膨 脹 流 の 諸 問 題*

Some Problems of Expanding Flows

保 原 充**

Michiru YASUHARA

は し が き

航空機やロケット等飛行物体に働く揚力や抗力を調べるときには、通常、相対的に飛行体を静止させ、一様な平行流がこれに向かって来るものとして取り扱う方法が取られる。このようにいわゆる外部流体力学では平行な一様流の中におかれた物体の問題が多い。一方パイプやエンジン燃焼室、コンプレッサー、タービン内の流れ、あるいはロケット排気流等内部流体力学の問題では、必ずしも平行流のみが主役を演じないで膨脹流、収縮流、剪断流等の非一様流を扱うことも多い。各種非一様流、あるいはその流れと物体の干渉の問題は、平行一様流の場合に比してパラメーターも増え、確かにより複雑にはなるが、場合によっては実験資料の判断に重要な問題を提起し、また逆に非一様流の特性を上手に利用する道が開けることもあるわけで、このような観点から本稿では特に超音速膨脹による非一様流問題を取り上げることとした。

膨脹流 (expanding flow) は一定質量のガスが流れながらその占める容積を増加するものであるから、ガスの圧縮性に起因した密度の低下をとまなう。今、定常な等エントロピーノズル流を考えると、超音速部では断面積の増加とともにガス密度が低下し、幾何学的形状の拡大 (diverge) と、流れの膨脹とが相伴っていることを示す。しかし亜音速部では、断面積が増大すると流れの密度が上昇し、超音速部と亜音速部では幾何学的形状に対応するガスの力学的振舞いが異なる。しかし本稿では、特に超音速部においてガスの膨脹効果が著しいことを考慮し、もっぱら超音速膨脹流について物体との干渉、加熱、ジェット噴流およびその干渉、内部エネルギーや反応に関する各種非平衡現象等について、あまり式の詳細には立ち入らずに述べ、合わせて当研究室の資料も少し加えさせて頂いた。

1. 均一膨脹流および物体との干渉

まず超音速膨脹流の基本的性質を見るために、仮想的な線状 ($\beta=1$) または点状 ($\beta=2$) 湧源からの均一な、等エントロピーの超音速湧出流 (source flow)

について調べよう。湧源を原点とした導径を r とし、仮想音速点での諸量を添字 “*”、激点での諸量を添字 “0” とすると、半径 r の位置での導径方向の流速 u 、圧力 P 、密度 ρ 、温度 T 、はそれぞれマッハ数 M をかいして r の関数として表わされた次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_*}{A} &= \left(\frac{r_*}{r} \right)^\beta = M \left/ \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \right. \\ \frac{T}{T_0} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 \right)^{-1} \\ \frac{P}{P_0} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} \\ \frac{u}{u_*} &= M \left/ \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 \right)^{1/2} \right. \\ \frac{T_*}{T_0} &= \frac{2}{\gamma+1}, \quad \frac{P_*}{P_0} = \left(\frac{T_*}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} \\ \frac{\rho_*}{\rho_0} &= \left(\frac{T_*}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 γ は比熱比で、 A は半径 r の円筒または球の表面積を示す。 $\gamma=1.4$ のときの各量を A/A_* の関数として画いたグラフを第1図に示す。また特にマッハ数を $M \gg 1$ としたときの漸近表式は下のごとくになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_*}{A} &= \left(\frac{r_*}{r} \right)^\beta \doteq \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} M^{-2/(\gamma-1)} \\ \frac{T}{T_0} &\doteq \frac{2}{\gamma-1} M^{-2} = \frac{2}{(\gamma-1)(\gamma+1)} \left(\frac{r_*}{r} \right)^{(\gamma-1)\beta} \\ \frac{P}{P_0} &\doteq \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/(\gamma-1)} M^{-2\gamma/(\gamma-1)} \\ &= \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\gamma(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \left(\frac{r_*}{r} \right)^{\gamma\beta} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/\gamma} \\ &\doteq \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \left(\frac{r_*}{r} \right)^\beta \\ \frac{u}{u_*} &\doteq \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

第1図および (1), (2) 式にも見られるように、音速点近傍では断面積の増加による各量の変化率は最

* 昭和47年6月12日原稿受理

** 名古屋大学工学部

第1図 超音速膨脹流の諸量と面積比の関係

も大きい。またずっと膨脹の進んだ下流 ($A/A_* \rightarrow \infty$) では、熱力学的量 (p , ρ , T) は r のべきに反比例して減少し、一方流速は A/A_* が 4~5 をこえとほとんど一定値に近づく。これにともなってマッハ数 M は r のべきに比例して増大する。すなわち完全ガスの膨脹は r/r_* または A/A_* なる比の関数として諸量にかなりの変化を与えるが、では具体的にこのような source flow の中に物体が置かれたときは、平行流中に置かれたときとどのように異なるであろうか。この問題は円錐ノズルを用いた衝撃風洞やロケット・ノズルのジェット・ベン等に関連して種々の報告が出されている。

まず、特性曲線法は、ノズル内の物体まわりの流れが超音速である場合に適用される。BARADELL と BERTRAM¹⁾ は流入マッハ数 $M=10$ と 20 の円錐流中に置かれた、前縁に小さな丸みのある平板に沿う流れを解き、平行流中にある場合の平板上の圧力に比し、後方ではかなり低下するという結果を得ている (第2図)。実際問題として特に流れの非平行性の影響は圧力分布に強く及ぶことが指摘されている。たとえば米国 AEDC グループは hotshot tunnel の開発に関連して用いられた円錐ノズルについて、source flow の

第2図 前縁に丸みのある平板の、極超音速平行流中の圧力 P_{bN} と Source flow 中での圧力 P_b の比の分布

第3図 Source flow 中の物体まわりの流れと記号

影響を種々調査しているが、LUKASIEWICZ ら²⁾ は同風洞の報告の中で、半頂角 4° および 5° の円錐ノズルに半頂角 9° の円錐を入れた場合を簡単な極超音速ニュートン流近似で見積った結果、平行流中では円錐モデルの表面圧は一定値 P_{bN} であるが、膨脹流であるために後方では圧力低下し、その補正率 $\Delta P_b/P_{bN}$ は -0.3 ぐらいに達し得ると述べている。

今第3図のように source flow 中に置かれた物体に沿う流れについて、もし物体前縁“N”での流入マッハ数 M_N が $M_N^2 \gg 1$ の場合にはいわゆる極超音速流の問題として扱うことが出来る。

一般に座標系の取り方は第3図にあるように、物体前縁を原点とする (x, y, z) 系、同じく前縁からの物体子午線に沿う ξ と、これに垂直な η, ζ を用いた (ξ, η, ζ) 系、あるいは湧源から取られた円筒座標系、極座標系等が用いられている。

