技 術 論 文

CONTRIBUTED PAPERS

収束デトネーションの摂動理論*

Perturbation Theory of Imploding Detonations

藤 原 俊 隆**・滝 史 郎**

Toshitaka FUJIWARA・Shiro TAKI

Abstract

Nonsteady one-dimensional imploding detonations of cylindrical and spherical symmetry are analyzed by using a perturbation method. Nonsteady one-dimensional equations are perturbed with respect to time through the parameter $\varepsilon = 1/n[(\bar{t}_0/\bar{t})^n - 1]$, which vanishes initially (at $\bar{t} = \bar{t}_0$) while tends to infinity at the moment of collapse (at $\bar{t} = 0$). Then there result a series of ordinary differential equations and perturbed shock relations corresponding to the each exponent of ε . Applying the regularity condition similar to GUDERLEY's to each differential equation, the perturbed detonation velocity up to the third order of ε is obtained in an explicit algebraic form. Different from the usual perturbed solution, the obtained detonation velocity provides the time-dependency identical with that for the self-similar solution when $\varepsilon \rightarrow \infty$. Consequently, the detonation velocity profile holds in the fairly wide range of implosion and shows a reasonable coincidence with the existing experiments.

1. 緒 言

収束する衝撃波やデトネーションの理論的取り扱い、まず GUDERLEY その他¹⁻⁵⁾によって自己相似法を用いてなされた。自己相似法は簡単かつ爆風理論で目覚ましい成功を収めたことがその基本になっている。しかしながら自己相似解が正しいのは対称中心近くの極めて強い衝撃波またはデトネーションに対してであって、収束する衝撃波またはデトネーションの伝播のようすを広範囲に記述するには他の方法を適用しなければならない。

通常“面積法則”と呼ばれる CHISNEL⁶⁾, CHESTER⁷⁾,

WHITHAM⁸⁾の方法は後方特性曲線を省略しているが、面積収縮効果による衝撃波またはデトネーションの増幅をかなり正しく記述している。C-C-W 法に対する修正法は TOPCHIAN ら⁹⁾によって提案されており、また LEE ら¹⁰⁾, HIGASHINO ら¹¹⁾は C-C-W 法による結果と実験のかなり良い一致を見出している。しかしながら C-C-W 法は後方特性曲線を省略しているために広い範囲の挙動は原理的に疑問になるはずである。

爆風に対して OSHIMA¹²⁾が展開した準相似法はかなり広範囲の実験と一致する結果を与える。この方法は LEE ら^{13, 14)}によって収束波の問題に拡張された。GUDERLEY の正則条件¹⁵⁾を用いた準相似法による解析結果はアセチレン酸素混合気のデトネーション圧力をかなり良く与えている。ただし、比較される実験データはかなり高い伝播マッハ数に基づいている。

本研究では上に述べたいずれの方法とも異なり、収束デトネーションの初期状態として CHAPMAN-JOUGUET マッハ数が採用され、そこからの摂動の方法が用いられている。したがって原理的に、伝播マッハ数がたとえ低くとも少なくとも CHAPMAN-JOUGUET マッハ数に近い間は正しい解を与えるため、上述の幾つかの方法に対する相補的な方法と考えられる。

時間 $\bar{t}$ と定数 n を含むパラメータ $\varepsilon = \{(\bar{t}_0/\bar{t})^n - 1\}/n$ を導入し、非定常一次元の気体力学方程式とユゴニオ関係式を ε で級数展開すると、 ε の各次数に対応する常微分方程式群を得る。各次数の方程式群に正則条件を用いると伝播速度の CHAPMAN-JOUGUET 値からの摂動が得られる。正則条件は一般的な CHAPMAN-JOUGUET 条件の形をしている¹⁵⁻²²⁾。数値計算なしに ε^3 のオーダーまでの伝播速度が得られた。

2. 基礎方程式

基礎方程式をつくるに当たって次の仮定を行なう。

- (i) 円筒および球対称の非定常一次元過程を考える。

* 1971年9月10日ショック・チューブ・シンポジウム、および1971年12月3日第9回燃焼シンポジウムにて発表。昭和47年1月20日原稿受理。

** 名古屋大学工学部航空学科。

- (ii) 輸送現象は無視する.
- (iii) デトネーション波は不連続面である.
- (iv) 気体は熱的かつ熱量的に完全である.
- (v) 初期デトネーションは CHAPMAN-JOUQUET デトネーション速度で, 対称中心へ向かって運動している.

これらの仮定のもとに, デトネーション波後方を記述する質量・運動量・エネルギーの各保存方程式および状態方程式は次の様に表わされる.

$$\text{質 量; } \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{t}} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + j \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = 0, \quad (j=1: \text{円筒対称}, 2: \text{球対称}) \quad (2.1)$$

$$\text{運動量; } \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = 0, \quad (2.2)$$

$$\text{エネルギー; } \frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \right) = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{状 態; } \bar{p} = \bar{\rho} \bar{R} \bar{T} = \bar{\rho} \bar{R}^0 \bar{T} \sum_{i=1}^N Y_i / M_i, \quad (2.4)$$

ただし, $\bar{\rho}$ は密度, $\bar{u}$ は流速, $\bar{p}$ は圧力, γ は断熱指数, $\bar{T}$ は温度, $\bar{R}$ は気体定数, $\bar{R}^0$ は普偏気体定数, M_i は i 成分気体の分子量, Y_i は i 成分気体の質量分率である. ここでは完全気体を仮定しているので, (2.4) 式中の質量分率 Y_i は一定でデトネーション後方では既燃混合気体の凍結した値を持つ. これらの基礎方程式は円筒または球座標系で表わされており, 第1図に示されるようにデトネーションの収束中心を原点とし, デトネーションの伝播方向と反対方向を正にもつ. (2.1)~(2.3) 式で用いた全微分は

$$\frac{d}{d\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \quad (2.5)$$

を表わす. $\bar{\rho}$ と $\bar{p}$ との関係係数

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} = \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} \quad (2.6)$$

$$\bar{c}^2 = \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\rho}} \right)_{\bar{s}, Y_i} \quad (\text{凍結音速}) \quad (2.7)$$

を用いれば (2.1) 式は次のようになる.

