論 文

CONTRIBUTED PAPER

三角翼におけるポテンシャル揚力の限界に関する一計算*

On Limit of Potential Flow Lift on Delta Wing

佐 藤 正 義**

Masayoshi SATO

Abstract

This paper deals with a theoretical analysis on the aerodynamic forces due to the potential flow on the delta wing, and deduces that the potential flow lift coefficient in the delta wing will have a certain maximum value according to the conditions. The studies on the limit of the lift coefficient for the conventional wing with the high aspect ratio have been published in some papers, but there exists little paper on that for the slender wing with the low aspect ratio as the delta wing. The results in the present paper will offer an available guide for the improvement of the STOL characteristics in the high speed aircraft.

1. 緒 言

航空機の高速化とともに、翼の平面形は高速時の空力性能を考慮して、従来の矩形翼から後退翼へさらには三角翼へと slender なものに変化し、アスペクト比もますます小さくなる傾向にある。しかし半面、低速時での空力性能も同時に確保するといういわば両立の問題はむずかしい課題である。特に離着陸時における STOL 性向上の問題は機体が高速であるだけに一層その必要度が高く、高速時性能と同時に、低速時における slender 翼の高揚力化をはかることが重要な課題となっている。

さて、通常の三角翼の揚力係数は、空力的立場から発生要因的に分析した場合、粘性を無視しただけで前縁渦が生じないと仮定したときのポテンシャル流れに基づくポテンシャル揚力係数と粘性による前縁はく離渦に基づくボルテックス揚力係数とから構成されていることはよく知られている（第1図参照）。

そこで、本論文ではこのうち特に比重の大きいポテンシャル揚力をとりあげ、この揚力係数が三角翼まわりの循環の増加に対してどのように変化するかを運動量理論およびエネルギー法則を使用して理論的に計算す

第1図 三角翼におけるポテンシャル揚力係数、ボルテックス揚力係数、および全揚力係数の関連

るとともに、このポテンシャル揚力係数が最大限どこまで発生できるかを研究し、三角翼の高揚力化に対し一つの指針を提供した。

2. 使用するおもな記号

- b : 翼幅
- b' : 翼無限後方における両渦芯間の距離（後縁自由渦面の巻き上がり考慮）
- C_{Di} : 誘導抗力係数 $\left(= D_i / \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \right) \right)$
- C_L : 揚力係数 $\left(= L / \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S \right) \right)$
- c : 翼弦長
- D_i : 誘導抗力（ポテンシャル流れに対応する誘導抗力）
- E : Trefftz 面内における二次元流れの有する全エネルギー
- k : 無次元中央循環値 $(= \Gamma_0 / bV)$
- L : 揚力（ポテンシャル流れに対応する揚力）
- M : Trefftz 面内における二次元流れの有する全運動量（下向き）
- n : 渦度分布を定める定数、または、境界より考える流体側への法線方向

* 昭和47年11月15日原稿受理

** 大阪府立大学工学部航空工学科

S : 翼面積

s : 考える境界に沿う長さ

V : 一様流の速度 (すなわち, 飛行速度)

w' : 翼無限後方における誘導速度 (巻き上がり考慮)

x : 翼弦方向の座標

y : 翼幅方向の座標, または, Trefftz 面における実軸

z : Trefftz 面における虚軸

Γ_0 : 翼幅中央断面における翼まわりの総循環

$$(\Gamma_0 = \int_{x=0}^{x=c} \gamma_0 dx)$$

γ : 渦度

γ_0 : 翼幅中央断面において翼弦方向に分布する渦度 (第2図参照)

γ_1 : 任意の翼弦位置における両翼端部と中央部との渦度の差 (第2図参照)

ϵ'_{∞} : 翼無限後方における吹き下ろし角度 (巻き上がり考慮)

λ : 翼アスペクト比 ($=b^2/S$)

ρ : 空気密度

ϕ : 速度ポテンシャル

3. 理論解析

翼の無限後方において, 自由渦の流れ去る方向に垂直に Trefftz 面¹⁾を考え, この無限平面内での二次元流れの持つ全運動量 (下向き) を M , 全エネルギーを E とし, また翼無限後方における吹き下ろし角度を ϵ'_{∞} とすれば, 運動量の理論およびエネルギーの法則から, 翼に働く揚力 L および誘導抗力 D_i は近似的に次の式で計算される²⁾.

$$L = MV - E \sin \epsilon'_{\infty} \quad (1)$$

$$D_i = E \cos \epsilon'_{\infty} \quad (2)$$

ここに, V は一様流の速度である.

