M^2 - 1} \cdot dq/q \quad (\text{A} \cdot 27)$$

である。 A を用いるとたとえば(A・21)は $\Psi_{AA} - \Psi_{\theta\theta} = T_1(A)\Psi_A$ の形となり, これは双曲型の微分方程式

で,

$$d\lambda \pm d\theta = 0 \quad (\text{A} \cdot 28)$$

なる characteristics をもつ.

さて, 亜音速の λ に戻り, 物体まわりの流れを取り扱うさいはこれに常数 σ を加え,

$$s = \lambda + \sigma \quad (\text{A} \cdot 29)$$

を変数とする方が便利である. ここに σ は

$$\sigma = -\{(\gamma+1)/(\gamma-1)\}^{1/2} \tanh^{-1}\{(\gamma-1)/(\gamma+1)\}^{1/2} + (1/2) \log \{2(\gamma-1)\} \quad (\text{A} \cdot 30)$$

と表わされるもので, これにより $\tau \rightarrow 0$ ($q_{\max} \rightarrow \infty$) で

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} e^{2s}/\tau = 1 \quad (\text{A} \cdot 31)$$

すなわち τ の小さいとき $s \approx \log(q/q_{\max})$ なる性質をもたせることができる. σ は常数だから (A・21), (A・24) の微分方程式は変数 λ を s と書き直しても同型である.

(A・24) から, 例えば次のようなことが導き出せる. $\mathcal{T}^0 = \phi_s^0 \cdot e^{i\sigma}$ と置いて変数分離すると,

$$(d^2/ds^2)\phi_s^0 - \nu^2 \phi_s^0 + F(s)\phi_s^0 = 0 \quad (\text{A} \cdot 32)$$

これより $|\nu|$ の大きいとき $\phi_s^0 \sim e^{\nu s}$, したがって

$$\phi_s^0 (\equiv \nabla \phi_s^0) \sim V \cdot e^{\nu s} \quad (\text{A} \cdot 32)$$

であることが直感的に分かる (ただし亜音速に限る).

(III) CHAPLYGIN の特解

本文 2. に述べたように微分方程式 (3) の特解は

$$\left. \begin{aligned} \phi_s(\tau) e^{\pm i\nu\theta} \\ \text{ただし } \phi_s(\tau) = \tau^{1/2} \cdot F(a_\nu, b_\nu; \nu+1; \tau) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 33)$$

である. ここに a_ν, b_ν は次式よりきめられる.

$$\left. \begin{aligned} a_\nu + b_\nu &= \nu - 1/(\gamma - 1) \\ a_\nu b_\nu &= -\nu(\nu+1)/2(\gamma - 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 34)$$

(3) 式の変数分離によって得られる常微分方程式:

$$\begin{aligned} \tau(1-\tau) \frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left(1 + \frac{2-\gamma}{\gamma+1} \tau\right) \frac{df}{d\tau} \\ - \nu^2 \left\{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tau\right\} \cdot \frac{1}{4\tau} f = 0 \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 35)$$

について, i) ν が整数でないとき, その独立な解は $\phi_s(\tau)$ と $\phi_{-s}(\tau)$ である.

ii) $\nu = 2, 3, \dots, \nu, \dots$ のとき, 独立な解は一つは $\phi_s(\tau)$, 一つは CHAPLYGIN の第二種関数 (次式で表わされる) である:

$$\phi_s^*(\tau) = \lim_{\nu \rightarrow -n} \partial/\partial \nu [(\nu+n)\phi_s(\tau)] \quad (\text{A} \cdot 36)$$

iii) $\nu = \pm 1$ のとき解は closed form で書ける:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \{(\gamma-1)/\gamma\} \tau^{-1/2} \{1 - (1-\tau)^{\gamma/(\gamma-1)}\} \\ \phi_{-1} &= \tau^{1/2} + \phi_1/2(\gamma-1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 37)$$

iv) $\nu = 0$ のときの解は, $\phi_0 = 1$ と

$$\begin{aligned} [(\partial/\partial \nu)\phi_s(\tau)]_{\nu=0} = \int_0^\tau \{(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}/2\tau\} d\tau \\ (\text{A} \cdot 38) \end{aligned}$$

(A・33) 式中の超幾何関数を級数展開して次のことが分かる: すなわち $\phi_s(\tau)$ は, 複素変数 ν の関数と見ると, $\nu = -2, -3, \dots, -n, \dots$ で単純な極をもち, そこでの留数は

$$\lim_{\nu \rightarrow -n} [(\nu+n)\phi_s(\tau)] = -nC_n \phi_n(\tau) \quad (\text{A} \cdot 39)$$

ここに,

$$C_n = \frac{(a_n-1)!(n-b_n)!}{(a_n-n-1)!(-b_n)!(n!)^2} \quad (\text{A} \cdot 40)$$

これらは頻繁に用いられる.