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{t}} + j \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = 0, \quad (2.8)$$

座標系を実験室座標系 (r, t) から衝撃波座標系 ($\xi, \bar{t}$) に変換すると, (2.8), (2.2), (2.3) 式は

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + (\bar{D} - \bar{u}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} - \gamma \bar{p} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - j \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + (\bar{D} - \bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\sigma}{\bar{p}^\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} + (\bar{D} - \bar{u}) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = 0, \quad (2.11)$$

ただし, $\bar{u}$ はデトネーション面後方で正の値を持つようにその符号が逆にされた. 第1図に示されるように

$\bar{D}$ はデトネーション伝播速度で, 実験室座標系 (r, t) と衝撃波座標系 ($\xi, \bar{t}$) との関係は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= (r - r_0) + \int_{t_0}^t \bar{D}(\bar{t}) d\bar{t}, \\ \bar{t} &= t \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

ここで r_0, t_0 はデトネーションの初期位置と初期時刻である. さらに (2.10), (2.11) 式で用いた σ と α は次の量である.

$$\sigma = \frac{\bar{p}^\alpha}{\bar{\rho}}, \quad \alpha = \frac{1}{\gamma} \quad (2.13)$$

第1図 座 標 系

境界条件として, デトネーション直後の状態が次のユゴニオ関係式から得られる.

$$\bar{\rho}_1 \bar{D} = \bar{\rho}_2 (\bar{D} - \bar{u}_2), \quad (2.14)$$

$$\bar{\rho}_1 \bar{D}^2 + \bar{p}_1 = \bar{\rho}_2 (\bar{D} - \bar{u}_2)^2 + \bar{p}_2, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{2} \bar{D}^2 + \bar{h}_1 = \frac{1}{2} (\bar{D} - \bar{u}_2)^2 + \bar{h}_2, \quad (2.16)$$

ここで添字 1 と 2 はそれぞれデトネーション直前, 直後の状態を示す. また $\bar{h}$ は単位質量あたりのエンタルピーで

$$\bar{h} = \sum_{i=1}^N Y_i (\bar{h}_i + \bar{h}_i^0) \quad (2.17)$$

で与えられる. ただし $\bar{h}_i^0$ は $\bar{T} = \bar{T}^0$ における生成エンタルピー, 添字 i は i 成分の気体であることを示す. i 成分気体のエンタルピーは

$$\bar{h}_i(\bar{T}) = \int_{T^0}^{\bar{T}} \bar{c}_{pi}(\bar{T}) d\bar{T}, \quad (2.18)$$

ただし $\bar{c}_{pi}$ は i 成分気体の単位質量あたりの定圧比熱である.

3. 無次元表示

摂動を行なうため, 基礎方程式とユゴニオの衝撃波関係式を無次元形で表わす. 次の無次元量を導入する.

$$\left. \begin{aligned} p &= \bar{p} / \bar{p}_1, \quad \rho = \bar{\rho} / \bar{\rho}_1, \\ u &= \bar{u} / (\bar{p}_1 / \bar{\rho}_1)^{1/2}, \quad t = \bar{t} / \bar{t}_0, \\ \xi &= \bar{\xi} / \bar{l}, \quad r = \bar{r} / \bar{l}, \\ D &= \bar{D} / (\bar{p}_1 / \bar{\rho}_1)^{1/2}, \quad c = \bar{c} / (\bar{p}_1 / \bar{\rho}_1)^{1/2}, \\ h &= \bar{h} / (\bar{p}_1 / \bar{\rho}_1), \quad \sigma = \bar{\sigma} / \bar{\sigma}_1, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ただし l は基準長さで

$$l = (-\bar{t}_0) \cdot \bar{D}(\bar{t}_0) \quad (3.2)$$

ととられ、デトネーションの経路長 r_0 のオーダーの大きさである。 $\bar{t}_0$ は初期時刻でデトネーションが中心に到達する時刻を零にとるので負の値を持つ。このような無次元量を導入すれば基礎方程式 (2.9)~(2.11) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (D-u) \frac{\partial p}{\partial \xi} - \gamma p \frac{\partial u}{\partial \xi} - j \gamma \frac{p u}{r} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (D-u) \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\sigma}{p^a} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (D-u) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = 0. \quad (3.5)$$

ユゴニオ関係式 (2.14)~(2.16) 式もまた次のように無次元表示される。

$$D = \rho_2(D-u_2), \quad (3.6)$$

$$D^2 + 1 = \rho_2(D-u_2)^2 + p_2, \quad (3.7)$$

$$\frac{D^2}{2} + h_1 = \frac{1}{2}(D-u_2)^2 + h_2, \quad (3.8)$$

$$h_2 - h_1 = \Delta h + c_p \frac{p_2}{\rho_2}, \quad (3.9)$$

ここで無次元量 Δh , c_p は次のように定義されている。

$$\Delta h = \left[\sum_i (Y_{i,2} - Y_{i,1}) \bar{h}_i^0 - \sum_i Y_{i,1} \int_{T_0}^{T_1} \bar{c}_{pi}(\bar{T}) d\bar{T} + \sum_i Y_{i,2} \left\{ \int_{T_0}^{T'} \bar{c}_{pi}(\bar{T}) d\bar{T} - \bar{c}_{pi}(\bar{T}') \cdot \bar{T}' \right\} \right] / \left(\frac{\bar{p}_1}{\bar{\rho}_1} \right), \quad (3.10)$$

$$c_p = \sum_i \bar{c}_{pi}(\bar{T}') \cdot Y_{i,2} / \left(R^0 \sum_j \frac{Y_{j,2}}{M_j} \right), \quad (3.11)$$