この方法で三角翼のポテンシャル揚力, 誘導抗力を計算するにあたり, 計算の簡単化のために, まず次のような仮定をおくものとする (第2図参照). これら

第2図 仮定する三角翼上の渦度分布

の仮定は三角翼に関するたとえば JONES の理論式³⁾や前縁渦がほとんど存在しない場合の実測値などから判断しても十分に妥当性があるものと考えられる.

(1) 翼幅方向の渦度分布は近似的に逆だ円分布 (U字形分布) をしているものと考え, また, 図中, γ_1 の値は $\gamma_1 = n\gamma_0$ なる関係に従って変化するものとし, その際 n は γ_0 の値にはよらない定数と仮定する (n の値のとり方については後節で論じられる).

(2) 翼幅中央断面における翼弦方向の渦度分布は一状態ごとに一応 γ_0 = 一定と仮定する.

したがって, 一状態における三角翼上の任意の位置における渦度 $\gamma(x, y)$ は, 次式によって表われ, 迎角など状態が変化すれば γ_0 の値のみが変化するものと仮定する.

$$\begin{aligned} \gamma(x, y) &= \gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_1 \sqrt{1 - \frac{y^2}{\left(\frac{bx}{2c}\right)^2}} \\ &= \gamma_0 \left\{ 1 + n - n \sqrt{1 - \frac{y^2}{\left(\frac{bx}{2c}\right)^2}} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし, b, c は三角翼の翼幅, 翼弦長である (以下, 記号については記号表および図を参照).

さて, 解析の対象はポテンシャル流れに対応する空気力であるので, 翼に進入した流れは前縁ではもちろん翼の途中でははく離することなしに翼表面に沿って流れ, 後縁まで付着後, 翼を離れるものとし, また, 後縁自由渦面は最初は平面に近くても, 翼の無限後方では実際にはある径の渦芯を有する一対の渦のまわりに巻き上がっていると考えられ, 本論文でもこのような場合について解析を行なうが, ただ, Trefftz 面での全運動量 M , 全エネルギー E の値は, たとえこのような状態になっても, 運動量およびエネルギー保存の概念により, 後縁自由渦面が無限後方まで平面を保つと仮定して計算した値と近似的に等しいと考えられるので, この条件で解析を進めることにする.

3.1 Trefftz 面での全運動量, 全エネルギーの計算

第3図に示すように, 三角翼で, ある翼弦位置 $x=c$ のところに dx なる微小翼素を考え, この微小部分からの馬蹄渦群によって Trefftz 面内に形成される自由渦の配列を考えると, 後縁自由渦面の平面保持を仮定すれば, 両端における一対の点渦とその間に分布する逆向きのだ円損失分布渦とで構成される自由渦層となり, さらに全翼弦からの馬蹄渦群による総配列は翼幅に等しい長さ b の区間に分布する直線状自由渦層となって現われると考えられる.

3.1.1 全運動量 M の計算 第3図を参照して, Trefftz 面内における自由渦層によって誘起される二

第3図 翼無限後方に考えた Trefftz 面
(ひとまず、後縁自由渦面の平面を仮定、なお、図は dx についてのもの)

