技 術 論 文

CONTRIBUTED PAPER

動的軸圧縮荷重を受ける截頭円錐殻の挙動*

Behavior of Truncated Conical Shells Under Dynamic Axial Loads

児 島 一 雄**・砂 川 恵***

Kazuo KOJIMA and Megumi SUNAKAWA

Abstract

Shell structures have high load-carrying capabilities compared to their own weight, while they are apt to be produced large deformations accompanied with unstable phenomena when loads exceed a critical level. So it is important to investigate their behavior under various environmental conditions, particularly, dynamic loading conditions, because of insufficiency of existing researches. The dynamic problems of conical shells have been little analyzed except ones for the case of lateral pressure loading. In the present paper, on the basis of nonlinear shell theory, the axisymmetric dynamic behavior of elastic conical shells clamped along edges subjected to an axial step load is analyzed, where the effect of the mass at the loading end is taken into account. The basic equations derived by the authors are solved numerically, and the influence of the mass at the loading end upon the dynamic behavior is clarified. The mechanism of snapping is discussed in detail, and it is shown that the snap-through phenomena of the shell are classified into four types depending on magnitudes of the applied load and end-mass.

1. ま え が き

薄肉構造物はその重量に比べて高い耐荷能力を有するので、近年の航空・宇宙開発の発展とともにその有用性は高く評価されている。しかし、薄肉構造は或る限界の荷重以上になると不安定現象を呈する欠点を持っているので、この点に関する多くの研究がなされてきた。特に、動的荷重下における不安定現象は、円筒殻（例えば、1）、2）及び球形殻（例えば、3）～5）等を中心に最近盛に研究される様になった。円錐殻の動的挙動に関する研究は、衝撃外圧を受ける場合について、FULTON⁶⁾ が取扱ったのが最初であると思われるが、これは動的解析ではなくて、応答モードを1自由度

的に仮定し、エネルギー障壁を越すために必要な衝撃エネルギーを計算したに過ぎなかった。その後、動的な外圧を受ける場合について AKKAS⁷⁾、谷⁸⁾が差分解析を行った程度であり、その構造要素としての有用性にも拘らず、解析が数学的に困難であるため、その動的挙動に関する研究結果は比較的少ない。一方、ロケットの打上時等にみられる様な動的軸圧縮荷重下における截頭円錐殻の挙動に関する研究は余りみられない。

本報告においては、一端固定、他端では集中質量を有し軸方向変位のみが自由である様な境界条件を有する截頭円錐殻について、ステップ状の動的軸荷重を受ける場合の動的軸対称圧屈の非線形解析を行い、動的軸圧縮圧屈機構を明かにする。又、端板質量の影響を検討し、前報⁹⁾における端板質量の軸対称振動に及ぶ影響に関する結果との比較を行う。更に、動圧屈の限界値と静的軸圧縮圧屈荷重とを比較する。即ち、

応答変位を前報と同様に余弦フーリエ級数により展開し、HAMILTON の原理を適用することによって有限自由度の非線形連立微分方程式を導き、RUNGE-KUTTA-GILL の方法により数値解析を行う。その結果、動圧屈機構を細部に亘って検討し、本論文での数値解析で取扱う截頭円錐殻の動圧屈は大きく分類して4つの型になることを示す。更に、動圧屈の限界値は端板質量に依存して静的圧屈荷重よりも減少し、端板質量の影響が顕著であることを示す。

記 号

α : 半頂角

h : 板厚

l_1, l_2 : 第1図参照

$\gamma \equiv l_1/l_2$: 截頭比

$\lambda \equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2}(l_2/h) \cot \alpha$: 形状パラメタ