ただし $\bar{T}'$ は次の近似が成立するような $\bar{T}_2$ に近い適当な温度である。

$$\sum_i Y_{i,2} \int_{T'}^{T_2} \bar{c}_{pi}(\bar{T}) d\bar{T} = \sum_i Y_{i,2} (\bar{T}_2 - \bar{T}') \cdot \bar{c}_{pi}(\bar{T}'). \quad (3.12)$$

後に明らかにされるが、本解析ではデトネーションの収束過程で Δh と c_p が一定であると仮定される。すなわち現実にはデトネーションは収束によって加速され $Y_{i,2}$ が変化するけれども、複雑な平衡計算を避けるために、 $Y_{i,2}$ が一定であると仮定する。

4. 摂動理論

次のパラメーターを導入して、偏微分方程式系 (3.3)~(3.5) と衝撃波関係式 (3.6)~(3.9) を展開する。

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\bar{t}_0}{\bar{t}} \right)^n - 1 \right] = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\bar{t}^n} - 1 \right), \quad (4.1)$$

$\bar{t} = \bar{t}_0$ で $\varepsilon = 0$ となり、 $\bar{t} = 0$ で ε は無限大になる。

n は後に定める適当な数である。初期状態付近すなわち $\varepsilon = 0$ に近いうちは ε の n への依存性が小さいことに注意する。時間変化する諸量はそれらの初期状態のまわりに次のように展開される。

$$D(t) = D^{(0)} \{ 1 + \varepsilon \cdot d^{(1)} + \varepsilon^2 \cdot d^{(2)} + \dots \}, \quad (4.2)$$

$$p(t, \xi) = D^{(0)2} \{ p^{(0)}(\xi) + \varepsilon \cdot p^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 \cdot p^{(2)}(\xi) + \dots \}, \quad (4.3)$$

$$u(t, \xi) = D^{(0)} \{ u^{(0)}(\xi) + \varepsilon \cdot u^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 \cdot u^{(2)}(\xi) + \dots \}, \quad (4.4)$$

$$\sigma(t, \xi) = D^{(0)2a} \{ \sigma^{(0)}(\xi) + \varepsilon \cdot \sigma^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 \cdot \sigma^{(2)}(\xi) + \dots \} \quad (4.5)$$

さらに (2.12) 式と (4.1) 式から次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} = - \left[1 + \varepsilon \cdot (1+n) + \varepsilon^2 \cdot \frac{1+n}{2} + \varepsilon^3 \cdot \frac{(1+n)(1-n)}{6} + \dots \right] \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\xi + l^{-1}} \left[1 + \varepsilon \cdot \frac{1}{\xi + l^{-1}} + \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\xi + l^{-1}} \left\{ \frac{d^{(1)} - (1+n)}{2} + \frac{1}{\xi + l^{-1}} \right\} + \varepsilon^3 \cdot \frac{1}{\xi + l^{-1}} \left\{ \frac{d^{(2)} - (1+n)d^{(1)} + 1/2(1+n)(1+2n)}{3} + \frac{d^{(1)} - (1+n)}{\xi + l^{-1}} + \frac{1}{(\xi + l^{-1})^2} + \dots \right\} \right], \quad (4.7)$$

ここで l は r_0 の逆数で

$$l = \frac{1}{r_0} = \frac{\bar{l}}{\bar{r}_0}. \quad (4.8)$$

(4.2)~(4.7) 式の摂動によって偏微分方程式 (3.3)~(3.5) 式は以下のような常微分方程式群を与える。

ε^0 のオーダー:

$$p^{(1)} + (1-u^{(0)}) \frac{d p^{(0)}}{d \xi} - \gamma p^{(0)} \frac{d u^{(0)}}{d \xi} - j \gamma \frac{p^{(0)} u^{(0)}}{\xi + l^{-1}} = 0, \quad (4.9)$$

$$u^{(1)} + (1-u^{(0)}) \frac{d u^{(0)}}{d \xi} - \frac{\sigma^{(0)}}{p^{(0)a}} \frac{d p^{(0)}}{d \xi} = 0, \quad (4.10)$$

$$\sigma^{(1)} + (1-u^{(0)}) \frac{d \sigma^{(0)}}{d \xi} = 0. \quad (4.11)$$

零次の伝播速度 $D^{(0)}$ が CHAPMAN-JOUQUET 速度であると仮定したので、デトネーション直後では

$$1 - u^{(0)} = (\gamma \sigma^{(0)} p^{(0)1-a})^{1/2} = c^{(0)}, \text{ at } \xi = 0, \quad (4.12)$$

なる関係式が成り立つ。(4.9), (4.10) 式を $d p^{(0)}/d \xi$ と $d u^{(0)}/d \xi$ に関して解けば、それらが有限の値を持つためには、(4.12) 式が成り立つところでは

$$a \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} + \frac{u^{(1)}}{1-u^{(0)}} - j \frac{u^{(0)}}{\xi + l^{-1}} = 0, \text{ at } \xi = 0 \quad (4.13)$$

