どが1種類の速度こう配, 流速についてのものであった. 本研究では速度こう配, 流速をそれぞれ4種類に変化させて測定を行った. その結果, 以下の事が判明した.

- (1) 発生した直線せん断流は二次元と見なしうる.
- (2) 同一のせん断格子によって発生したせん断流については G , T_u , $-\overline{uv}/U_c^2$, R_{uv} は U_c によらず一定である. また G は x/h にもよらず一定である.
- (3) 乱流せん断流の主役は $-\overline{uv}$ であり, これが G を保ち L_x , T_u を決定している. これらの量はいずれも $-\overline{uv}$ とともに増加する.
- (4) 乱流せん断流の乱れは, 周期成分を潜在したランダム変動であり, 通常の乱れに比べると, より多くのエネルギーを主流から得ている.

参考文献

- 1) OWEN, P. R. & ZIENKIEWICZ, H. K.: The production of uniform shear flow in a wind tunnel, *J. Fluid Mech.*, Vol. 2, (1957), pp. 521-531.
- 2) LIVESY, J. L. & TURNER, J. T.: The generation of symmetrical duct velocity profiles of high uniform shear, *J. Fluid Mech.*, Vol. 20, No. 2, (1964), pp. 201-208.
- 3) ROSE, W. G.: Results of an attempt to generate a homogeneous turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 25, No. 1, (1966), pp. 97-120.
- 4) CHAMPAGNE, F. H., HARRIS, V. G. & CORRSIN, S.: Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 41, No. 1, (1970), pp. 81-139.
- 5) ROSE, W. G.: Interaction of grid turbulence with a uniform mean shear, *J. Fluid Mech.*, Vol. 44, No. 4, (1970), pp. 767-779.
- 6) SCHLICHTING, H.: *Boundary Layer Theory*, 6th ed. McGraw-Hill., (1968). p. 531-538

質量が変化する弾性飛しょう体の運動方程式*

The Equations of Motion of an Elastic Launch Vehicle with Varying Mass

田 寺 木 一**

Kiichi TATERA

Abstract

General three dimensional dynamic equations of motion for a launch vehicle with varying mass are derived, having effects of airframe bending, propellant sloshing, propellant flow and engine swiveling into account. Further, assuming the propellant flow, lateral bending shapes and some small quantities concerning a vehicle, derived equations are applied to a moderate or large launch vehicle with multiple gimbaled-engines, and the effects of aforementioned phenomena on the dynamic equations are shown in detail.

In this paper, the effect of propellant flow are considered as reaction forces of propellant to the airframe, and using the theory of continuum mechanics the time rate of change of integrals of some quantities are expressed by the net rate at which the quantities are being transferred out of the system.

1. 緒 言

質量が変化しつつあるロケットについて, 重心位置

変化, 機体の横曲げ, 横スロッシングおよびエンジン運動を考慮して, 3次元的一般動力学運動方程式を導いた. さらに, ロケット内部の流体運動の仮定, 合理的な assumed モードの使用および若干の適当な微小量の設定を行ない, 得られた運動方程式をジンバル式液体ロケットに適用して, 運動方程式におよぼす上記諸現象の影響, ならびに諸現象間の相互影響を詳しく示した.

質量変化を伴う系の運動は, 多くの人によって論ぜられ (例えば文献 1)~6)), それらの取扱いと表現式は多様である. これらの結果は飛しょう体の運動力学に適用されているが⁷⁾⁻¹⁰⁾, ほとんど剛体機体に適用され, 上記諸現象を取扱った報告は LESTER and COLLINS⁹⁾に見られるだけである. そこでは, 変分原理に基づいた Lagrange 形式の運動方程式より, ピッチ面内の運動のみを求めているが, 全運動エネルギーには内部液体の流れを無視し片手落ちとなっている. また機体軸に垂直方向の重心移動の無視およびエンジン除外の曲げ assumed モードの使用などのため, 必要以上に式が複雑となっている. ここでは, 内部流体の流れの影響は機体におよぼす反力として考えて, 部分的に連続体力学の場の量の取扱い方法を導入して, 系か