M : 端板質量

$m \equiv M/(\pi \rho l_2^2 h \sin^3 \alpha)$: 端板質量パラメタ

ρ : 殻材料の密度

E, ν : 殻材料のヤング率及びポアソン比

$D \equiv Eh^3/[12(1-\nu^2)]$: 曲げ剛性

U, W : 母線方向及び板厚方向変位

* 昭和47年4月5日、第3回年会講演会において講演。

昭和47年6月19日原稿受理

** 鹿島建設(株)建築設計本部構造設計部

*** 東京大学宇宙航空研究所

$w \equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} (W/h)$: 無次元板厚方向変位

F : 応力函数

$f \equiv Fl_2/D$: 無次元応力函数

$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$: 中立面における母線方向及び周方向歪

κ_x, κ_θ : 中立面の母線方向及び周方向曲率変化

x, θ : 母線方向及び周方向座標

$\xi \equiv \ln(x/l_1)$: 母線方向無次元座標

$\xi_1 \equiv \ln(l_2/l_1) = -\ln \gamma$

$\zeta \equiv (x-l_1)/(l_2-l_1)$

t : 時間

$\tau \equiv [D/(\rho h)]^{1/2} l_2^{-2} t$: 無次元時間

P : 軸荷重

$q \equiv P/[2\pi E h^2 \cos^2 \alpha / (3(1-\nu^2))]^{1/2}$

2. 基礎式

第1図に示す様な、一端固定、他端は質量 M の端板がつき軸方向変位のみ自由である截頭円錐殻が、端板を介して動的軸荷重を受ける場合の応答を解析する。

解析において以下の仮定を設ける。

- i) 変形は軸対称である。
 - ii) 板厚方向変位 W についてのみ2次の微小項まで考える。
 - iii) 曲げ歪に対しては DONNELL 流の近似を行う。
 - iv) initial imperfections は考えない。
 - v) 材料は HOOKE 則に従う。
 - vi) LOVE-KIRCHHOFF の仮定が成立する。
 - vii) 断面の扇形の影響は無視する。
 - viii) 面内方向慣性力及び要素の回転慣性は省略する。
 - ix) 重力の影響は考えない。
- 中立面の変位と歪との関係は、仮定 i) ~ iv) より次の様になる。

第1図 動的軸荷重を受ける截頭円錐殻。

第2図 断面力及び断面モーメント。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U + W \cot \alpha}{x}, \quad \varepsilon_{x\theta} = 0. \quad (1)$$

中立面の曲率変化は次式で与えられる。

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{x} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \kappa_{x\theta} = 0. \quad (2)$$

ここで、前報⁹⁾と同様に次式で定義される応力函数 F を導入する。

$$N_x = \frac{F}{x}, \quad N_\theta = \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (3)$$

式(1)から U を消去して式(3)の応力函数を用いると、適合条件式が次の様に求まる。

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \frac{\partial (xF)}{\partial x} \right] - \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (4)$$

更に前報と同様に次の様な無次元パラメタを導入する。すなわち、

$$\begin{aligned} x &\equiv l_1 e^\xi, \quad \xi_1 \equiv \ln(l_2/l_1), \\ w &\equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} (W/h), \quad \gamma \equiv l_1/l_2, \\ \lambda &\equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} (l_2/h) \cot \alpha, \quad f \equiv Fl_2/D, \\ \tau &\equiv [D/(\rho h)]^{1/2} l_2^{-2} t, \quad m \equiv M/(\pi \rho l_2^2 h \sin^3 \alpha). \end{aligned}$$

これらのパラメタを用いて適合条件式(4)は次の様に書くことが出来る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 1 \right) f - \lambda \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma e^\xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 = 0. \quad (5)$$

一端固定、他端は軸方向変位のみ自由である境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \xi=0 \text{ において} \\ w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} - \nu f=0, \\ \xi=\xi_1 \text{ において} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} - \nu f=0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

更に、 w は

$$w = \sum_i w_i(\xi) g_i(\tau), \quad (7)$$

と変数分離できると仮定する。ただし、それぞれの $w_i(\xi)$ は、式(6)における w に関する境界条件を充すものとする。

式(7)の w を式(5)に代入して、応力函数 f を式(8)の形で求める。

$$f = \sum_i f_i(\xi) g_i(\tau) + \sum_{i,j} f_{ij}(\xi) g_i(\tau) g_j(\tau). \quad (8)$$