が成立しなければならないことがわかる。この CHAP-

MAN-JOUGUET 条件は物理面での GUDERLEY の正規条件¹⁾と考えることが出来る。

ε^1 のオーダー:

$$2p^{(2)} + (1+n)p^{(1)} + (1-u^{(0)})\frac{dp^{(1)}}{d\xi} + (d^{(1)} - u^{(1)})\frac{dp^{(0)}}{d\xi} - \gamma p^{(0)}\frac{du^{(1)}}{d\xi} - \gamma p^{(1)}\frac{du^{(0)}}{d\xi} - \frac{j\gamma}{\xi + l^{-1}}(p^{(1)}u^{(0)} + p^{(0)}u^{(1)} + \frac{p^{(0)}u^{(0)}}{\xi + l^{-1}}) = 0, \quad (4.14)$$

$$2u^{(2)} + (1+n)u^{(1)} + (1-u^{(0)})\frac{du^{(1)}}{d\xi} + (d^{(1)} - u^{(1)})\frac{du^{(0)}}{d\xi} - \frac{\sigma^{(0)}}{p^{(0)}}\left\{\frac{dp^{(1)}}{d\xi} + \left(\frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}} - a\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}}\right)\frac{dp^{(0)}}{d\xi}\right\} = 0, \quad (4.15)$$

$$2\sigma^{(2)} + (1+n)\sigma^{(1)} + (1-u^{(0)})\frac{d\sigma^{(1)}}{d\xi} + (d^{(1)} - u^{(1)})\frac{d\sigma^{(0)}}{d\xi} = 0. \quad (4.16)$$

これら一次のオーダーの方程式の解の正則条件は次のようになる。

$$\frac{a}{u^{(0)}}\left\{2\frac{p^{(2)}}{p^{(0)}} + (1+n)\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}}\right\} + \frac{1}{1-u^{(0)}}\left\{2\frac{u^{(2)}}{u^{(0)}} + (1+n)\frac{u^{(1)}}{u^{(0)}}\right\} + a\left\{\frac{d^{(1)} - u^{(1)}}{u^{(0)}} + \frac{1-u^{(0)}}{u^{(0)}}\left(a\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}}\right)\frac{d\ln p^{(0)}}{d\xi} + \left(\frac{d^{(1)} - u^{(1)}}{1-u^{(0)}} - \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}}\right)\frac{d\ln u^{(0)}}{d\xi} - \frac{j}{\xi + l^{-1}}\left(\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} + \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} + \frac{1}{\xi + l^{-1}}\right)\right\} = 0, \quad \text{at } \xi = 0. \quad (4.17)$$

ε^2 のオーダー:

$$3p^{(3)} + 2(1+n)p^{(2)} + \frac{1+n}{2}p^{(1)} + (1-u^{(0)})\frac{dp^{(2)}}{d\xi} + (d^{(1)} - u^{(1)})\frac{dp^{(1)}}{d\xi} + (d^{(2)} - u^{(2)})\frac{dp}{d\xi} - \gamma p^{(0)}\frac{du^{(2)}}{d\xi} - \gamma p^{(1)}\frac{du^{(1)}}{d\xi} - \gamma p^{(2)}\frac{du^{(0)}}{d\xi} + \frac{j\gamma}{\xi + l^{-1}}(p^{(2)}u^{(0)} + p^{(1)}u^{(1)} + p^{(0)}u^{(2)}) - \frac{j\gamma}{(\xi + l^{-1})^2}\left\{p^{(1)}u^{(0)} + p^{(0)}u^{(1)} + p^{(0)}u^{(0)}\left(\frac{d^{(1)} - (1+n)}{2} + \frac{1}{\xi + l^{-1}}\right)\right\} = 0. \quad (4.18)$$

$$3u^{(3)} + 2(1+n)u^{(2)} + \frac{1+n}{2}u^{(1)} + (1-u^{(0)})\frac{du^{(2)}}{d\xi} + (d^{(1)} - u^{(1)})\frac{du^{(1)}}{d\xi} + (d^{(2)} - u^{(2)})\frac{du^{(0)}}{d\xi} - \frac{\sigma^{(0)}}{p^{(0)}}\left\{\frac{dp^{(2)}}{d\xi} + \left(a\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}}\right)\frac{dp^{(1)}}{d\xi} + \left\{a\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}}\left(\frac{1+a}{2}\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}}\right) + \frac{\sigma^{(2)}}{\sigma^{(0)}} - a\frac{p^{(2)}}{p^{(0)}}\right\}\frac{dp^{(0)}}{d\xi}\right\} = 0. \quad (4.19)$$

$$3\sigma^{(3)} + 2(1+n)\sigma^{(2)} + \frac{1+n}{2}\sigma^{(1)} + (1-u^{(0)})\frac{d\sigma^{(2)}}{d\xi} + (d^{(1)} - u^{(1)})\frac{d\sigma^{(1)}}{d\xi} + (d^{(2)} - u^{(2)})\frac{d\sigma^{(0)}}{d\xi} = 0. \quad (4.20)$$

これらの方程式の解の正則条件は次のようになる。

$$\frac{a}{u^{(0)}}\left\{3\frac{p^{(3)}}{p^{(0)}} + 2(1+n)\frac{p^{(2)}}{p^{(0)}} + \frac{1+n}{2}\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}}\right\} + \frac{1}{1-u^{(0)}}\left\{3\frac{u^{(3)}}{u^{(0)}} + 2(1+n)\frac{u^{(2)}}{u^{(0)}} + \frac{1+n}{2}\frac{u^{(1)}}{u^{(0)}}\right\} + a\frac{1-u^{(0)}}{u^{(0)}}\left\{\frac{d^{(1)} - u^{(1)}}{1-u^{(0)}} + \left(a\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}}\right)\right\} + \frac{1}{p^{(0)}}\frac{dp^{(1)}}{d\xi} + \left\{\frac{d^{(1)} - u^{(1)}}{1-u^{(0)}} - \frac{p^{(1)}}{p^{(0)}}\right\}\frac{1}{u^{(0)}}\frac{du^{(1)}}{d\xi} + a\frac{1-u^{(0)}}{u^{(0)}}\left\{\frac{d^{(2)} - u^{(2)}}{1-u^{(0)}} + \left(a\frac{p^{(2)}}{p^{(0)}} - \frac{\sigma^{(2)}}{\sigma^{(0)}}\right) - a\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}}\left(\frac{1+a}{2}\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}}\right)\right\}\frac{d\ln p^{(0)}}{d\xi} + \left(\frac{d^{(2)} - u^{(2)}}{1-u^{(0)}} - \frac{p^{(2)}}{p^{(0)}}\right)\frac{d\ln u^{(0)}}{d\xi} + \frac{j}{\xi + l^{-1}}\left(\frac{p^{(2)}}{p^{(0)}} + \frac{p^{(1)}u^{(1)}}{p^{(0)}u^{(0)}} + \frac{u^{(2)}}{u^{(0)}}\right) + \frac{j}{(\xi + l^{-1})^2}\left[\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} + \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} + \left\{\frac{d^{(1)} - (1+n)}{2} + \frac{1}{\xi + l^{-1}}\right\}\right] = 0, \quad \text{at } \xi = 0. \quad (4.21)$$