NEWTON 流近似は、御承知のように NEWTON のタコの理論、すなわち、タコにぶつかって来た気流は、タコ表面に垂直な運動量成分を失って圧力となるという考え方にに基づき、物体表面の圧力は流入ガス密度を ρ として

$$P_b = \rho v_n^2, \quad (3)$$

で与えられる。ただし v_n は流入気流速度のタコ面に垂直な成分である。また物体表面が曲率を持つ場合には、遠心力による影響を加えるというのが BUSEMANN 補正で、NEWTON-BUSEMANN 近似は比熱比 $\gamma \rightarrow 1$ となった極超音速流に相当することが証明されている。 $\gamma \rightarrow 1$ の極限では、物体前縁からの shock はほとんど

物体表面に付着し、したがって、shock と物体の間の流体力学方程式を解くといった煩雑さは必要でない。その代わりエネルギー方程式を無視しているから温度、密度等を求めることは出来ないで圧力のみが解析の対称になる。遠心力補正を入れた圧力表式は

$$P_b = \rho U^2 \sin^2 \sigma + \int_0^{y_b} \kappa q_1 dm, \quad (4)$$

となる²⁾。ただし σ は速度 U で流入する気流と shock (物体表面と一致) とのなす角度、 q_1 は気流が物体に当たった後に、物体表面に沿って流れる流速であり、流入点直後の近似流速は、 $q_1 \doteq U \cos \sigma$ で与えられ、以後は上記の一定値を保つものと近似される。 κ は物体表面の曲率、また dm は物体表面に当たる気流の流量素片であり、積分は、物体前縁 $N(y_b=0)$ から任意の位置 $y=y_b$ まで行なう。LUKASIEWICZ³⁾ らは $\sin \sigma \doteq \sigma$ として source flow 中の細い円錐 ($\kappa=0$) の表面の圧力分布を求め、非平行流による圧力補正率 $\Delta P_b/P_{bN}$ として、

$$\left. \begin{aligned} P_b &= P_{bN} + \Delta P_b \\ \frac{\Delta P_b}{P_{bN}} &= -\frac{4x}{r_N + x} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を出している。 P_{bN} は前縁 N での円錐表面圧を示す。上式からも知れるように、補正率は $x/r_N=0.1$ でも -0.4 程度となり、決して小さくはない。HALL⁴⁾ は物体の前縁がとがっていて、その形が $y=y_b(x)$ で与えられた場合の圧力補正 ΔP_b として $MN^2\sigma^2 \gg 1$, $x/r_N \ll 1$ の条件下で次式を求めている。

$$\frac{\Delta P_b}{\rho_N U_N^2} = -\frac{y_b'^2 r}{r_N} \left[\nu x + \frac{2y_b}{y_b'} \right] - \frac{y_b y_b''}{\nu r_N} \left[\beta x + \frac{\nu - \beta}{y_b^2} \int_0^x y_b^2 dx \right], \quad (6)$$

ただし $\nu=1$ は二次元、 $\nu=2$ は軸対称物体に対応する。上式で y_b'' を含んだ第2項が遠心力補正項である。(6) を用いて (5) に対応する補正率を求めると $\Delta P_b/P_{bN} = -4x/r_N$ となり、 $x/r_N \ll 1$ の時には (5) と一致する。

さて、前縁に丸みのある物体 (厚み l) においては、離脱ショックが来て、ショックと物体の間では、前縁の垂直ショックによる強いエントロピー上昇を生じ、これが後流まで影響を与える。特に x 軸に沿う半無限薄平板に平行流が当たる場合はその影響は著しい。Source flow 中の薄平板の場合にはさらに非一様流効果が加わるわけである。

以上のような複雑さのために計算は若干面倒であるが、HALL は、NEWTON-BUSEMANN 近似とエントロピー近似を組み合わせ、平行流中の鈍頭平板および円柱上の圧力 $P_{bN}(x)$ の計算値を基にして、円錐状湧流出による補正 ΔP_b を求め、

$$\left. \begin{aligned} \text{鈍頭平板} \quad \frac{\Delta P_b}{P_{bN}} &= -\frac{43}{5(14+\gamma)} \frac{\gamma x}{r_N} \\ \text{鈍頭円柱} \quad \frac{\Delta P_b}{P_{bN}} &= -\frac{10}{7+\gamma} \frac{\gamma x}{r_N} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を与えた。第2図に上の鈍頭平板につき、上記補正率曲線が実線で示されている。

NEWTON 流近似は、ロケット・ノズル出口に置かれたジェット・ベンに働く力を求めるときなどにも極めて簡単な方法を提供してくれる。たとえばノズル出口で平行流であるときに、傾角 α 、長さ l 、幅 h の平板ジェット・ベンを入れたとき、平板への垂直力 N 、気流方向の抗力 D とこれに直角な揚力 L は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} N &= \sin^2 \alpha \rho_N U_N^2 l h, \\ L &= N \cos \alpha, \\ D &= N \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

で与えられるが、円錐ノズル出口に面積 lh の平板ジェット・ベンが置かれた場合には第4図の記号を用いて、

第4図 円錐ノズルと平板ジェット・ベンの配置

$$\left. \begin{aligned} N &= \sin^2 \alpha \rho_N U_N^2 l h X, \\ L &= N \cos \alpha, \\ D &= N \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし $X = X(\alpha, l/r_N, h/r_N)$,

となり、補正係数は X で与えられる⁵⁾。ただし平板背面の base pressure は無視してある。実際のジェット・ベンでは第4図のように幅 h の中心部を除いて、黒色部 (両側の幅 n の板) のみ配置してあるのが通常で、このときには (9) 式の $N(l, h)$ から、 $N(l, h-2n)$ を差し引けばよい。一方ジェット・ベンのないときの推力 T_1 は圧力補正項を無視すればノズル出口面積は $\pi h^2/4$ であるから、

$$T_1 = T \times \frac{1}{2} (1 + \cos \theta),$$

$$T = \rho_N U_N^2 \pi h^2/4,$$

ただし

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{4 + (h/r_N)^2}}.$$

第5図 ジェット・ペンの迎角 α と揚力, 抗力の関係

となるので, T をもって L, D を無次元化すれば

$$\bar{N} = \frac{N(l, h) - N(l, h - 2n)}{T} = \frac{l \sin^2 \alpha [h \times (l, h) - (h - 2n) \times (l, h - 2n)]}{\pi h^2 / 4}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{T} &= \bar{N} \cos \alpha, \\ \frac{D}{T} &= \bar{N} \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

が得られる。第5図に $L/T, D/T$ を α の関数として示してある。また点線は, source flow でなく, ノズル出口で平行流の時の値, すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{T} &= \frac{8ln}{\pi h^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ \frac{D}{T} &= \frac{8ln}{\pi h^2} \sin^3 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