次元流れの持つ全運動量 M の計算を行なう。

まず、微小翼素 dx からの渦による微小運動量 dM (下向き) は、強さが同じで向きが反対の一对の点渦によって誘起される二次元流れの持つ運動量の大きさが空気密度、渦間距離、渦の強さ(循環)の三乗積で表わされること⁴⁾、および運動量の線形性を考慮すれば、

$$\begin{aligned} dM &= - \int_{y=0}^{y=b/2c} \rho \cdot 2y \cdot \frac{\partial \{\gamma(x, y) \cdot dx\}}{\partial y} dy \\ &\quad + \rho \cdot \frac{b}{c} \cdot (1+n) \gamma_0 dx \\ &= - \int_{y=0}^{y=b/2c} \rho \cdot 2y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \gamma_0 \left[1+n-n \times \sqrt{1-\frac{y^2}{\left(\frac{bx}{2c}\right)^2}} \right] \cdot dx \right\} dy + \rho \cdot \frac{b}{c} \cdot x \cdot (1+n) \gamma_0 dx \\ &= - \frac{\pi}{4} \rho \cdot \frac{b}{c} \cdot x \cdot n \gamma_0 dx + \rho \cdot \frac{b}{c} \cdot x \cdot (1+n) \gamma_0 dx \\ &= \rho \cdot \frac{b}{c} \gamma_0 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} x dx \quad (4) \end{aligned}$$

したがって、所要の全運動量 M (下向き) は、

$$M = \int_{x=0}^{x=c} dM = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} \rho b \gamma_0 c \quad (5)$$

ここで、翼幅中央断面における翼まわりの総循環を Γ_0 とすれば、

$$\Gamma_0 = \int_{x=0}^{x=c} \gamma(x, 0) dx = \int_{x=0}^{x=c} \gamma_0 dx = \gamma_0 c \quad (6)$$

したがって、(5)式の M を Γ_0 を使用して表わせば、

$$M = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} \rho b \Gamma_0 \quad (7)$$

3.1.2 全エネルギー E の計算 次に、同じく Trefftz 面内における同一流れの持つ全エネルギー E の計算を行なう。

一般に、非圧縮性二次元流体の有する運動エネルギー E は、

$$E = -\frac{1}{2} \rho \oint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (8)$$

なる線積分で求めることができる⁵⁾。ここに、 ρ は流

第4図 線積分路

体密度, ϕ は速度ポテンシャル, s は考える境界に沿う長さ, n は境界より考える流体側への法線方向を示す。

いま, 所要の全エネルギー E をこの(8)式によって求めるために, Trefftz 面を第3図にも示したように $y-z$ 複素平面 ($y+iz=w$) とし, 積分路を第4図に示すように, まず右半面について $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$ のようにとって線積分を行ない, しかるのち, $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$ なる極限操作をして, まず右

方半無限平面での値を知り, さらに流れが左右対称であることを利用して, 求められた値を2倍することによって全無限平面での値を求めるものとする。

そこでまず, A から B までの値 $E_{A \rightarrow B}$ を計算するために, この区間での $[\phi]_{z=+0}$, および $[\partial\phi/\partial z]_{z=+0}$ の計算を行なう。例によってまず微小翼素 dx からの渦による第1象限内任意の位置 (y, z) での微小速度ポテンシャル $d\phi$ は,

$$d\phi = \left\{ Re \left[\frac{-n\gamma_0 dx}{\left(\frac{b}{c}\right)x} \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2 x^2}{4} - (y+iz)^2} \right] + \frac{n\gamma_0 z}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \frac{dx}{x} \right\} + \frac{(n+1)\gamma_0 dx}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{z}{y - \frac{b}{2c}x} - \tan^{-1} \frac{z}{y + \frac{b}{2c}x} \right) \quad (9)$$