衝撃波関係式 (3.6)~(3.9) はまた次のようにして (4.3), (4.4) 式と同様に ε で展開される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_2} &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i v_2^{(i)}, \\ u_2 &= D^{(0)} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_2^{(i)}, \\ p_2 &= D^{(0)2} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_2^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

(4.2) 式と (4.22) 式とを衝撃波関係式 (3.6) ~ (3.9) 式に代入して次式を得る。

$$\sum_i \varepsilon^i u_2^{(i)} = \sum_i \varepsilon^i d^{(i)} (1 - \sum_i \varepsilon^i v_2^{(i)}), \quad (4.23)$$

$$\sum_i \varepsilon^i p_2^{(i)} = (\sum_i \varepsilon^i d^{(i)})^2 (1 - \sum_i \varepsilon^i v_2^{(i)}) + \mu_0, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} (1+a)(\sum_i \varepsilon^i d^{(i)})^2 (\sum_i \varepsilon^i v_2^{(i)})^2 \\ - 2\{(\sum_i \varepsilon^i d^{(i)})^2 + \mu_0\} \sum_i \varepsilon^i v_2^{(i)} \\ + (1-a)\{(\sum_i \varepsilon^i d^{(i)})^2 - 2 \cdot \Delta H\} = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

ただし,

$$\Delta H = \Delta h / D^{(0)2} = \mu_0 \cdot \Delta h, \quad (4.26)$$

$$\mu_0 = 1 / D^{(0)2} = 1 / \gamma_1 M_{CJ}^2, \quad (4.27)$$

ここで M_{CJ} はデトネーションの初期伝播マッハ数で、前に述べたように CHAPMAN-JOUGUET マッハ数に等しい。また無次元の定圧比熱 C_P は一定で

$$C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{1}{1 - a} \quad (4.28)$$

第1表 デトネーション波直後の状態の摂動

i	0	1	2	3
$\frac{1+a}{a-\mu_0} \frac{p_2^{(i)}}{A^i}$	$\frac{1+\mu_0}{a-\mu_0}$	1	$\frac{a}{a+\mu_0} + \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(3)}$	$\frac{5a^2-\mu_0^2}{8(a+\mu_0)^2} + \frac{2a}{a-\mu_0} D^{(3)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(3)} \right)^2 + \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(4)}$
$\frac{1+a}{a-\mu_0} \frac{u_2^{(i)}}{A^i}$	1	1	$\frac{1}{2} + \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(3)}$	$\frac{a^2+3\mu_0^2}{8(a+\mu_0)^2} + \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(3)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(3)} \right)^2 + \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(4)}$
$\frac{1+a}{a-\mu_0} \frac{v_2^{(i)}}{A^i}$	$\frac{1+\mu_0}{a-\mu_0}$	-1	$-\frac{\mu_0}{a+\mu_0} - \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(3)}$	$\frac{3a^2-7\mu_0^2}{8(a+\mu_0)^2} - \frac{2\mu_0}{a-\mu_0} D^{(3)} + \frac{1}{2} \left(\frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(3)} \right)^2 - \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} D^{(4)}$
$\frac{1+a}{a-\mu_0} \left(\frac{1+a}{a(1+\mu_0)} \right)^{a_2^{(i)}} \frac{A^i}{A^i}$	$\frac{1+\mu_0}{a-\mu_0}$	0	$\frac{(-a)(a-\mu_0)^2}{2a(1+\mu_0)(a+\mu_0)}$	$-\frac{(a-\mu_0)^2}{(1+\mu_0)} \left\{ \frac{1}{a+\mu_0} - \frac{1-a^2}{3a^2(a+\mu_0)} \right\} + \frac{1-a}{a} \frac{a-\mu_0}{1+\mu_0} D^{(3)}$

であると仮定されている。(4.25) 式の ε^0 のオーダーの項は

$$(1+a)v_2^{(0)} = (1+\mu_0) \pm \{(1+\mu_0)^2 - (1-a^2)(1-2\Delta H)\}^{1/2}$$

となるが、初期に CHAPMAN-JOUGUET 速度をもつと仮定したので平方根の中の量は零になり

$$v_2^{(0)} = \frac{1+\mu_0}{1+a}, \quad (4.29)$$

$$\mu_0 = \sqrt{(1-a^2)(1-2\Delta H)} - 1 \quad (4.30)$$

が得られる。また (4.23) 式と (4.24) 式の ε^0 のオーダーの式に (4.29) 式に代入して

$$p_2^{(0)} = a \frac{1+\mu_0}{1+a}, \quad u_2^{(0)} = \frac{a-\mu_0}{1+a} \quad (4.31)$$