である。 L, D ともに円錐ノズル中にジェット・ペンが置かれた場合の方が平行流中の場合より低下していることを示している。

さて NEWTON 流近似から一歩進めて, 流体の方程式をともに解析した報告も提出されている。

GORGU⁶⁾ は (x, y) 座標系を用いて source flow 中の楔および円錐まわりの流れを, 平行流の解からのずれとして級数展開で求め, いろいろの流入マッハ数に対し, shock の形や圧力, 密度, 速度を数値計算した。ただしその結果は x/r_N 展開の第一項までで, したがって x/r_N の大きい所までは使えない。その結果によれば, たとえば空気の場合, $x/r_N = 0.1$ のときでも, 円錐半頂角 $\alpha = 9^\circ$ $M_N = 5$ において, 平行流の場合に比し圧力は 33%, 密度は 23% 減少しているが, shock の高さは 2.7% 程度上に曲るにすぎず, source flow の影響は, 特に圧力と密度に著しいと述べている。

通常の解析では上のように (x, y) 座標系で扱うことが多いが, 極座標系を用いる方法もある⁷⁾。この方

法は, 流れの形の性質上, 物体形によっては x/r_N がさらに大きい所 (オーダー 1 あるいはそれ以上) にまで近似的に適用出来る利点がある。たとえば軸対称流の場合 (x, y) 系の方程式の代わりに用いるべき (r, θ) 系の方程式は, 速度成分をそれぞれ u, v として

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^\beta} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u r^\beta) + \frac{1}{r \sin^{\beta-1} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin^{\beta-1} \theta) &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \\ u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho \gamma} \right) + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P}{\rho \gamma} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。円錐型 source flow ($\beta=2$) の場合に見える $\sin \theta$ は, $\theta^2 \ll 1$ の仮定で θ と置きかえてもあまり大きな誤差をとまなわない。この座標系で, 円錐型 source flow 中におかれた迎角 0 , 半頂角 α の円錐表面での圧力等を局所相似法で求めた結果は, $M_N^2 \alpha^2 \rightarrow \infty$ のときに

$$P_b = \gamma F_1(\gamma, x/r_N) \frac{\alpha^2}{\{1 + (x/r_N)\}^4} \rho_N U_N^2, \quad (13)$$

となる。ただし F_1 は $x/r_N = 0 \sim 1.0$ の範囲で $\gamma = 1.4$ のとき $1.045 \sim 1.177$ とわずかに単調増加する関数である。(13) から $F_1 = \text{const}$ として (6) 式に対応する補正率を求めれば

$$\frac{\Delta P_b}{P_{bN}} = \frac{1}{\{1 + (x/r_N)\}^4} - 1, \quad (14)$$

となり, $x/r_N \ll 1$ のときは (5) 式に一致する。また $x/r_N \rightarrow \infty$ のときは補正率は -1 , $P_b \rightarrow 0$ となり発散しない。

以上のように, 物体上の圧力は source flow の非平行性により大きな変化を受けるので, 実験資料の解釈・補正には十分気をつけなければならない事が判る。

2. ノズルからの排気流とその干渉

圧力 P_0 の貯気槽と圧力 P_∞ の低圧測定室をノズルで結ぶと, その圧力比 P_0/P_∞ の値に応じて気流の様相が変化するが, 今超音速ノズルを出た噴出ジェット流のみについて調べると, よく知られたようにノズル出口直前の圧力 P_e に比し測定室の圧力 P_∞ が少し高いときには出口端から斜衝撃波が出て気流が収縮し, 逆に低いときには出口端から膨脹波が出て気流が拡がる。また低圧室ガスと流出ガスの境目のいわゆる自由境界では速度の不連続が生ずるが, ここでは二種のガス境界の両側の流線が一致し, また静圧が釣り合うという条件が満たされるようにその形が決められる。

第6図 超音速外部流と噴出ジェットの干渉パターン(特性曲線)図,
 $M_\infty=3.24$, $M_e=2.37$, $P_e/P_\infty=8.9$, $r=1.405$

第7図 二つの二次元ジェットの干渉パターン(特性曲線)図

さらに下流では、噴出ジェットは膨張波、圧縮波ないし shock が干渉し、かつ拡散や混合をとめないながら終りには相対速度エネルギーを失うであろう。

さて超音速排気流に関しては、軸対称ノズルの場合につき LOVE⁸⁾ らが実験と特性曲線法計算による広範な資料報告を出している。この報告には合わせて飛行中のジェット・エンジン・ノズルやロケット・ノズルのように超音速気流中に排気する場合の流れのパターンも調べられている。(第6図) 特性曲線法はジェット同志の干渉計算にも適用できる⁹⁾。(第7図) また D'ATTORRE と YOSHIHARA¹⁰⁾ は高空での multi-booster の膨張排気ジェットの相互干渉を計算機を用いて解析した。まず排気方向を x とする直交系 (x, y, z) を用いて流体力学方程式を次のような LAX の保存形¹¹⁾で表わす。

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}, \quad (15)$$

ただし

$$W = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \end{Bmatrix} \quad -F = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vw \end{Bmatrix} \quad -G = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \end{Bmatrix} \quad (16)$$

上記4式と全エネルギー E に関するベルヌーイの関係

$$E \equiv \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \\ = \text{一本の流線に沿っては一定}, \quad (17)$$

を用いる。(15) に対しての数値積分は LAX-WENDROFF¹²⁾ の2ステップの有限階差法を用いて、ノズル出口の初期条件から出発し下流の x に向かってなされた。このようにして単一、二連および五連のブースターからの排気ジェットの干渉流を IBM7094 を用いて算出した。五連の場合には x 方向を56点に分け、各 x に対し y, z 面で平均300の網目を取ったが、計算時間は10分程度であった。

3. フリー・ジェットの構造

ところで、圧力比が高くなると第8図の電子ビーム写真にあるように流れのパターンがつりがね型になって来る。第8図は各種の高圧力比 P_0/P_∞ に対応した排気流の電子ビーム発光写真を示す。これは丸孔から噴出する超音速ガス流に垂直に細い(直径1mm前後)1本の電子ビームを通し、このビームを下流方向に平行移動させながら、その発光を撮したものであり、暗い部分ほど密度が低い。噴出流側面の曲線は斜め shock で barrel shock(樽型ショック)と呼ばれ、また下流の縦線はほぼ垂直 shock で、Mach disc とも呼ばれる。これらの shock に囲まれた領域はジェットのまわりの大気よりかなり低圧で、かつ source flow のパターンに非常に近く central core とも呼ばれる。(第9図) barrel shock は高空の低密度大気中を飛行するロケットでは極めて大きくなり、ロケット噴炎等では、高温ガスの排気にともなって弱イオン化ガスの存在領域が拡がる。特に固体ロケット・エンジン等のように電離しやすい金属ガスを含む場合には、ロケットの誘導、あるいは通信に大きな影響を受け¹³⁾ 重要な問題となる。一方ジェットの central core では測定室圧よりもさらに低圧低密度の高速流が実現でき、各種の希薄気体実験には都合がよい。このように barrel shock を調べることは重要な意味をもつのでこの方面に関しては理論、実験あるいは半経験的な解析研究が数多く出されている。カリフォルニア大学パークレーとジェット推進研究所の2グループはフリー・ジェットの共同研究を進めた。ASHKENAS and SHERMAN¹⁴⁾ による