* 昭和48年3月30日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所

らの流出量で式を表わし、取扱い易い運動方程式を得た。

2. 座標系と質量素片の運動方程式

運動座標系として直交機体軸系を用い、機体が弾性変形をうけないと仮想したときの機体に固定し、これを xyz 系 (第1図) とする。ロケット内の任意の質量素片を dm , $\bar{a}$ を dm の慣性空間加速度 (量記号上の棒線はベクトル量を表わす), $\bar{T}$ を応力テンソル (量記号上の波線はテンソル量を表わす), $\bar{R}$ を単位質量あたりの体積力, $d\tau$ を dm の占める体積素片とすると, dm の運動方程式は固体部および流体部について, 次式で表わされる¹²⁽¹¹⁾,

$$\bar{a}dm = \nabla \cdot \bar{T}d\tau + \bar{R}dm \quad (1)$$

ここに, ∇ は発散演算子である。また重心に対するモーメントの釣合いから次式を得る^{12, (11)} (第1図)。

$$(\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{a}dm = -\nabla \cdot \{\bar{T} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)\} d\tau + (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{R}dm \quad (2)$$

いま, ロケットを第2図の如く, 時刻 t において体積領域 τ を占める固体部と, τ' を占める流体部 (固体推進薬は固体部とするのが適当かも知れないが, 燃焼段のものは燃焼面が移動するので, ここでは後の式の簡単化の都合上流体部に入れる) に分け, 前者を囲む表面を σ , 後者のそれを σ' とすると,

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_{sf}, \quad \sigma' = \sigma_{sf} + \sum_n \sigma_{en} \quad (3)$$

ここに, σ_{sf} は固体と流体部との接する面, σ_{en} は第 n エンジンの出口断面, σ_s は外部大気と接している固体表面とする。ロケットの運動は各瞬間において, 限定された面 σ_s と $\sum \sigma_{en}$ によって囲まれた空間内の物質の運動を知ることであり, 流動し流出する流体が

第1図 座 標 系

第2図 ロケットの物質領域

機体に作用する力は, σ_{sf} を通して作用する表面力と考えることが出来, 固体部はこの流体による反力をうける。

3. 基 礎 式

3.1 重心の運動 任意の座標原点の運動とそのまわりの回転運動式を導入するかわりに, 以下では紙数の関係上一般に用いられている重心に関する式を導入する。(1)をそれぞれ固体部と流体部について積分する。このさい発散定理 (付録1) を用いて, $\nabla \cdot \bar{T}$ の体積分を面積積分で表わすと,

$$\int_{\tau} \bar{a}dm = \int_{\sigma_s} \bar{n}_\tau \cdot \bar{T}ds + \int_{\sigma_{sf}} \bar{n}_\tau \cdot \bar{T}ds + \int_{\tau} \bar{R}dm \quad (4)$$

$$\int_{\tau'} \bar{a}dm = \int_{\sigma_{sf}} \bar{n}_{\tau'} \cdot \bar{T}ds + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \bar{n}_{\tau'} \cdot \bar{T}ds + \int_{\tau'} \bar{R}dm \quad (5)$$

ここに, $\bar{n}_\tau$, $\bar{n}_{\tau'}$ はそれぞれ τ , τ' 部を囲む表面の面積要素 ds に垂直な外方向単位ベクトルである。 $\bar{n}_\tau \cdot \bar{T}ds$, $\bar{n}_{\tau'} \cdot \bar{T}ds$ はそれぞれ σ , σ' の ds に作用する表面力で, (5)の右辺の最初の積分項は符号を変えらると, 流体部が固体部におよぼす力となる。 σ_{sf} 面で $\bar{n}_\tau \cdot \bar{T}ds$ と $\bar{n}_{\tau'} \cdot \bar{T}ds$ は, 同一点では大きさは同じで逆方向であるから, (4), (5)より

$$\int_{\tau + \tau'} \bar{a}dm = \bar{F} \quad (6)$$

$$\bar{F} = \int_{\sigma_s} \bar{n}_\tau \cdot \bar{T}ds + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \bar{n}_{\tau'} \cdot \bar{T}ds + \int_{\tau + \tau'} \bar{R}dm \quad (7)$$