ただし、応力函数 f_i 及び f_{ij} はそれぞれ境界条件式(6)を充す様に求める。

この様に求められた w 及び f を用い、 $q_i(\tau)$ を変函数として、HAMILTON の原理により、有限自由度の非線型運動方程式が次式から導かれる。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_3) dt = 0, \quad (9)$$

ここに、 Π_1 , Π_2 , 及び Π_3 は、それぞれ、系の歪エネルギー、外力のポテンシャル、及び運動エネルギーであり、次の諸式で表される。

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} (N_x \epsilon_x + N_\theta \epsilon_\theta + M_x \kappa_x + M_\theta \kappa_\theta) \times x \sin \alpha dx d\theta, \quad (10)$$

$$\Pi_2 = -P(t)(W)_{x=l_2} / \sin \alpha, \quad (11)$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \rho h \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 x \sin \alpha dx d\theta + \frac{1}{2} \frac{M}{4\pi^2 \sin^2 \alpha} \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{x=l_2} d\theta \right]^2 \quad (12)$$

式(9)の演算を実行すれば、次式で表される有限自由度の運動方程式が導かれる。

$$\sum_i \phi_{ni} \ddot{q}_i + \sum_i \omega_{ni} q_i + \sum_{i,j} \mu_{n i j} q_i q_j + \sum_{i,j,k} \phi_{n i j k} q_i q_j q_k - 2\lambda^2 q(w_n)_{\xi=\xi_1} = 0, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (13)$$

ここに、

$$\phi_{ni} = \int_0^{\xi_1} \gamma^2 w_n w_i e^{2\xi} d\xi + \frac{1}{2} m(w_n w_i)_{\xi=\xi_1},$$

$$\omega_{ni} = -\lambda \int_0^{\xi_1} f_n \frac{dw_i}{d\xi} d\xi + \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{\xi_1} e^{-2\xi} \frac{d^2 w_n}{d\xi^2} d\xi$$

$$\times \frac{d^2 w_i}{d\xi^2} d\xi,$$

$$\mu_{n i j} = \frac{1}{2\gamma} \int_0^{\xi_1} e^{-\xi} f_n \frac{dw_i}{d\xi} \frac{dw_j}{d\xi} d\xi$$

$$- 2\lambda \int_0^{\xi_1} f_{ni} \frac{dw_j}{d\xi} d\xi,$$

$$\phi_{n i j k} = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\xi_1} e^{-\xi} f_{ni} \frac{dw_j}{d\xi} \frac{dw_k}{d\xi} d\xi.$$

尚、 $(\cdot)$ は時間 τ に関する微分を意味する。

ここで、式(6)の w に関する境界条件を充す w_i として、前報でその展開による収束の良好性が認められた $0 \leq \xi \leq \xi_1$ で完備している次の様な余弦フーリエ級数空間を考える。

$$w_i = c_i \left[\cos \frac{(i-1)\pi\xi}{\xi_1} - \cos \frac{i\pi\xi}{\xi_1} \right], \quad (14)$$

ここに、 c_i は $\int_0^{\xi_1} w_i^2 \gamma^2 e^{2\xi} d\xi = 1$ なる正規化条件から決定される定数である。この w_i を用いて、式(5)から f_i 及び f_{ij} が次の様に表される。

$$f_i = c_i \lambda \left[a_{i-1} \sin \frac{(i-1)\pi\xi}{\xi_1} - a_i \sin \frac{i\pi\xi}{\xi_1} + d_{i1} e^{-\xi} + d_{i2} e^{\xi} \right], \quad (15)$$

$$f_{ij} = -\frac{1}{4\gamma} c_i c_j e^{-\xi} \left\{ \sum_{k,l=0,1} (i-k)(j-l) \left(\frac{\pi}{\xi_1} \right)^2 \times (-1)^{k+l} \left[b_{i+j-k-l} \sin \frac{(i+j-k-l)\pi\xi}{\xi_1} + c_{i+j-k-l} \cos \frac{(i+j-k-l)\pi\xi}{\xi_1} - b_{i-j-k+l} \sin \frac{(i-j-k+l)\pi\xi}{\xi_1} - c_{i-j-k+l} \cos \frac{(i-j-k+l)\pi\xi}{\xi_1} \right] + e_{ij1} e^{2\xi} + e_{ij2} \right\}. \quad (16)$$