第8図 丸孔から各種圧力比 P_0/P_∞ で低圧室へ噴出したフリー・ジェットの写真

ジョイント・レポートがこれで、本報告には低密度風洞におけるフリー・ジェットの構造をかなり詳細に系統的に調査してある。その結果に基づいて求められた経験式は次のごとくである。まず高圧側からスロート(直径 D) までの壁の形は free jet の極く出口近傍 $x/D \sim 1/2$ までに影響するのみで、これより下流ではほとんど同一である。

第9図 フリー・ジェットのパターンと記号

第10図 各種のガスに対する圧力比とマッハ・ディスク直径 D_s の実験的關係, D は噴出孔直径

次に各 x でのマッハ数は、第9図の x_0 を原点とする source flow に近く、位置 x での中心線上のマッハ数 M は、 $M > 5.5$ では 0.5% の誤差内にて次の経験式で表わされる。

$$M = A \left(\frac{x - x_0}{D} \right)^{\gamma-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \left[A \left(\frac{x - x_0}{D} \right)^{\gamma-1} \right]^{-1} \quad (18)$$

ただし A は後述第1表に示す定数である。また衝撃圧 P_i については仮想原点として x_0' をとれば $x/D \geq 2.5$ に対し 1% 以下の誤差で

$$\frac{P_i}{P_0} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \right)^{1/\gamma-1} A^{-2/\gamma-1} \left(\frac{x - x_0'}{D} \right)^{-2} \quad (19)$$

と表わされる。ところで core における密度はノズル出口からの膨脹マッハ線の影響を受けるため完全な source flow 型ではない。実際同じ r に対し x 軸から角 θ 離れた所での密度は 3% ぐらいの誤差はあるが、

$$\rho(r, \theta) = \rho(r, 0) \cos^2 \left(\frac{\pi\theta}{2\phi} \right), \quad (20)$$

と近似出来る。次に Mach disc の位置 x_s は、 r と無関係に

$$\frac{x_s}{D} = 0.67 \left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1/2}, \quad (21)$$

により極めて広範囲 ($15 \leq P_0/P_\infty \leq 17,000$) で成立する。上の関係は Mach disc の直後の静圧が大体測定室圧 P_∞ に等しいとすれば得られる。

また Mach disc の直径 D_s については HICKMAN¹⁵⁾, DAVIDOR and PENNER¹⁶⁾ の実験がある。(第10図) ASHKENAS-SHERMAN はさらに central core における粘性効果を調べているがあまり活用範囲が広くないと思うので省略する。なお上の経験式に現われる定数

を第1表にまとめておく。

第1表

r	x_0/D	x_0'/D	A	ϕ
1.67	0.075	0.04	3.26	1.365
1.40	0.40	0.13	3.65	1.662
1.2857	0.85		3.96	1.888

さて, barrel shock 形状は特性曲線法, NEWTON-BUSEMANN 法, 相似解法等でも推算出来る。解析のときには, ジェットと静止ガスとの境界では, ジェットの圧力が静止ガス圧 P_∞ に等しいという接触面の条件が使われる。LOVE ら⁸⁾ や ADAMSON and NICHOLLS¹⁷⁾ らは特性曲線法で解析しているが, 下流に行くほどマッハ数が高くなり, ジェット境界と barrel shock の間の網目が細くなる。BUSEMAN 補正をしないときの NEWTON 近似式は (r, θ) 座標系を用いた場合, (2) の漸近式を用いて,

$$\left. \begin{aligned} P_s &= P_\infty = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \rho_* u_*^2 \left(\frac{r_*}{r} \right)^\beta \sin^2 \sigma, \\ \tan \sigma &= r \frac{d\theta_s}{dr}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。 $P_\infty \geq P_A$ のときには, $r=r_A$ で $\theta_s=0$ として積分すると次式が得られる¹⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \beta=1 \text{ のとき} \\ \theta_s &= 2[\sin^{-1} \sqrt{nr/r_*} - \sin^{-1} \sqrt{nr_A/r_*}], \\ &\quad (nr/r_* \leq 1) \\ \beta=2 \text{ のとき} \\ \theta_s &= \sin^{-1}(\sqrt{n} r/r_*) - \sin^{-1}(\sqrt{n} r_A/r_*), \\ &\quad (\sqrt{n} r/r_* \leq 1) \\ n &= \gamma^{-1} \{(\gamma-1)/(\gamma+1)\}^{(\gamma+1)/2} (r_*/r_A)^{\beta\gamma}, \\ r_A/r_* &= \{(\gamma-1)/(\gamma+1)\}^{1/2\beta} (P_*/P_\infty)^{1/(\beta\gamma)}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

また BUSEMANN 補正を加えた式は次のごとくである。

$$\begin{aligned} P_\infty &= P_s + P_c \\ &= P_s + \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \rho_* u_*^2 \left(\frac{r_*}{r} \right)^\beta \frac{\sin \sigma \left(\frac{d\sigma}{d\theta_s} + 1 \right)}{\sin^{\beta-1}(-\theta_0 + \theta_s)} \\ &\quad \times \int_0^{\theta_s} \cos \sigma \sin^{\beta-1}(-\theta_0 + \theta_s) d\theta_s, \end{aligned} \quad (24-a)$$

また, $\beta=2$ すなわち円孔ジェットの場合に, 密度 ρ が θ とともに変化するという ASHKENAS-SHERMAN の経験的補正式 (20) を取り入れると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} P_\infty &= \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \rho_* u_*^2 r_*^2 \left[\frac{F(-\theta_0 + \theta_s)}{r^2} \sin^2 \sigma \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \sigma \left(\frac{d\sigma}{d\theta_s} + 1 \right)}{r^2 \sin(-\theta_0 + \theta_s)} \int_0^{\theta_s} F(-\theta_0 + \theta_s) \cos \sigma \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\times \sin(-\theta_0 + \theta_s) d\theta_s,$$

$$F(-\theta_0 + \theta_s) \equiv \cos^2 \frac{\pi(-\theta_0 + \theta_s)}{2\phi},$$