が得られる。

次に (4.25) 式の ε^1 のオーダーの方程式から

$$d^{(1)} = 0 \quad (4.32)$$

でなければならないことが示される。(4.25) 式の ε^2 のオーダーの方程式から $v_2^{(1)}$ が得られ、(4.23)、(4.24) 式の ε^1 のオーダーの方程式から $u_2^{(1)}$ 、 $p_2^{(1)}$ が得られる。同様にしてさらに高次の項が得られる。これらの結果を第1表に示す。ただし第1表では

$$A = \left\{ 2d^{(2)} \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} \right\}^{1/2}, \quad (4.33)$$

$$D^{(i)} = \frac{d^{(i)}}{A^i} \quad (i=2, 3, \dots) \quad (4.34)$$

が用いられている。

5. デトネーションの伝播速度

デトネーション伝播速度の摂動 $d^{(i)}$ は正則条件式 (4.13)、(4.17)、(4.21) 等から固有値として得られる。正則条件式は $\xi=0$ 、すなわちデトネーション直後で成立するから、前に得た $p_2^{(i)}$ 、 $u_2^{(i)}$ 、 $\sigma_2^{(i)}$ をこれらの条件式の $p^{(i)}$ 、 $u^{(i)}$ 、 $\sigma^{(i)}$ としてそれぞれ代入することが出来る。まず (4.13) 式と (4.33) 式から

$$A = \left(2d^{(2)} \frac{a+\mu_0}{a-\mu_0} \right)^{1/2} = \frac{j l}{2} \frac{1+\mu_0}{1+a} \quad (5.1)$$

が得られ、デトネーション速度の二次の摂動 $d^{(2)}$ が

決められる。

デトネーション速度の三次の摂動 $d^{(3)}$ も (4.17) 式から同様にして得られるが、その中に未定の数 n が含まれるので n か $d^{(3)}$ のいずれかの量を適当に与えることが出来る。ところで (4.1) 式で与えた ε は $t=1-\tau$ 、($\tau \ll 1$) に対して

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{t^n} - 1 \right) \approx \tau$$

となり、前にも述べたように初期状態 ($t=1$) 付近では ε は n の値の選択にほとんど依存しない。しかしながら τ が大きくなればそうではなくなるので、2次までの摂動が最も良い近似を与えるように

$$d^{(3)} = 0 \quad (5.2)$$

となるように n を選ぶとよい。そうすれば、(4.17) 式から

$$1+n = \frac{1+a}{2a} \left(\frac{du^{(0)}}{d\xi} \right)_{\xi=0} + A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a} \frac{a-\mu_0}{1+\mu_0} - \frac{a}{a+\mu_0} + \frac{2}{j} \frac{1+a}{1+\mu_0} \right), \quad (5.3)$$

あるいは

$$1+n = \frac{1+a}{2a} \left(\frac{dp^{(0)}}{d\xi} \right)_{\xi=0} + A \left(\frac{1}{2} + \frac{1-a}{2a} \frac{a-\mu_0}{1+\mu_0} - \frac{a}{a+\mu_0} + \frac{2}{j} \frac{1+a}{1+\mu_0} \right), \quad (5.4)$$

ここで $(dp^{(0)}/d\xi)_{\xi=0}$ あるいは $(du^{(0)}/d\xi)_{\xi=0}$ は初期値として与えられる量である。

かくしてデトネーション伝播速度を ε^3 のオーダーまでの近似式で表わせば、(4.32)、(5.2) 式から

$$D = D^{(0)}(1+\varepsilon^2 d^{(2)}) \quad (5.5)$$

この近似式 (5.5) を用いて、(4.8)、(3.5) 式で定義した l は $d^{(2)}$ と n で次の様に表わされる。

$$l = \frac{(-\bar{f}_0) D^{(0)} \cdot (\bar{p}_1/\bar{p}_1)^{1/2}}{\int_{-\bar{f}_0}^0 D^{(0)}(1+\varepsilon^2 d^{(2)}) \cdot (\bar{p}_1/\bar{p}_1)^{1/2} d\bar{f}}$$

第2表 $l=(-i_0)\bar{D}(i_0)/\bar{r}_0$ の r, j, n, M_{CJ} の変化に対する値

r		1.4						1.0					
j		1			2			1			2		
M_{CJ}	n	0.020	0.083	0.150	0.100	0.1415	0.200	0.000	0.050	0.100	0.000	0.050	0.100
∞		0.9278	0.9148	0.8969	0.7777	0.7586	0.7273	0.9469	0.9394	0.9301	0.8477	0.8318	0.8133
10		0.9281	0.9152	0.8973	0.7784	0.7593	0.7280	0.9469	0.9394	0.9302	0.8477	0.8318	0.8133
5		0.9292	0.9164	0.8987	0.7805	0.7617	0.7303	0.9470	0.9395	0.9302	0.8479	0.8319	0.8134
2		0.9378	0.9263	0.9102	0.7991	0.7807	0.7504	0.9498	0.9426	0.9338	0.8540	0.8384	0.8203

r		3.0					
j		1			2		
M_{CJ}	n	0.050	0.100	0.150	0.100	0.181	0.250
∞		0.8857	0.8710	0.8532	0.7147	0.6725	0.6282
10		0.8868	0.8722	0.8545	0.7165	0.6743	0.6300
5		0.8901	0.8757	0.8583	0.7217	0.6797	0.6394
2		0.9121	0.8998	0.8847	0.7592	0.7187	0.6751

$$= \frac{1}{1 + \frac{2d^{(2)}}{(1-n)(1-2n)}} \quad (5.6)$$

(5.1) 式と (5.6) 式から l は n, a, μ_0, j の関数として次のようになる。

$$l = \left\{ 1 + \frac{1}{(1-n)(1-2n)} \frac{a - \mu_0 \left(\frac{j l 1 + \mu_0}{2} \frac{1+a}{1+a} \right)^2}{a + \mu_0 \left(\frac{j l 1 + \mu_0}{2} \frac{1+a}{1+a} \right)^2} \right\}^{-1} \quad (5.7)$$

l の計算結果を第2表に示す。 l を定めれば $d^{(2)}$ と A の値は (5.1) 式から得られ、 n は (5.3) 式または (5.4) 式から初期値 $(dp^{(0)}/d\xi)_{\xi=0}$ または $(du^{(0)}/d\xi)_{\xi=0}$ だけから決められる。デトネーションの位置は (2.12) 式と (5.5) 式を用いて次のように時刻 t で表わされる。

$$\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} = l t \left\{ 1 + \frac{d^{(2)}}{n^2} \left(1 - \frac{2}{1-n} t^{-n} + \frac{1}{1-2n} t^{-2n} \right) \right\} \quad (5.8)$$