ただし、式(16)の $\sim$ 部は $i-j-k+l=0$ の時 $-\xi/2$ となる。また、 a_i , b_i , 及び c_i は次式で与えられる。

$$a_i = \frac{i\pi/\xi_1}{(i\pi/\xi_1)^2 + 1}, \quad b_i = \frac{2}{(i\pi/\xi_1)[(i\pi/\xi_1)^2 + 4]}, \quad c_i = \frac{1}{(i\pi/\xi_1)^2 + 4}. \quad (17)$$

式(15)及び式(16)において、 d_{i1} , d_{i2} , e_{ij1} , e_{ij2} は積分定数であり、 f_i 及び f_{ij} それぞれが境界条件式(6)の応力函数についての条件を満足する様に決定する。

3. 数値計算

荷重形式としてステップ状に加わる動的軸荷重を考え、軸対称 snap-through が問題となる様な半頂角の大きい截頭円錐殻について数値解析結果を示す。即ち、 $\lambda=100$ (例えば、 $h=1$ mm, $l_2=300$ mm, $\alpha=84^\circ 20'$), $\gamma=0.5$, $\nu=0.3$ の殻について数値計算を行い、動的軸圧縮挫屈機構を論ずることとする。

非線型連立方程式(13)の解法としては、RUNGE-KUTTA-GILL の方法を用い、初期条件としては $q_i(0)=0$ 及び $\dot{q}_i(0)=0$ を採用し、4項近似により解析を行う。この $w_1 \sim w_4$ のモードを第3図に示す。この様な余弦フーリエ級数を用いて応答モードを展開した場合の収束性は比較的良好で、その収束状況の1例を第4図に示す。第4図に示される様に、係数 q_i は全時間に対してほぼ一様に収束し、第4項の係数 q_4 は主モードである第1項の係数 q_1 の数%以下である。

截頭円錐殻にステップ状の動的軸荷重が加わる場合、第5図に示される様に、その静的な安定点周りの非線型振動が励起される。この静的な安定点には、第6図に示す様に、挫屈前の静的安定解に属するものと挫屈後の夫れに属するものとがあり、この2種の安定

第3図 $r=0.5$ の場合の各モード. 第4図 展開モードの収束状況, $q=1.1$, $\mu=100$, $r=0.5$, $m=0$. 第5図 端末応答変位の1例, $\lambda=100$, $r=0.5$, $m=0$.

状態の間にはエネルギー障壁が存在するため、或る値以上の荷重が加えられなければ、挫屈後の安定点周りの領域までゆく非線型振動は励起されない。荷重の大きさとそれが加えられてから或る十分長い時間後における端末部での変位の最大値との関係を求めると、第7図に示される様に、変位に有限の飛躍が起る荷重が存在する。この様に挫屈後の安定点周りの非線型振動が励起される荷重の最小値を動挫屈の限界値と定義し

ておく。又、殻体の変形状態がポテンシャル・エネルギー障壁の稜線を通じた時点において動挫屈を起したと定義することにする¹⁰⁾。

以上の定義のもとに、種々の端板質量パラメタに対して荷重パラメタを変化させて数値計算を行い、動挫屈後の最初の大変形のピークが現れるまでの時間 τ^* をそれぞれの端板質量パラメタについて第8図に示す。計算を行った形状の截頭円錐殻の材料が軟鋼 (E