(24-b)

ただし θ_0 は円錐状ノズルの半頂角である。

上式を逐次近似法で積分すれば $\theta_s(r)$ が解け, その例を第11図に示す。さらに非粘性流の範囲でジェッ

第11図 パレル・ショックの電子ビーム写真とニュートン・ブーゼマン近似の比較。 $P_0/P_\infty=332$

ト境界とショックの間の密度や温度等を求めるには, やはり流体の基礎方程式を解かなければならないが, 極超音速近似から出発した singular perturbation を使う等の解析の方法がある。極座標 (r, θ) 系 (12) を使って極超音速近似法で求めた結果によると¹⁸⁾, central core の中を完全な source flow と仮定すれば, $Ma^2 \sigma^2 \gg 1$, $\theta \ll 1$ のとき半径 r でのジェット境界の位置 θ_b およびショックの位置 θ_s はそれぞれ $r^{\beta/2}$ に比例し

$$\left. \begin{aligned} \theta_b(r) &= \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{n}{\gamma P_0}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{1/4} \left(\frac{r}{r_*} \right)^{\beta/2}, \\ \theta_s &= \frac{1}{\eta_0} \theta_b(r), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

で表わされる。 P_0, η_0 は γ と β によって決まる定数で次表のごとくに与えられる。

第2表

β	r	η_0	P_0
1	5/3	0.940	2.91
	7/5	0.962	3.08
2	5/3	0.936	2.43
	7/5	0.959	2.30

$\eta_0=1$ ならばショックとジェット境界は一致するが, 上のように $\eta_0 \sim 0.95$ の程度であるから両者は大変近接していることが判る。また半径 r での密度は,

ショック直後からジェット境界に向かって上昇し、極超音速近似では解析的には無限大に発散する。したがってジェット境界付近では粘性拡散を考慮する必要がある。

4. 膨脹流の非平衡現象

今までに述べた問題では、ガスの流れは非粘性であると仮定して扱ったが、実際の流れでは場合によって各種の非平衡現象が強く現われる。一般に非平衡な流れの現象は第一に粘性、熱伝導等のようにガス分子同志の random な衝突によって生ずる並進運動の非平衡（気体運動論）が、第二にガス分子のもつ内部構造にもとづくもの、すなわち単原子分子では電子励起、多原子分子ではさらに random な回転および振動運動にともなう非平衡が、さらに第三として解離、燃焼あるいはイオン化等にもなう反応非平衡がある。いずれも面倒な問題であるが紙面もあまりないのでここではそれぞれに関し簡単に紹介するにとどめる。

1) 並進非平衡 前節のフリー・ジェットにおいて、測定室圧 P_0 を低下させ、かつ噴出ジェットの圧力比 P_0/P_∞ を大きくすると、central core は大きなスケールとなる。

一方密度の低下も著しくガスの平均自由行程 λ が大きくなるために、まず非平衡現象にともなう粘性効果がきき始め、この領域の解析には NAVIER-STOKES の式を用いねばならない。しかしこれで扱える範囲は実際には狭くむしろもっと希薄な気体運動論 (BOLTZMANN の式) で扱うべき非平衡領域が現われる。この問題は通常ガスの真空中への膨脹現象として、分子線や、超高空でのロケット飛行とも関連して強い関心が寄せられている。本稿では希薄気体力学の詳細に立ち入る予定はないが、気体運動論による若干の解析結果を紹介すると、B-G-K モデルに極超音速流近似を行なった EDWARDS and CHENG¹⁹⁾ や HAMEL and WILLIS²⁰⁾ によれば、ガス希薄化の影響は流速や密度には強くきかないが、特に温度変化に興味ある現象が起こる。すなわち、理想ガスの場合には、温度 T は第 1 図に示すとおり下流 ($r/r_* \rightarrow \infty$) に行くほど低下するはずであるが、希薄ガス領域に入ると温度低下はゆるやかになり、特に点湧出流の場合にはノズル出口のクヌードセン数 $K_n = \lambda/D$ (λ は激点での平均自由行程) に応じたある r/r_* の位置付近で、かなり急激に一定値に近づく。これを温度の凍結と呼ぶ。しかも流れの導径方向 (r 方向) でのガス分子の random motion による温度 T_R は凍結し易く、それに直角な方向 (θ, ϕ 方向) のそれによる温度 T_P は理想ガスとしての温度と同様に低下する。ここで温度 T は

第 12 図 Source flow における並進非平衡温度分布の計算値, T_R : 気流方向 (r 方向), T_P : 気流に垂直な方向, T : 平均温度, ($T = T_R + T_P/3$)

$$T = \frac{1}{3}(T_R + 2T_P), \quad (26)$$

で表わされる。BIRD²¹⁾ の行なった MONTE-CARLO 法による結果と、SOGA and OGUCHI²²⁾ による B-G-K モデルを discrete-ordinate 法で計算した結果とを第 12 図に示してある。温度が測り方によって異なる現象は、実験的にもよくチェックする必要がある。それにはたとえば分解能の高いファブリ・ペロ・エタロンのような分光装置を用い電子線発光を x 軸方向およびそれに直角な方向から別々に調べて、並進運動による光のドップラー・シフトから random motion の速度分布そのものを測定して T_R , T_P を求めるとよい²³⁾。

2) 回転非平衡 N_2 や O_2 あるいは CO_2 のような多原子ガスでは並進のほか分子自身の回転や内部振動にもとづく内部エネルギーが存在し、それぞれのエネルギー・モードに応じて定義される回転温度 T_{ro} 、振動温度 T_{vib} がある。1) で述べられた温度 T はこれに対応して並進温度と呼ばれる。熱力学的平衡状態にあるガスでは、すべての温度が同一値となるが、低圧の膨脹流では同種および異種粒子間の非平衡現象のために値が平衡値からずれる。しかし通常並進と回転の間では分子の平均 10 回以下程度の衝突で平衡化が完成すると考えられ、実験でも電子線の分光スペクトル測定から回転温度を測定し、並進温度を推定する試みが MUNTZ²⁴⁾ 以来行なわれている。しかし強い膨脹をとまなう場合にはやはり回転および並進間の衝突

第13図 各種噴出圧 P_0 のフリー・ジェット中心線上の回転温度測定結果 (MARRONE²⁵⁾)

による平衡化はガス自体の希薄化が速やかなために達成されず、 T と T_{rot} はかなりずれて来る。Marrone²⁵⁾ による回転温度 T_{rot} の測定結果を第13図に示す。下流に行くほど T_{rot} が凍結の傾向をもつことが見られる。REPETSKI と MATES²⁶⁾ はこのずれは並進と回転のエネルギー・モードの間の緩和現象として説明出来ることを、解析によって示した。一方 Mach disc の近傍での回転温度測定結果²⁷⁾ (第14図) によると、Mach shock は温度のジャンプとして現われないで、幅をもつことが判る。ROBBEN と TALBOT²⁸⁾ や MARRONE は Mach disc の前に小さな平板を流に垂直において、平板の前の離脱衝撃波の電子線測定を行ない、shock の幅を詳しく調べている。しかし全般に並