ここで, 右辺第1項は逆だ円分布 (U字形分布) からのだ円損失分布渦に基づくものであり, また第2項は

両端における一対の点渦に基づくものである。したがって, 全自由渦層による速度ポテンシャル ϕ は,

$$\begin{aligned} \phi(y, z) = & -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \left\{ Re \left[\int_{x=0}^{x=c} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2}{4} x^2 + (z-iy)^2} dx \right] - z \int_{x=0}^{x=c} \frac{dx}{x} \right\} \\ & + \frac{(n+1)\gamma_0}{2\pi} \left(\int_{x=0}^{x=c} \frac{\tan^{-1} \frac{z}{y - \frac{b}{2c}x} dx}{y - \frac{b}{2c}x} - \int_{x=0}^{x=c} \frac{\tan^{-1} \frac{z}{y + \frac{b}{2c}x} dx}{y + \frac{b}{2c}x} \right) \\ = & -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \left[Re \left[\sqrt{\frac{b^2}{4} + (z-iy)^2} + (z-iy) \left[\log 2(z-iy) - \log \left\{ z-iy + \sqrt{\frac{b^2}{4} + (z-iy)^2} \right\} - 1 \right] \right] \right] \\ & + \frac{(n+1)\gamma_0}{2\pi} \left[\frac{y - \frac{b}{2}}{\left(-\frac{b}{2c}\right)} \tan^{-1} \frac{z}{y - \frac{b}{2}} - \frac{y + \frac{b}{2}}{\left(\frac{b}{2c}\right)} \tan^{-1} \frac{z}{y + \frac{b}{2}} - \frac{z}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log \left\{ \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 \right\} \right. \\ & \left. - \frac{z}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log \left\{ \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 \right\} + \frac{2y}{\left(\frac{b}{2c}\right)} \tan^{-1} \frac{z}{y} + \frac{2z}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log (y^2 + z^2) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

したがって,

$$[\phi]_{z=+0} = \phi(y, +0) = -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \left\{ \sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2} - y \cos^{-1} \left(\frac{2}{b} y \right) \right\} + \frac{(n+1)\gamma_0}{2\pi} \left(-\frac{2\pi c}{b} y + \pi c \right) \quad (11)$$

一方, (10)式より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} = & -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \left[Re \left[\log 2(z-iy) - \log \left\{ z-iy + \sqrt{\frac{b^2}{4} + (z-iy)^2} \right\} \right] \right] \\ & + \frac{(n+1)\gamma_0}{2\pi} \left[\frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)}{\left(-\frac{b}{2c}\right)} \cdot \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)}{\left\{ \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 \right\}} - \frac{\left(y + \frac{b}{2}\right)}{\left(\frac{b}{2c}\right)} \cdot \frac{\left(y + \frac{b}{2}\right)}{\left\{ \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 \right\}} - \frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log \left\{ \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 \right\} \right. \\ & \left. - \frac{z}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \frac{2z}{\left\{ \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 \right\}} - \frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log \left\{ \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 \right\} - \frac{z}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \frac{2z}{\left\{ \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 \right\}} \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{2y}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \frac{y}{(y^2+z^2)} + \frac{2}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log(y^2+z^2) + \frac{2z}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \frac{2z}{(y^2+z^2)} \quad (12)$$

したがって,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_{z=+0} = -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log \frac{4}{b} y + \frac{(n+1)\gamma_0}{2\pi} \left\{ -\frac{2}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log\left(y - \frac{b}{2}\right) - \frac{2}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log\left(y + \frac{b}{2}\right) + \frac{4}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log y \right\} \quad (13)$$

以上, (11), (13)式の結果を使用すれば,

$$\begin{aligned} E_{A \rightarrow B} &= -\frac{1}{2} \rho \int_{y=+0}^{y=b/2-\varepsilon} [\varphi]_{z=+0} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_{z=+0} dy \\ &= -\frac{1}{2} \rho \int_{y=+0}^{y=b/2-\varepsilon} \left\{ -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2} + \frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot y \cos^{-1}\left(\frac{2}{b}y\right) - \frac{(n+1)\gamma_0 c}{b} \cdot y \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)\gamma_0 c}{2} \right\} \left\{ -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log \frac{4}{b} - \frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log y - \frac{(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log\left(y - \frac{b}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log\left(y + \frac{b}{2}\right) + \frac{2(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log y \right\} dy \quad (14) \end{aligned}$$

次に, $E_{B \rightarrow C}$ については, 積分路を流線に沿うようにとったので, この積分路上では $\partial\varphi/\partial n=0$, しかも φ は有限, したがって被積分関数は 0 で, $E_{B \rightarrow C}=0$ となる. 次に, $E_{C \rightarrow D}$ については, この区間での

$[\varphi]_{z=-0}$, および $[\partial\varphi/\partial(-z)]_{z=-0}$ の値が必要になるが, これらはそれぞれ前記の $[\varphi]_{z=+0}$, および $[\partial\varphi/\partial z]_{z=+0}$ と比較して符号が変化するだけであり, これを考慮すれば次のように計算される.