(IV) e_k -transform

収束のおそい級数を早いものに変換する e_k -transform の威力については SHANKS¹⁶⁾ の示した例が印象的である. いま $\tan^{-1} 1 = \pi/4$ なることより $\tan^{-1} x$ の級数展開式を利用して π を計算しようとする. すなわち LEIBNITZ の級数: $\pi = 4 - (4/3) + (4/5) - (4/7) + \dots$. この右辺はすこぶる収束がおそく, “美しいが実用上役に立たない” 級数である. 10 項までの和をとっても $\pi \approx 3.0418\dots$, すなわち一桁の精度しかない. 8 桁の精度で π を求めるには, 信じ難いことであるが, 約 40,000,000 項の和が必要となる. ところでその最初の 10 項の値を知り e_k -transform を適用すれば, $\pi \approx 3.1415927$ すなわち 8 桁の精度が得られるのである.

文 献

- 1) 佐藤淳造: Peak 翼型について. 日本航空宇宙学会誌, 18 巻, 201 号, pp. 374-388 (1970/10).
- 2) PEARCEY, H. H.: The Aerodynamic Design of Section Shapes for Swept Wings. Advances Aero. Sci., Vol. 3 (1962), Proc. 2nd. Internat. Congr. Aero. Sci., pp. 277-322.
- 3) HAY, J. A.: Vickers V. C. 10. Part 1-Aerodynamic Design. Aircraft Engg. Vol. 34, pp. 158-164 (1962).
- 4) Hawker Siddeley Trident, Aerodynamic Design and Flying Controls. Aircraft Engg. Vol. 36, pp. 172-181 (1964).
- 5) PEARCEY, H. H. & OSBORNE, J.: Some Problems and Features of Transonic Aerodynamics. ICAS Paper, No. 70-14 (1970).
- 6) LEGENDRE, R.: Calcul d'un Profil d'Aile Subsonique ou Transsonique. Recherche Aéro., No. 126 pp. 3-13 (1968).
- 7) CHAPLYGIN, S. A.: On Gas Jets. Sci. Memo. Moscow Univ. Math. Phys. No. 21 (1904). Transl. NACA TM 1063 (1944).
- 8) Lighthill, M. J.: The Hodograph Transformation in Transonic Flow. II. Auxiliary Theorems on the Hypergeometric Functions. III. Flow Round a Body. Proc. Roy. Soc. London, A 191, pp. 341-369 (1947).
- 9) CHERRY, T. M.: Flow of a Compressible Flow About a Cylinder. Proc. Roy. Soc. London, A 192, pp. 45-79 (1947).
- 10) GOLDSTEIN, S., Lighthill, M. J., & Craggs, J. W.: On the Hodograph Transformation for High-Speed Flow. I. A Flow Without Circulation. Quart. Jour. Mech. & Appl. Math. Vol. 1, pp.