進と回転の間の緩和現象は、低密度、低温の場合に見られ、ロケット排気のような高温ガスではあまり問題にならず、両者の温度は平衡していると見て差し支えない。

3) 振動および反応非平衡 さて高温になると、多原子分子ガスでは回転エネルギーの外に振動エネルギーが励起され、これを分光で調べれば振動温度 T_{vib} の測定が出来る。また、さらに高温になると分子の核間の結合力が切れて解離する等反応が生ずるに到る。この種の問題を理論的に一括しよう。今熱的完全ガスの並進と回転は局所的に温度 T で互に平衡にあると考えると、粘性、熱伝導と拡散は省略できた内部エネルギー e のうち並進と回転は完全励起平衡 ($\bar{e}_{tr} = (3/2)RT$, $\bar{e}_{rot} = (A_1/2)RT$, (線型分子は $A_1=2$, 非線型分子は $A_1=3$) はにあるとする。このときガス流全体の source flow の基礎式は

$$\left. \begin{aligned} \text{連 続} \quad & \frac{\rho}{\rho_*} \frac{u}{u_*} \left(\frac{r}{r_*} \right)^2 = 1, \\ \text{運 動 量} \quad & u \frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}, \\ \text{エネルギー} \quad & h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{一定}, \\ & P = R\rho T, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる。 h はエンタルピーで

$$h = \bar{e}_{tr} + \bar{e}_{rot} + e_{vib} + (P/\rho), \quad (28)$$

と表わされるが、振動非平衡のときには、さらに rate eq. と状態方程式

第14図 マッハ・ディスクを含むフリー・ジェット中心線上の回転温度測定結果 (図中の inviscid shock は、非粘性を仮定した時のマッハ・ディスク前後の温度ジャンプ)

$$u \frac{d e_{\text{vib}}}{d r} = \frac{\bar{e}_{\text{vib}} - e_{\text{vib}}}{\tau}, \quad P = R \rho T \quad (29)$$

が加わる。ただし τ は振動の緩和時間であり、分子振動は調和振動子と仮定してある。また振動と並進は平衡 ($e_{\text{vib}} = \bar{e}_{\text{vib}}$) で反応のみ非平衡のときは、反応の種類に応じた数の反応速度方程式 (rate equation) と反応ガスの状態方程式が加わる。たとえば理想解離二原子ガス²⁹⁾の解離・再結合反応

では解離度を α (全ガス質量で、解離ガス質量を割ったもの) とすると、

$$\left. \begin{aligned} u \frac{d\alpha}{dr} &= C T^\eta \rho [(1-\alpha) e^{-\theta_d/T} - \alpha^2 \rho / \rho_d], \\ P &= R(1+\alpha) \rho T, \\ h &= R[(4+\alpha)T + \alpha \theta_d], \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

である。 R は分子のガス定数、また θ_d および ρ_d は解離の特性温度および特性密度、 C, η は反応によっ

第15図 理想解離二原子ガスの膨脹流における、解離度 α と温度 T の分布。 $T_0/\theta_d = 0.1$, $P_0/R\rho_d\theta_d = 5 \times 10^{-6}$, $\Phi = \infty$ は解離平衡流, $\Phi = 0$ は解離凍結流を示す。(a) 解離度分布 (b) 温度分布

て定まる定数である。BRAY³⁰⁾ は上の理想解離ガスの式を数値積分して、 $\beta=2$ の場合 (正しくは連続の式で $(r/r_*)^\beta \rightarrow 1 + \omega^2 (r/r_*)^2$ としたもの) につき解離度と温度を求めた。第15図において $\Phi = C T_0^\eta \rho_d / 2 \omega \sqrt{R \theta_d}$ は無次元化反応速度係数である。急激な膨脹のために下流で α の凍結の生ずる可能性のあることが見られる。また温度は、逆に平衡流より低下して凍結温度曲線に近づくことが判る。平衡流では、ノズルの膨脹によってガスが冷却されると、それに応じて直ちに解離したガスの発熱型再結合が生じ下流に行っても非反応流の場合程温度低下はしない。しかしガス粒子の再結合がおそいときには一部の原子はそのまま下流に流されていわば再結合の凍結現象を生ずる。このために加熱によって解離した原子のもっている潜在的な熱が利用出来ず温度が低下する。ロケット・エンジンでもこのような現象を生じ、解離そのものと、非平衡との二段に亘って推力の損失をとまなう。すなわち (27) のエネルギー方程式から、ノズル内では

$$R[(4+\alpha)T + \alpha \theta_d] + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{一定}, \quad (31)$$

が成り立つが、ノズル膨脹で温度低下しても、解離平衡の状態でお $\alpha = \alpha_*$ が有限であれば、速度エネルギー $u^2/2$ は解離に食われて十分に上昇できない。またさらにもし再結合が凍結されて $\alpha = \text{一定}$ となると、この α はノズル出口の平衡解離度 α_* よりさらに大きいことを意味し、たとえノズル膨脹によって温度 T が 0 に低下しても得られる最大速度 u_{max} は $u_{\text{max}} = \sqrt{2(h_0 - R\alpha_*\theta_d)}$, となって $\{2(h_0 - R\alpha_*\theta_d)\}^{1/2}$ より小さい。 θ_d はかなり大きい (窒素では 59,000°K 酸素では 113,000°K) から無視出来ない損失である。推力損失の例³¹⁾を第16図に示す。また実験の際には場合によって、混入する不純物が見かけの速度係数を大きくかえるので注意しなければならないことが指摘されている³²⁾。

また SCOFIELD と HOFFMAN³³⁾ は、解離ガスを含むロケット排気の推力はその非平衡流に応じた最適ノズルの形 (凍結流の場合の最適ノズル形に近い) を用いれば、平衡流で設計した場合より大きく出来ることを計算で示した。実際の形は平衡流としての形よりも出口面積を縮めたものになる。超音速膨脹流中での非平衡燃焼も同様に取り扱われる。この場合、関与する反応式は中間生成物も含めてかなり多いので rate equation は多元連立となり、ほとんど数値計算でなければ扱えない。藤原と米田³⁴⁾はラム・ジェット・エンジンに関連して、連続の式において

$$\left(\frac{r}{r_*}\right)^\beta \rightarrow \sigma_N \left(1 + \alpha \frac{r}{r_N}\right),$$