$$\begin{aligned} E_{C \rightarrow D} &= -\frac{1}{2} \rho \int_{y=b/2-\varepsilon}^{y=+0} [\varphi]_{z=-0} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial(-z)}\right]_{z=-0} \cdot -dy \\ &= -\frac{1}{2} \rho \int_{y=+0}^{y=b/2-\varepsilon} \left\{ -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2} + \frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot y \cos^{-1}\left(\frac{2}{b}y\right) - \frac{(n+1)\gamma_0 c}{b} \cdot y \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)\gamma_0 c}{2} \right\} \left\{ -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log \frac{4}{b} - \frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log y - \frac{(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log\left(y - \frac{b}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log\left(y + \frac{b}{2}\right) + \frac{2(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log y \right\} dy \quad (15) \end{aligned}$$

次に, $E_{D \rightarrow E}$ については, z 軸は流線の一本であり, この上では $\partial\varphi/\partial y=0$, しかも φ は有限, したがって被積分関数は 0 で, $E_{D \rightarrow E}=0$, また $E_{E \rightarrow F}$ については, R を十分に大きくとれば, そのような領域では流体は静止していると考えられるから, 積分路上では $\partial\varphi/\partial n=0$, しかも φ は有限と考えてよいから被積分

関数は 0 となり, 積分路がいくら大きくても $E_{E \rightarrow F}=0$, 最後の $E_{F \rightarrow A}$ については, $E_{D \rightarrow E}$ と同じ理由により $E_{F \rightarrow A}=0$ となる.

以上の結果を利用すれば, 所要の全エネルギー E は次式によって計算されることになる.

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} (E_{A \rightarrow B} + E_{B \rightarrow C} + E_{C \rightarrow D} + E_{D \rightarrow E} + E_{E \rightarrow F} + E_{F \rightarrow A}) \\ &= -2\rho \int_{y=0}^{y=b/2} \left\{ -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2} + \frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot y \cos^{-1}\left(\frac{2}{b}y\right) - \frac{(n+1)\gamma_0 c}{b} \cdot y \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)\gamma_0 c}{2} \right\} \left\{ -\frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log \frac{4}{b} - \frac{n\gamma_0}{\left(\frac{b}{c}\right)} \log y - \frac{(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log\left(y - \frac{b}{2}\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log\left(y+\frac{b}{2}\right) + \frac{2(n+1)\gamma_0}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \log y \Big\} dy \\
& = -2\rho\left\{\frac{n^2\gamma_0^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \log\left(\frac{4}{b}\right) \cdot \int_0^{b/2} \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} dy + \frac{n^2\gamma_0^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \cdot \log y dy \right. \\
& \quad + \frac{n(n+1)\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \cdot \log\left(y-\frac{b}{2}\right) dy + \frac{n(n+1)\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \cdot \log\left(y+\frac{b}{2}\right) dy \\
& \quad - \frac{2n(n+1)\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \cdot \log y dy - \frac{n^2\gamma_0^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \log\left(\frac{4}{b}\right) \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \cos^{-1}\left(\frac{2}{b}y\right) dy \\
& \quad - \frac{n^2\gamma_0^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \cos^{-1}\left(\frac{2}{b}y\right) \cdot \log y dy - \frac{n(n+1)\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \cos^{-1}\left(\frac{2}{b}y\right) \cdot \log\left(y-\frac{b}{2}\right) dy \\
& \quad - \frac{n(n+1)\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \cos^{-1}\left(\frac{2}{b}y\right) \cdot \log\left(y+\frac{b}{2}\right) dy + \frac{2n(n+1)\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \cos^{-1}\left(\frac{2}{b}y\right) \cdot \log y dy \\
& \quad + \frac{n(n+1)\gamma_0^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \log\left(\frac{4}{b}\right) \cdot \int_0^{b/2} y dy + \frac{n(n+1)\gamma_0^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \log y dy + \frac{(n+1)^2\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \log\left(y-\frac{b}{2}\right) dy \\
& \quad + \frac{(n+1)^2\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \log\left(y+\frac{b}{2}\right) dy - \frac{2(n+1)^2\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c}\right)^2} \cdot \int_0^{b/2} y \cdot \log y dy \\
& \quad - \frac{n(n+1)\gamma_0^2}{\left(\frac{2b}{c^2}\right)} \cdot \log\left(\frac{4}{b}\right) \cdot \int_0^{b/2} dy - \frac{n(n+1)\gamma_0^2}{\left(\frac{2b}{c^2}\right)} \cdot \int_0^{b/2} \log y dy - \frac{(n+1)^2\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{2b}{c^2}\right)} \cdot \int_0^{b/2} \log\left(y-\frac{b}{2}\right) dy \\
& \quad \left. - \frac{(n+1)^2\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{2b}{c^2}\right)} \cdot \int_0^{b/2} \log\left(y+\frac{b}{2}\right) dy + \frac{(n+1)^2\gamma_0^2}{\pi\left(\frac{b}{c^2}\right)} \cdot \int_0^{b/2} \log y dy \right\} \quad (16)
\end{aligned}$$