- 344-357 (1948).
- 11) CHERRY, T.M.: Numerical Solutions for Transonic Flow. Proc. Roy. Soc. London, A 196, pp. 32-36 (1949).
 - 12) MORAWETZ, C.S.: On the Non-Existence of Continuous Transonic Flows Past Profiles, I~III. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 9, pp. 45-68(1956); Vol. 10, pp. 117-131 (1957); & Vol. 11, pp. 129-144 (1958); MORAWETZ, C.S.: Non-Existence of Transonic Flow Past a Profile. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 17, pp. 357-369 (1964).
 - 13) NIEUWLAND, G.Y.: The Computation by Lighthill's Method of Transonic Potential Flow Around a Family of Quasi-Elliptical Aerofoils. NLR-TR T. 83 (1964).
 - 14) BOERSTOEL, J.W. A Survey of Symmetrical Transonic Potential Flows Around Quasi-Elliptical Aerofoil Sections. NLR-TR T. 136 (1967).
 - 15) LEVEY, H.C.: High Speed Flow of Gas Past an Approximately Elliptic Cylinder. Proc. Cambr. Phil. Soc., Vol. 46, pp. 479-491 (1950). また A Shock-Free Airfoil. Jour. Aero. Sci. Vol. 23, No. 12, pp. 1129-1130 (1956).
 - 16) SHANKS, D.: Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences. J. Math. Phys., Vol. 34, pp. 1-42 (1955).
 - 17) WYNN, P.: The Rational Approximation of Functions Which Are Formally Defined by a Power Series Expansion. Math. Comp., Vol. 14, No. 70, pp. 147-186 (1960).
 - 18) LIGHTHILL, M.J.: On the Hodograph Transformation for High Speed Flow. II. A Flow with Circulation. Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 1, pp. 442-450 (1948).
 - 19) CHERRY, T.M.: Flow of a Compressible Fluid About a Cylinder, II. Flow with Circulation. Proc. Roy. Soc. London, A. 196, pp. 1-31 (1949).
 - 20) NIEUWLAND, G.Y.: Transonic Potential Flow Around a Family of Quasi-Elliptical Aerofoil Sections. NLR-TR T. 172 (1967).
 - 21) BOERSTOEL, J.W. & UIJLENHOET, R.: Lifting Aerofoils with Supercritical Shock-Free Flow. NLR-MP 70015 U (1970).
 - 22) 高梨進: 揚力をもつ翼型まわりの遷音速連続流の一解法, 航技研報告近刊.
 - 23) KORN, D.G.: Computation of Shock-Free Transonic Flows for Airfoil Design. Courant Inst. of Math. Sci., New York Univ. Rep. NYO-1480-125 (1969).
 - 24) GARABEDIAN, P.R. & LIEBERSTEIN, H.M.: On the Numerical Calculation of Detached Bow Shock Waves in Hypersonic Flow. J. Aero. Sci., Vol. 25, pp. 109-118 (1958).
 - 25) たとえば FORSYTHE, G.E. & WASOW, W.R.: Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. John Wiley & Sons. (1960).
 - 26) KACPRZYNSKI, J.J., OHMAN, L.H., GARABEDIAN, P.R., & KORN, D.G.: Analysis of the Flow Past a Shockless Lifting Airfoil in Design- and Off-Design Conditions. Nat. Res. Council of Canada, Aero. Rep. LR-554 (Nov. 1971).
 - 27) BEVIERRE, P.: Calcul Numérique de Profil d'Ailes Subcritiques par la Méthode de l'Hodographe. AGARD C.P. 35, pp. 8-1~8-11 (1968).
 - 28) LEGENDRE, R.: Singularité de l'Hodographe de l'Écoulement Plan Réversible d'un Fluide Compressible autour d'un Profil Portant. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 266, Série A, pp. 250-253(1968/1/22).
 - 29) RIGAUT, F.: Détermination Analogique de Profil d'Aile en Régime Transsonique. AGARD C.P. 35, pp. 7-1~7-20, (1968).
 - 30) SPEE, B.M. & UIJLENHOET, R.: Experimental Verification of Shock-Free Transonic Flow Around Quasi-Elliptical Aerofoil Sections. NLR-MP 68003 U, (1968).
 - 31) 重見孝, 竹内理, 高梨進, 鈴木弘一, 中村正剛: 遷音速流厳密解により設計された衝撃波のない, 揚力をもつ翼型の風洞試験. 航技研資料近刊.
 - 32) SECOMB, D.A.: A wind Tunnel Investigation of Levey's Shock-Free Aerofoil. Note Aero. 325, Aero. Res. Lab. Australia, (1970).
 - 33) TOMOTIKA, S. & TAMADA, K.: Studies on Two-Dimensional Transonic Flows of Compressible Fluids, III. Quart. Appl. Math. 9, pp. 129-147 (1951).
 - 34) SPEE, B.M.: Wave Propagation in Transonic Flow Past Two-Dimensional Aerofoils. NLR TN 123 (1966); SPEE, B.M.: Investigations on the Transonic Flow Around Aerofoils. NLR TR 69122 U, (1969).
 - 35) NIEUWLAND, G.Y. & SPEE, B.M.: Transonic Shock-Free Flow, Fact or Fiction? NLR-MP 68004 U (1968).
 - 36) MAGNUS, R., GALLAHER, W., & YOSHIHARA, H.: Inviscid Supercritical Airfoil Theory. AGARD C.P. 35, pp. 3-1~3-5(1968); また MAGNUS, R., & YOSHIHARA, H.: Inviscid Transonic Flow over Airfoils. AIAA Paper No. 70-47 (1970).
 - 37) 里深信行: 圧縮性流体力学における数値計算. 日本航空宇宙学会誌, 18巻 197号, pp. 234-243 (1970/6).
 - 38) MURMAN, E.M. & COLE, J.D.: Calculation of Plane Steady Transonic Flows. AIAA Jour. Vol. 9, No. 1 (Jan. 1971).
 - 39) KRUPP, J.A. & MURMAN, E.M.: The Numerical Calculation of Steady Transonic Flows Past Thin Lifting Airfoils and Slender Bodies. AIAA Paper 71-566 (1971).
 - 40) STEGER, J.L. & LOMAX, H.: Numerical Calculation of Transonic Flow About Two-Dimensional Airfoils by Relaxation Procedure. AIAA Paper 71-569 (1971).
 - 41) SELLS, C.C.L.: Plane Subcritical Flow Past a Lifting Aerofoil. Proc. Roy. Soc. A. 308, pp. 371-401 (1968).
 - 42) たとえば LIEPMANN, H.W. & ROSHKO, A.: Elements of Gasdynamics. John Wiley & Sons (1957), p. 98.
 - 43) LOCK, R.C.: Test Cases for Numerical Methods in Two-Dimensional Transonic Flows. AGARD Rep. No. 575 (1970).