第16図 実験による比推力 I_{sp} と燃料の重量%の関係。ロケット・ノズル内での燃焼ガスの非平衡現象による比推力低下を示している。(a) 酸素-水素推進 (b) 酸素-JP4 推進

第17図 入り口マッハ数2の等モル酸素水素の超音速燃焼温度と入り口からの距離。αは燃焼室の開き度。M=1の線は熱閉塞限界線を示す。

と置きかえ、20種の反応式を考慮した酸素、水素等モル混合物の超音速燃焼流を計算したが、その結果例を第17図に示す。これは一種の加熱流であり、ノズルの拡大度 α が小さいと燃焼室途中でマッハ数1となって熱閉塞を起こす。また α が大きすぎるとガス膨張による冷却のために反応の促進が中途でとまって、ある程度以上には温度は上昇しない。このように燃焼室の拡大度 α は超音速燃焼の場合にはデリケートに影響し得ることが指摘されている。

第18図 解離イオン化室ガスの膨脹流における諸量と面積比の関係。凝点温度 $T_0=6750^\circ\text{K}$ 凝点圧 $P_0=13.1\text{ atm}$ (a) 1 gr 混合ガス中の N^+ および N_2^+ のモル数分布。(b) 電子温度 T_e の分布

ところでイオン化反応の非平衡問題では、電子の質量がイオンまたは中性分子の1,000分の1程度と極めて小さいために、条件によっては電子はイオンや中性分子とはほとんど別個の振舞いをし、平衡に向かう緩和もあまりきかない。このため高温イオン化で発生した電子はそのまま高速でノズルを流出し、ロケット排気中には、ノズルでガスが加速冷却されたにもかかわらずイオン・電子が温度凍結のままかなり存在し、電気通信の際に影響をおよぼす。第18図にその例を示す³⁵⁾。また BAILEY³⁶⁾ は解離・イオン化を含む空気のノズル膨脹非平衡流を計算機で求めている。

以上、かけ足で非平衡膨脹の問題について調べたが、一つ一つの非平衡モードの影響は小さいようでも全体としてはかなり効果をもつもので、たとえば大型ロケットの設計等で、非平衡をきめ細かく考慮するこ

とによって5~10%の推力増が実現できれば極めて大きな利得があるであろう。

結 言

本稿ではあまり数式を用いないで、簡単な膨脹流で考えられるべきいろいろな問題をざっとサーベイしたが、紙面の都合もあり、多小解説的な表現となって厳密性や一般性を欠く点が多く、またたとえば粘性・熱伝導の問題も重要であるがふれなかったこと、引用文献も十分網羅出来なかったこと等をお詫びする。

参 考 文 献

- 1) D. L. BARADELL and M. H. BERTRAM: The Blunt Flat Plate in Hypersonic Flow, NASA TN D-408, 1960.
- 2) W. D. HAYES and R. F. PROBSTEN: Hypersonic Flow Theory, 70-138, Academic Press, 1959.
- 3) J. LUKASIEWICZ, R. JACKSON and J. D. WHITFIELD: Status of Development of Hotshot Tunnels at AEDC. 323-356, "The High Temperature Aspects of Hypersonic Flow," ed. by W. C. Nelson, Pergamon Press, 1964.
- 4) J. G. HALL: Effects of Ambient Nonuniformities in Flow over Hypersonic Test Bodies, Cornell Aeronautical Lab., Rep. No. 128, 1963.
- 5) 保原充, 中島時冬, 溝口謙一郎: ロケットのジェットベン効果, 第7回日本航空宇宙学会中部関西支部秋季大会, 講演前刷 No. 3, 1970.
- 6) M. A. GORGUI: The Hypersonic Source Flow past Wedges and Cones, The Aeronautical Quarterly, 327-344, Vol. 22, Pt. 4, 1971.
- 7) M. YASUHARA: Hypersonic Self-Similarity of Barrel Shock in Source-Type Free Jets, AIAA J. 1102-1104, Vol. 4, No. 6, 1966.
- 8) E. S. LOVE, C. E. GRIGSBY, L. P. LEE and M. J. WOODLING: Experimental and Theoretical Studies of Axisymmetric Free Jets, NASA TR R-6, 1959.
- 9) 林宣幸: 特性曲線法による二次元ジェットブルーム相互干渉の解析, 名古屋大学航空学科卒業論文, 1970.
- 10) L. D'ATTORE and H. YOSHIHARA: Problems of Rocket Exhaust Plume Interactions, Proc. 7th International Sympo. on Space Technology and Sci., Tokyo, 407-412, AGNE, Japan, 1967.
- 11) R. D. RICHTMYER and K. W. MORTON: Difference Methods for Initial-Value Problems, 300-306, Interscience Publishers, 1967.
- 12) P. D. LAX and B. WENDROFF: Difference Schemes for Hyperbolic Equations with High Order of Accuracy, Communication of Pure and Applied Mathematics, 381, 1964.
- 13) 平 光夫: 2次燃焼をともなうロケット噴炎の電波減衰特性について, 日本航空宇宙学会誌, 295-304, Vol. 19, No. 210, 1971.
- 14) H. ASHKENAS and F. S. SHERMAN: The Structure and Utilization of the Supersonic Free Jets in Low Density Wind Tunnels, "Rarefied Gas Dynamics", Vol. II, ed. by J. H. DeLeeuw, 84-00, Academic Press, 1965.
- 15) R. S. HICKMAN: Electron Beam Flow Visualization of Free Jets, Univ. Southern California, USC Report, 1965.
- 16) W. DAVIDOR and S. S. PENNER: Shock Standoff Distances and Mach-Disk Diameters in Underexpanded Sonic Jets, AIAA J. 1651-1653, Vol. 9, No. 8, 1971.
- 17) T. C. ADAMSON, Jr. and J. A. NICHOLLS: On the Structure of Jets from Highly Underexpanded Nozzles into Still Air, J. Aerospace Sci., 16-24, Vol. 26, No. 1, 1959.
- 18) M. YASUHARA, R. S. HICKMAN and T. KAWASHIMA: Form and Structure of Barrel Shock in a Jet Exhaust at High Altitude, Proc. 7th International Sympo. on Space Technology and Sciences, Tokyo, 337-343, AGNE, Japan, 1967.
- 19) R. H. EDWARDS and H. K. CHENG: Steady Expansion of a Gas into a Vacuum, AIAA J., 558-561, Vol. 4, No. 3, 1966.
- 20) H. HAMEL and D. R. WILLS: Kinetic Theory of Source Flow Expansion with Application to the Free Jets, Phys. Fluids, 829-841, Vol. 9, No. 5, 1966.
- 21) G. A. BIRD: Breakdown of Translational and Rotational Equilibrium in Gaseous Expansions, AIAA J. 1998-2003, Vol. 8, No. 11, 1970.
- 22) T. SOGA and H. OGUCHI: Numerical Analysis on Source Expansion Flow into Vacuum, Phys. Fluids, 766-771 Vol. 15, No. 5, 1972.
- 23) E. P. MUNTZ: Molecular Velocity Distribution-Function Measurements in a Flowing Gas, Phys. Fluids, 64-76, Vol. 11, No. 1, 1968.
- 24) E. P. MUNTZ: Static Temperature Measurements in a Flowing Gas, Phys. Fluids, 80-90, Vol. 5, No. 1, 1962.
- 25) P. V. MARRONE: Temperature and Density Measurements in Free Jets and Shock Waves, Phys. Fluids, 521-538, Vol. 10, No. 3, 1967.
- 26) J. J. REPETSKI and R. E. MATES: Rotational Temperature in an Underexpanded Jet, Phys. Fluids, 2605-2610, Vol. 14, No. 12, 1971.
- 27) M. YASUHARA: Rotational Temperature Measurement of the Flow Expanding from a Low Density Sonic Orifice, Univ. Southern California, USCAE 103, 1966.
- 28) F. ROBBEN and L. TALBOT: Measurements of Rotational Temperatures in a Low Density Wind Tunnel, Phys. Fluids, 644-652, Vol. 9, No. 4, 1966.
- 29) M. J. LIGHTHILL: Dynamics of a Dissociating Gas, Pt. 1, Equilibrium Flow, J. Fluid Mechanics, 1-32, Vol. 2, Pt. 1, 1957.
- 30) K. N. C. BRAY: Atomic Recombination in a Hypersonic Wind-Tunnel Nozzle, J. Fluid Mechanics, 1-32, Vol. 6, Pt. 1, 1959.
- 31) W. T. OLSON: Recombination and Condensation Processes in High Area Ratio Nozzles, J. American Rocket Soc., 672-680, Vol. 32, No. 5, 1962.
- 32) C. W. VON ROSENBERG, Jr., R. L. TAYLOR and J. D. TEARE: Vibrational Relaxation of CO in Nonequilibrium Nozzle Flow, and the Effect of Hydrogen Atoms on CO Relaxation, J. Chemical Phys., 1974-1987, Vol. 54, No. 5, 1971.
- 33) M. P. SCOFIELD and J. D. HOFFMAN: Maximum Thrust Nozzles for Nonequilibrium Simple