(16)式の積分を実際に計算し⁶⁾、(6)式の関係などを のようになる。
使用して、これを整理すれば、結局、所要の E は次

$$E = \left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\} \rho \Gamma_0^2 \quad (17)$$

これら、(7)式の M 、および(17)式の E の値は、それぞれ、運動量保存、およびエネルギー保存の概念により、前記のように、後縁自由渦面の巻き上がりを考慮した場合の値として近似的に以下の節において使用される。

3.2 翼無限後方における吹き下ろし角度の計算

後縁から流出した自由渦の層は最初はほぼ平面に近い形状を保っていると考えられるが、この自由渦面は非常に不安定で、下流へ進むに従って次第に一對の渦のまわりに渦度集中を起こし、翼の無限後方においては、ある径（実際に計算可能）の渦芯を有する一對の渦のまわりに巻き上がっていると考えられる。この渦芯間の距離 b' は近似的に両渦を一對の点渦と見なし、この場合の運動量を(7)式の値と等置することによ

て次のように定まる。

$$b' = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} b \quad (18)$$

また、この考えのもとに、翼の無限後方における誘導速度 w' を近似的に計算すると、

$$w' = \frac{\Gamma_0}{2\pi b'} = \frac{\Gamma_0}{\pi \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} b} \quad (19)$$

したがって、翼無限後方における吹き下ろし角度 ε_∞' は近似的に次のように計算できる。

$$\varepsilon_\infty' = \sin^{-1} \frac{w'}{V} = \sin^{-1} \frac{\Gamma_0}{\pi \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} b V} \quad (20)$$

3.3 揚力、誘導抗力の計算 ここで、(1)、(7)、

(17), および(20)式を使用して, 三角翼に働くポテンシャル揚力 L を計算すれば,

$$L = MV - E \sin \varepsilon'_{\infty} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} \rho b \Gamma_0 V - \frac{\left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\}}{\pi \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\}} \cdot \frac{\rho \Gamma_0^3}{bV} \quad (21)$$

これより, 揚力係数 C_L は,

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S} = \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} \cdot \frac{b^2}{S} \cdot \frac{\Gamma_0}{bV} - \frac{2 \left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\}}{\pi \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\}} \cdot \frac{b^2}{S} \cdot \left(\frac{\Gamma_0}{bV} \right)^3 \quad (22)$$

ここに, S は翼面積を示す. さらにここで, 翼アスペクト比 b^2/S を λ と置き, また, 翼幅中央断面における総循環 Γ_0 の無次元値として,

$$k = \frac{\Gamma_0}{bV} \quad (23)$$

なる式によって定義される k を導入し, (22) 式をこの無次元中央循環値 k を使用して C_L/λ の形で整理すれば,

$$\frac{C_L}{\lambda} = \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} k \left[1 - \frac{2 \left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\}}{\pi \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\}^2} k^2 \right] \quad (24)$$

(24)式によれば, $d(C_L/\lambda)/dk=0$ より, C_L/λ は,

$$k = \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\} \sqrt{\frac{\pi}{6 \left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\}}} \quad (25)$$

のとき,

$$\left(\frac{C_L}{\lambda} \right)_{\max} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\}^2 \sqrt{\frac{\pi}{6 \left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\}}} \quad (26)$$

なる最大値をとることがわかる.