デトネーションの伝播速度は、このようにしての ε^3 オーダーまでの近似で

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}_{CJ}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{a - \mu_0 \left(\frac{j l 1 + \mu_0}{2} \frac{1+a}{1+a} \right)^2}{a + \mu_0 \left(\frac{j l 1 + \mu_0}{2} \frac{1+a}{1+a} \right)^2} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{t^n} - 1 \right)^2 \quad (5.9)$$

のように時刻の関数として表わされ、これは (5.8) 式よりデトネーションの位置の関数でもある。

圧力、速度、エントロピーの関数空間分布の時間変化は初期条件の下に摂動基礎方程式を解いて得られる。この問題に必要な初期条件は (4.9)~(4.11) 式を見ればわかるように圧力 $p^{(0)}(\xi)$ 、速度 $u^{(0)}(\xi)$ 、エントロピー関数 $\sigma^{(0)}(\xi)$ である。これらの空間分布を初期条件として与えれば (4.9)~(4.11) 式から一次の摂動解 $p^{(1)}(\xi)$ 、 $u^{(1)}(\xi)$ 、 $\sigma^{(1)}(\xi)$ が容易に得られ、

さらに高次の摂動も同様に計算される。

6. 検 討

円筒または球対称の収束デトネーションの伝播速度は (5.9) 式により j, γ, n, M_{CJ} の関数として表わされた。本解析は初期値問題であるから、(5.9) 式は最初に十分大きな半径の位置に収束デトネーションが与えられた場合か、あるいは CHAPMAN-JOUGUET 速度を持った収束デトネーションが急にある半径の位置に現われた場合に適用できるはずである²³⁻²⁷。デトネーション速度は ε で展開されているので初期状態付心では厳密に近い解を与え、その収束半径は本質的には大きくないのではあるが、(5.9) 式は t が小さくなり中心に近づくにつれて GUDERLEY の自己相似解¹⁾ の形を持つようになることが注目される。すなわちデトネーションが中心に近づく $t \rightarrow 0$ に対して、 ε^3 までの近似伝播速度は

$$\bar{D}/\bar{D}_{CJ} \sim t^{-2n} \quad (6.1)$$

となる。したがってもし、 $j=1, \gamma=1.4$ に対して $n=0.083$ 、 $j=2, \gamma=1.4$ に対して $n=0.1415$ を与える初期値を選ぶならば伝播速度の時間変化は

$$\bar{D}/\bar{D}_{CJ} \sim t^{-0.166} (j=1, \gamma=1.4), \quad (6.2)$$

$$\bar{D}/\bar{D}_{CJ} \sim t^{-0.283} (j=2, \gamma=1.4), \quad (6.3)$$

となって自己相似解^{1), 20)}と一致する。原理的には、収束デトネーション初期の CHAPMAN-JOUGUET 速度からの摂動と中心付近での自己相似解からの摂動をマッチングすることにより摂動法は正しい解を与える。そして両方の解の極限は一般に一致しない。しかしながら (6.2) 式と (6.3) 式の場合においては CHAPMAN-JOUGUET 速度からの摂動解が中心付近の極限で自己相似解と同じになる。したがって、(5.9) 式は広い範

第2図 デトネーション直後の初期圧力勾配と n との関係

第3図 種々の初期圧力勾配に対するデトネーション速度変化のようす。

第4図 $\gamma=1$ の場合のデトネーション速度変化のようす。

囲の ε に対して成立することが期待される。

n と初期条件との間の関係を第2図に示す。その関係の M_{cj} への依存性は γ の値が小さいほど小さいことがわかる。第3図には、いろいろな n の値に対するデトネーション伝播速度の変化を示す。 $j=1$ では $r/r_0 > 0.3$, $j=2$ では $r/r_0 > 0.5$ において速度変化の形が n の変化によってほとんど変化しないが、その理由はパラメーター ε の性質から直接示すことがで

きる。 n の増加によってデトネーション伝播速度が増す傾向は直感と一致する。

この摂動法は、C-C-W 法、自己相似法、準相似法および実験と第4～7図で比較されている。初期条件は摂動法のパラメーター n が自己相似解と対応するように選ばれている。 $\gamma=1.4$ の円筒対称デトネーションの場合(第5, 6図)に見られるように、LEEによる実験¹⁴⁾は自己相似解とはかなりずれていてC-C-W 法

第5図 $\gamma=1.4$ の場合のデトネーション速度変化のようす。

第7図 $\gamma=3.0$ の場合のデトネーション速度変化のようす。

第6図 $\gamma=1.4$ で $j=1$ の場合のデトネーション圧力変化のようす。

と摂動解との間にある。C-C-W 法と摂動解とが大きな半径位置でほとんど一致していることから C-C-W 法は少なくとも大きな半径で正しい解を与えていると

結論できよう。自己相似解は他の理論や実験とは大きく食い違っているため、中心のごく近くにおいてしか正しくないことを示している。第5図に見られるように、球対称収束デトネーション ($j=2$) では諸理論の間の相違が大きいので実験結果が望まれる。第6図に示されている HUNI ら^{25) 26)} によるデトネーション圧力は LEE によるものとは異なって摂動法よりも C-C-W 法や準相似法による解に近い。しかしながら初期の大きな半径位置で著しく overdrive されているため、比較は全体的に疑問といえよう。