- Dissociating Gas Flows, AIAA J., 1824-1832, Vol. 9, No. 9, 1971.
- 34) 藤原俊隆, 米田 進: 超音速ノズル内での酸水素反応流, 日本機械学会第820回講演会(流体工学・流体機械)前刷集, 1972.
- 35) M.G. DUNN and J.A. LORDI: Measurement of $N_2^+ + e^-$ Dissociative Recombination in Expanding Nitrogen Flows, AIAA J. 339-345, Vol. 8, No. 2, 1970.
- 36) H.E. BAILEY: Numerical Integration of the Equations Governing the One-Dimensional Flow of a Chemically Reactive Gas, Phys. Fluids, 2292-2300, Vol. 12, No. 11, 1969.

第二次世界大戦イギリス空軍の OR*

OR in the Royal Air Force During the 2nd World War

佐 貫 亦 男**
M. SANUKI

1. はし が き

OR, すなわち, オペレーション研究あるいは作戦研究(イギリスでは operational research, アメリカでは最初 operational analysis, 後に operations research)の初期概念は, 1941年にイギリスの P. M. S. BLACKETT 教授*** がイギリス空軍に提出した報告に基づきのように述べられている(文献1付録)。

1) OR は有能な科学者によって行なわれる限り, 軍の作戦参謀に対して, 通普の軍人では扱えない問題について科学的な助言を与える。とくに確率論的考察および誤差論が介入する作戦分野においてこれは著しい。もちろん, 有能な軍人も存在するが, このような階層は当然中央の管理的な地位についていて, 詳細な解析作業に使うことはできない。

2) OR は作戦記録をでき得る限り数量的に解析し, 得られた結果を科学的に説明する。すなわち, 得られた結果を作戦の諸事実と使った兵器の既知性能に対して数値的に関係づける。これがすんだら, つぎに作戦結果を改善するには戦術をいかに変更したらよいかを考える。

3) OR は一般に, いわゆるホット・ニュースに関心はない。ただし, とくに必要があればそれを取り上げてよい****。

3) OR 従事者は普通の常識が正しい結果になったことを確認することが多い。このときでも, 科学者はその常識を数値的に証明して, 採用した戦術に対する自信を増すべきである。これによって, 戦争を一時の感情で遂行することが避けられる*****。

4) 新兵器は十分に試験することなく実戦に使うことを避けられない。このとき OR グループは作戦参謀と, 新兵器を作った技術部門の間に立って連絡の任務を果たすべきである。それは数学的計算と, 実際作戦におけるテストの比較を長期間にわたって行なうことなどで実現できる。また OR グループは, 作戦の実体を技術部門に, 技術的可能性あるいは限界を作戦参謀に, それぞれ正しく伝えるべきである。ただし, このことは OR グループが唯一の中継機関ということではなく, 技術部門が実戦部隊と直接接触することは一般に必要である。

5) OR グループは単なる統計報告の作製だけに甘んじてはならない。必要な精神は第一級の科学研究所に存在するものと同等であるべきで*, それを備えた科学者全員が実戦部隊と現場で密接に接触するような時間を割くことが望ましい。

6) 新兵器の効果は, 時間 t の関数としてのつき3個の因子積と考えることができる。(i) 使用数 $N(t)$, (ii) 兵器の予定性能(これは常数), (iii) 実際性能と予定性能の比 $S(t)$ 。

この中で $N(t)$ は生産統計から与えられるが, $S(t)$ の形はよくわかっていない。しかし, T を時定数(2ヵ月から1年)として $S(t) \propto (1 - e^{-t/T})$ と近似的に表わされ, OR によってこの関数形の決定ができ, これによって新兵器を導入することの可否を決断できる。

従来は新兵器を実現することだけに科学者の努力を注入しすぎた傾向があって, 新兵器の適当な使用法に対する努力が不足していた。OR グループはこの傾向を是正すべきである。

2. レーダー

レーダーはイギリス空軍で最初 R. D. F. (radio detection and direction finding) と称したが, 1943年

* 昭和47年6月7日原稿受理

** 日本大学理工学部

*** イギリス OR の事実上の創立者

**** センセーションに扱わず, 客観的に見よという意味であらう。

***** 当然の常識的作戦も, 数字に基づいて実行すれば, 気まぐれによる誤りはないということであらう。

* 科学研究と同じ態度で OR を行なえという意味。