一方, 誘導抗力 D_i については, (2), (17), および(20)式より,

$$D_i = E \cos \varepsilon'_{\infty} = \left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\} \rho \Gamma_0^2 \times \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\}^2} \cdot \left(\frac{\Gamma_0}{bV} \right)^2} \quad (27)$$

これより, 誘導抗力係数 C_{D_i} は,

$$C_{D_i} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V^2 \cdot S} = 2 \left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\} \cdot \frac{b^2}{S} \cdot \left(\frac{\Gamma_0}{bV} \right)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\}^2} \cdot \left(\frac{\Gamma_0}{bV} \right)^2} \quad (28)$$

したがって、以前と同様に整理すれば、

$$\frac{C_{Di}}{\lambda} = 2 \left\{ -\frac{3n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} \log 2 + \frac{n^2}{16} \pi + (n+1)^2 \cdot \frac{\log 2}{\pi} \right\} k^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) n \right\}^2 k^2}} \quad (29)$$

以上、揚力に関して(24)式、また誘導抗力に関して(29)式が得られたわけであるが、これらの式はいずれも翼面上の仮定渦度分布を規定する量 n をあらわに含んでおり、ここで実際問題として、 n の値の妥当なとり方について論じる必要がある。さて、本論文では、計算の簡単化のために、翼面上任意の位置における渦度 $\gamma(x, y)$ は、(3)式で表わされるものと仮定したわけであるが(第2図参照)、通常よく使用される JONES の理論³⁾によれば、 $\gamma(x, y)$ は次式のようなものである。

$$\gamma(x, y) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{\left(\frac{bx}{2c} \right)^2}}} \quad (30)$$

そこで、(3)式および(30)式の二通りの場合について、任意の翼弦位置 ($x=x$) での翼幅方向の渦度分布(いずれもU字形)を同時に比較し、第5図に示すように、両者の下部面積が等しくなるように n の値を選び、この n の値のとき、(3)式は JONES の理論による渦度分布と等価な、したがって、一応妥当な渦度分布を与えるものと考えて本論を進めることにする。この考え方は、そもそも JONES の理論は流れにはく離を含まないような場合に対してポテンシャル理論的にたてられた理論であるので、今の場合に一般的に、ある程度拡大利用しても、十分妥当性もあり参考になるとの判断に基づく。

第5図 n の評価方法

第5図を参考にして、この n の値を計算すれば、

$$\int_{y=-bx/2c}^{y=bx/2c} \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{\left(\frac{bx}{2c} \right)^2}}} dy = \int_{y=-bx/2c}^{y=bx/2c} \gamma_0 \left\{ 1 + n - n \sqrt{1 - \frac{y^2}{\left(\frac{bx}{2c} \right)^2}} \right\} dy \quad (31)$$

すなわち、

$$\frac{\pi bx \gamma_0}{2c} = \frac{bx \gamma_0}{c} + \left(\frac{bx \gamma_0}{c} - \frac{\pi bx \gamma_0}{4c} \right) n \quad (32)$$

より、

$$n = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{1 - \frac{\pi}{4}} \doteq 2.660 (= \text{定数}) \quad (33)$$

そこで、 $n=2.660$ の場合について、揚力に関する(24)式、および誘導抗力に関する(29)式を計算すると、それぞれ、

$$\frac{C_L}{\lambda} = 1.571 k (1 - 0.1077 k^2) \quad (34)$$

および、

$$\frac{C_{Di}}{\lambda} = 0.835 k^2 \sqrt{1 - 0.0411 k^2} \quad (35)$$

のようになり、これらをグラフに示すと第6図のようになる。特に、 C_L/λ については、 $k=1.759$ のときに、

第6図 C_L/λ , $C_{Di}/\lambda \sim k$ 曲線 ($n=2.660$ の場合)

$$\left(\frac{C_L}{\lambda}\right)_{\max} = 1.842 \quad (36)$$

なる最大値をとることがわかる。これは言い換えれば、翼まわりの循環をいくら増加させても、理論誘導時の仮定が妥当であるかぎり、三角翼のポテンシャル揚力係数はそのときのアスペクト比の 1.842 倍以上には発生できないことを示している。