7. 結 論

パラメター ε を用いることによって初期の CHAMPAN-JOUGUET 状態からの摂動法が収束デトネーションに適用できることが示された。 ε^3 のオーダーまでのデトネーション伝播速度が解析的な形で得られ、それは収束のかなり広い過程で成立し、実験ともかなり一致することが示された。この摂動法は極限で自己相似解を持つ他の非定常次元の問題にも適用できよう。

謝 辞

様々なコメントをいただき、深く議論していただいた東大宇宙航空研究所の大島耕一助教授と図面作成に協力いただいた名古屋大学航空学科の青木技官に感謝する。

参考文献

- 1) G. GUDERLEY: Luftfahrtforsch. Band 19, p. 302 (1942).
- 2) L. I. SEDOV: Similarity and Dimensional Method in Mechanics, Infosearch Ltd., London, 1959, Chap. 4, p. 191.
- 3) Ya. B. ZEL'DOVICH and Yu. P. RAIZER: Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, Academic Press, New York and London, 1967, Vol. 2, Chap. 12, p. 794.
- 4) R. I. NIGMATULIN: PMM, Vol. 31, p. 158 (1967).
- 5) R. L. WELSH: J. Fluid Mech. Vol. 29, p. 61 (1967).
- 6) R. F. CHISNELL: J. Fluid Mech. Vol. 2, p. 286 (1957).
- 7) W. CHESTER: Phil. Mag. Vol. 45, p. 1293 (1954).
- 8) G. B. WHITHAM: J. Fluid Mech. Vol. 4 p. 337 (1958).
- 9) M. E. TOPCHIAN and V. A. YASAKOV: Combustion, Explosion and Shock Waves, Vol. 3, p. 14 (1967).
- 10) J. H. LEE and B. H. K. LEE: Phys. Fluids, Vol. 8, p. 2148 (1965).
- 11) F. HIGASHINO and N. OSHIMA: Astronautica Acta, Vol. 15, p. 523 (1970).
- 12) K. OSHIMA: Univ. of Tokyo, Aeronautical Research Institute Rep. No. 358 (1960).
- 13) F. HIGASHINO: Transactions of the Japan Society for Aero. Space Sciences, Vol. 14, p. 26 (1971).
- 14) B. H. K. LEE: AIAA J. Vol. 5, p. 1997 (1967).
- 15) H. JONES: Proc. Roy. Soc. (London) A 189, p. 415 (1947).
- 16) H. EYRING, R. E. POWELL, G. H. DUFFEY and R. B. PARLIN: Chem. Rev. Vol. 45, p. 69 (1949).
- 17) A. F. DEVONSHIRE: Theoretical Research Report No. 3/43.
- 18) W. W. WOOD and J. G. KIRKWOOD: J. Chem. Phys. Vol. 22, p. 1920 (1954).
- 19) J. G. KIRKWOOD and W. W. WOOD: J. Chem. Phys. Vol. 22, p. 1915 (1954).
- 20) Ya. B. ZEL'DOVICH and A. S. KOMPANEETS: Theory of Detonation, Academic Press, New York and London, 1960, Chap. 3, p. 133.
- 21) T. FUJIWARA and S. TSUGE: Nensho Kenkyu, Vol. 22, p. 8 (1969).
- 22) S. TSUGE, H. FURUKAWA, M. MATSUKAWA and T. NAKAGAWA: Astronautica Acta, Vol. 15, p. 377 (1970).
- 23) T. P. GAVRILENKO, M. E. TOPCHIAN and V. A. YASAKOV: Combustion, Explosion and Shock Waves, Vol. 3, p. 305 (1967).
- 24) R. KNYSTAUTAS and J. H. LEE: Combustion and Flame, Vol. 16, p. 61 (1971).
- 25) B. AHLBORN and J. P. HUN: AIAA J. Vol. 7, p. 1191 (1969).
- 26) J. P. R. HUN: Ph.D. Thesis, Department of Physics, University of British Columbia, 1970.
- 27) T. FUJIWARA, K. MIZOGUCHI and T. SUGIMURA: J. Phys. Soc. Japan, Vol. 31, p. 621 (1971).

外側スカートつき多スカート型地面効果機の

浮揚特性に関する研究*

Lifting Characteristics of Multiple-Skirts Ground Effect Machine with Outer Skirt

三ツ矢 明**

Akira MITSUYA

Abstract

Theoretical and experimental analyses are examined on the lifting characteristics of multiple-skirts GEM with outer skirt. Since the flow pattern under the GEM is complex, simple theoretical analysis is made. Present theories give reasonably good agreement with testing data. Results show the effectiveness of the outer skirt on lifting power saving, depending on arrangements of the inner skirts.

1. 緒 言

多スカート型 GEM の歴史は、1961 年フランスにおいて実験機 BC 4 が製作されたのに始まる。その後の改良で最近のものには外側スカートがつけられるよ

うになった。文献¹⁾によれば海上性能と乗り心地の改善のためといわれているが、浮揚性能の改善にも効果があると思われるので、実験的に、また多少理論面からも解析を行なった。

2. 記 号

- a S/l
- d 内側スカートの直径
- e 内外スカートの高さの差 (第 1 図参照)
- h 浮上高
- L 揚力
- l 内側スカートの総周長
- l_B 外側スカートの周長
- m 内側スカートの列数 (第 6 図参照)
- n 内側スカートの数
- P 必要馬力

* 昭和 46 年 11 月 17 日 日本航空宇宙学会飛行機シンポジウムにて発表。昭和 47 年 3 月 21 日原稿受理。

** 大阪府立大学工学部。