第6図

$=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\rho = 8.05 \times 10^{-10} \text{ kgsec}^2/\text{mm}^4$) の場合, 時間 t と無次元時間 τ との関係は $t = 0.06\tau$ であり, 端板質量の影響を無視出来る場合 10 msec 程度で動挫屈が起ることが分る. 更に, この時間 τ^* は荷重の増大に対して単調に減少するとは一概に言えず, 端板質量パラメタが微小の場合には, 動挫屈が起り難い荷重の領域 (例えば, $m=0$ の場合, $1.03 \leq q \leq 1.04$) が存在する. これに類似の現象は, 浅い球形殻の動挫屈⁵⁾ においても示されている. 第9図は動挫屈が起るまでの変形状態の変化を $q_1 \sim q_2$ 平面に射影したものであり, 動挫屈の限界値よりも比較的大きな荷重 (例えば, $q=1.1$) の場合, ポテンシャル・エネルギー障壁の稜線付近において, 動挫屈の主モードである第1項のモードの運動エネルギーが十分存在しているが, この限界値近傍の荷重 (例えば, $q=1.04$) の場合にはその運動エネルギーが非常に不足し, 変形波形の第1項モードと第2項以降のモード間でエネルギーの授受を行いながら, ポテンシャル・エネルギー障壁の低い所を捜してそこを越え, 挫屈に到ることが示されている (概念的に示したポテンシャル・エネルギー障壁

 第7図 端末変位の最大値と荷重との関係, $\lambda=100$, $r=0.5$, $m=0$.

の稜線の左側で曲線が逡巡しているのに注意). 即ち, 限界荷重近傍においては, ポテンシャル・エネルギー面の荷重による変化に対して捜し得る障壁の稜線の低い部分が非常に敏感であるため, 第1回目の変形では捜しきれず, 2回, 3回と繰返し挫屈前の変形領域を運動することにより越え得る点を見付けて挫屈するため, 図示の様な領域が出来るのである. このことは, 第10図及び第11図において, 変形波形の時間的变化を見ると更に明かになる. 第10図は動挫屈限界値近傍の荷重が加った場合の端末の応答変位の1例であり, 第11図は第10図で示される番号の時点における変形モードを示したものである. 第11図において, $\tau=0.068 \sim 0.074$ においては, $0.5 \leq \eta \leq 0.8$ の領域の変形量は減少し第1項モードの成長がとめられているのに対し, $\tau=0.212 \sim 0.228$ にかけては, $0.5 \leq \eta \leq 1.0$ の領域の変形量が増大し第1項モードが成長している

 第8図 q と τ^* との関係, $\lambda=100$, $r=0.5$.

第9図 変形経路の g_1 - g_2 平面への射影, $\lambda=100$, $r=0.5$, $m=0$. 第10図 端末応答変位, $q=1.043$, $\lambda=100$, $r=0.5$, $m=0$.

のが見られる。

一方、端板質量が増加すると、殻体部の質量の影響が小さくなって運動が1自由度的なものに近付くため、モード間のエネルギーの授受は問題とならなくなる。そのため、第12図に示す様にスムーズに挫屈へと向い、第8図に示される様に、動挫屈後の変位の最初のピークが現れるまでの時間は荷重に対して単調減少となるものと考えられる。即ち、端板質量が大きい場合と微小な場合とでは、動挫屈限界値近傍における挫屈機構は質的に異ってくる。

20分割差分による非線型解析を行った結果、動挫屈限界値は、端板質量パラメタの増大により、軸対称静的挫屈荷重 $q=1.13$ よりも 11% ($m=0$)~18% ($m=10$) 減少することが第13図に示されている。即ち、動挫屈限界値は端板質量の増加に伴い単調に減少し、端板質量パラメタ m が 0~5 の領域でこの減少は急激であり、10以上では限界値は殆ど一定となる。 m が 10 程度以上になると殻体部質量の影響が非常に少なくなることは、前報⁹⁾において線型振動における端板

質量と殻体部質量との連成状況について得た結果と一致している。端板質量により限界値が減少するのは興味深いことであり、挫屈安定化の役割を果たしている殻体部質量の慣性力の役割が端板質量の増大により減殺されてゆく模様を示しているものと思われる。