実際には、三角翼の全揚力係数としてはこのポテンシャル揚力係数のほかにボルテックス揚力係数が加算されるので、全揚力係数の挙動については本研究からは何の結論も出せない。しかし、ポテンシャル揚力係数が全揚力係数に占める割合が比較的大きいとみられること (特に循環が小さいときには大半がポテンシャル揚力係数と考えられる)、また三角翼では、ポテンシャル揚力係数を基礎にして、残りの成分、すなわち前縁はく離渦に基づくボルテックス揚力係数は比較的相互干渉の問題にわずらわされずにこれとはある程度独立的に論じられうという事実を考慮すれば、ポテンシャル揚力係数に関する本研究の成果もかなり有用になるものと考ええる。

4. 結 言

PRANDTL の単純揚力線理論が直接適用できる通常のアスペクト比の翼に対する揚力係数の限界の研究については、筆者らのものも含めてすでにいくつかの論文が発表されている^{7)~17)}。しかし、三角翼のような翼幅方向はもちろん翼弦方向にも渦度の分布を考えねばならぬいわゆるアスペクト比の小さい Slender な翼の揚力係数の限界については、D. W. BRIDSON らによる論文¹⁸⁾が見当たる程度に過ぎず、しかもこの論文では、揚力、誘導抗力など所要量はすべて翼無限後方における両渦の中心間距離や渦芯径を変数として含んでおり、これらの量がわからないと所要量が計算で

きない難点があるようである。その点では、本論文ではこれらの変数を直接翼まわりの無次元循環値と関連づけているので、ポテンシャル流れに基づく空気力だけを対象にするかぎり、本結果の方が使い易いのではないと思われる。いずれにしても、理論誘導時に適当な仮定を置いてはいるものの、とにかく三角翼の揚力係数のうち比較的比重の大きいポテンシャル揚力係数にこのような理論的限界値が存在するという結果は、航空機の STOL 化の時代を迎え今後三角翼の高揚力化の研究がさらに進められる際に、一つの有用な指針を提供するものとして意義があるものと考ええる。

最後に、本論文をまとめるにあたって、有益なご教示をいただいた大阪府立大学工学部の松岡健次教授に対し、感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 河村竜馬: 高速空気力学, (1958), 309, 日刊工業新聞社.
- 2) L. PRANDTL: Tragflügeltheorie, (1919).
- 3) 山名正夫ほか: 飛行機設計論, (1968), 257, 養賢堂.
- 4) 藤本武助: 改著流体力学, (1965), 65, 養賢堂.
- 5) W. F. DURAND: Aerodynamic Theory (1), (1963), 86, Dover Publications Inc.
- 6) I. S. GRADSHTEYN et al.: Table of Integrals, Series, and Products (4th Ed.), (1965), Academic Press.
- 7) M. SATO et al.: Proc. 16th Japan Natl. Congr. Appl. Mech., (1966), 236.
- 8) 佐藤正義ほか: 日本航空宇宙学会誌, 19(1971), 220.
- 9) G. J. HANCOCK: J. Aero. Sci., 27(1960), 65.
- 10) F. J. DAVENPORT: J. Aero. Sci., 27(1960), 959.
- 11) H. B. HELMBOLD: J. Aero. Sci., 24(1957), 237.
- 12) H. B. HELMBOLD: Ing. Arch., 25(1957), 273.
- 13) H. B. HELMBOLD: Ing. Arch., 34(1965), 398.
- 14) C. D. CONE: NASA TN, D-657(1961).
- 15) B. W. McCORMICK: J. Aero. Sci., 26(1959), 247.
- 16) H. S. RIBNER: UTIA TN, No. 19(1958).
- 17) G. J. HANCOCK: Aero. J. of RAS, 74(1970), 749.
- 18) D. W. BRIDSON et al.: Aero. J. of RAS, 74(1970), 671.