4. 結 論

本論文では、ステップ状の動的軸荷重を受ける浅い截頭円錐殻の挙動を端板質量の影響をも考慮して解析した。この殻の動挫屈機構は、荷重及び端板質量の大きさにより、次の4つの型に分類されると考えて良いであろう。

(1) 荷重が動挫屈限界値近傍の場合

1) 端板質量が微小な場合: 変形波形のモード間のエネルギー授受により、ポテンシャル・エネルギー障壁の低い所を捜して越すことにより、動挫屈が起る。

2) 端板質量が大きい場合: 応答は1自由度的となり、変形モードと端板質量との間のエネルギー授

第11図 変形モードの時間的变化, $q=1.043$, $\lambda=100$, $r=0.5$, $m=0$. 第12図 変形経路の g_1 - g_2 平面への射影, $q=1.05$, $\lambda=100$, $r=0.5$.

受により, スムーズに動挫屈が起る.

- 3) 端板質量が1)と2)との中間の場合: 動挫屈は変形波形の各モード及び端板質量の間のエネルギー授受により起る.

- (2) 荷重が動挫屈限界値よりかなり大きい場合

ポテンシャル・エネルギー障壁の稜線近傍に於て, 各変形モードの運動エネルギーが十分存在するため, モード間のエネルギー授受は動挫屈にと

って2次的なものとなる. 又, 端板質量が大きい場合は(1), 3)と同様である.

又, 載頭円錐殻の動挫屈の限界値は, 本数値計算で対象とした殻体形状の場合, 端板質量の増加とともに静的挫屈荷重よりも11~18%減少する. この減少の度合は $m=0\sim5$ において急激で, $m\geq 10$ では限界値はほぼ一定である. このことは, 逆に端板質量を一定にして考えれば, m の減少即ち殻体部質量の増大につ

第13図 動挫屈限界値に及ぼす端板質量の影響,
 $\lambda=100$ $r=0.5$.

れて動挫屈限界値が上昇することであり、殻体部質量が動挫屈に対して挫屈安定化の効果を持っており、その効果は $m=0\sim5$ で顕著であることを示している。

数値計算は、東京大学宇宙航空研究所 HITAC 5020 F を使用し、倍精度で行った。

本報告は昭和 47 年 3 月東京大学大学院に提出された児島一雄の修士論文¹⁰⁾の一部である。

文 献

- 1) KADASHEVICH, Y. I. & PERTSEV, A. K.: Loss of Stability of a Cylindrical Shell Under Dynamic Loads, ARS J., 32 (1960), 140.
- 2) ROTH, R. S. & KLOSNER, J. M.: Nonlinear Response of Cylindrical Shells Subjected to Dynamic Axial Loads, AIAA J., 2 (1964), 1788.
- 3) HUMPHREYS, J. S. & BODNER, S. R.: Dynamic Buckling of Shells Under Impulsive Loadings, Proc. ASCE, 88 (1962), EM 12, 17.
- 4) HUANG, N. C.: Axisymmetric Dynamic Snap-Through of Elastic Clamped Spherical Shells, AIAA J., 7 (1969), 215.
- 5) 熊井規, 砂川恵: 浅い粘弾性球形殻の動的挙動 (第1報), 日本航空宇宙学会誌, 19 (昭 46), 452.
- 6) FULTON, R. E.: Dynamic Axisymmetric Buckling of Shallow Conical Shells Subjected to Impulsive Loads, J. Appl. Mech., 32 (1965), 129.
- 7) AKKAS, N. & BAULD, N. R.: Static and Dynamic Buckling Behaviors of Clamped Shallow Conical Shells, Intern. J. Mech. Sci., 13 (1971), 689.
- 8) 谷順二: 截頭円錐殻の衝撃的外圧による動的挫屈, 第21回応用力学連合講演会講演論文抄録集, (昭 46/10), 123.
- 9) 児島一雄, 砂川恵: 截頭円錐殻の自由曲げ振動, 日本航空宇宙学会誌, 20 (昭 47), 469.
- 10) 児島一雄: 円錐殻の挙動に関する研究, 東京大学大学院工学系研究科修士論文, (昭 47/3).