いま, $\bar{V}_0$ を原点 O の慣性空間速度, ω を機体軸系の回転角速度, $\bar{v}_s$, $\bar{v}_f$ をそれぞれ着目する固体および流体部の dm の機体軸系に対する速度とすると, dm の慣性空間速度 $\bar{V}$ は,

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}_0 + \omega \times \bar{r} + \bar{v}_s, & \text{for } \tau \\ \bar{V} &= \bar{V}_0 + \omega \times \bar{r} + \bar{v}_f, & \text{for } \tau' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また $\bar{V}_c (V_{cx}, V_{cy}, V_{cz})$ を重心の慣性空間速度とすると,

$$\bar{V}_c = \bar{V}_0 + \omega \times \bar{r}_c + \dot{\bar{r}}_c \quad (9)$$

したがって, $\bar{V}$ を $\bar{V}_c$ で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}_c + \omega \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_c, & \text{for } \tau \\ \bar{V} &= \bar{V}_c + \omega \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_c, & \text{for } \tau' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

($\dot{}$) は時間変化率を表わし, ベクトルのときは機体軸系の成分に関して時間微分を行う。したがって $\bar{a}$ は,

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) + 2\bar{\omega} \times (\bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_c) + \ddot{\bar{r}}_c \quad \text{for } \tau \\ \bar{a} &= \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) + 2\bar{\omega} \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_c) + \ddot{\bar{r}}_c \quad \text{for } \tau' \end{aligned} \quad (11)$$

$\bar{v}_s$, $\bar{v}_f$ は機体軸系に対する加速度で、いま、 m を時刻 t のロケット全質量として、 $\bar{r}_c$ と重心の運動方程式は、

$$m\bar{r}_c = \int_{\tau+\tau'} \bar{r} dm \quad (12)$$

$$\begin{aligned} m[\dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c - 2\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_c - \ddot{\bar{r}}_c] \\ + 2\bar{\omega} \times \left[\int_{\tau} \bar{v}_s dm + \int_{\tau'} \bar{v}_f dm \right] \\ + \int_{\tau} \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \dot{\bar{v}}_f dm = \bar{F} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 m , $\bar{r}_c$ とこれらの時間変化率間の関係を考える。 d^*/dt を $(\cdot)$ と同一とし、(12) に d^*/dt を遂行して、

$$m\bar{r}_c + m\dot{\bar{r}}_c = \frac{d^*}{dt} \int_{\tau+\tau'} \bar{r} dm \quad (14)$$

この右辺は σ_s と $\sum \sigma_{sn}$ によって囲まれた(第2図)、 $\tau+\tau'$ 空間内の物質に付随した量の、機体軸系より見た時間変化率であるから、(付2・4)と(付2・5)により、

$$\begin{aligned} \frac{d^*}{dt} \int_{\tau+\tau'} \bar{r} dm = \frac{D^*}{Dt} \int_{\tau+\tau'} \bar{r} dm = \int_{\tau} \bar{v}_s dm \\ + \int_{\tau'} \bar{v}_f dm - \sum_n \int_{\sigma_{sn}} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \end{aligned} \quad (15)$$

$\bar{v}_s$ は流出面 σ_{sn} の機体軸に相対的な速度である。したがって、(14)、(15)から、

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \bar{v}_s dm + \int_{\tau'} \bar{v}_f dm = \frac{d^*}{dt} (m\bar{r}_c) \\ + \sum_n \int_{\sigma_{sn}} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \end{aligned} \quad (16)$$

同様に、さらに(16)の d^*/dt を遂行すると、

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \dot{\bar{v}}_f dm = \frac{d^{*2}}{dt} (m\bar{r}_c) \\ + \sum_n \int_{\sigma_{sn}} \rho_f \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ + \frac{d^*}{dt} \sum_n \int_{\sigma_{sn}} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \end{aligned} \quad (17)$$

(16)、(17)の右辺の第2項は、それぞれ $\sum_n \sigma_{sn}$ 面から単位時間に流出する $\rho_f \bar{r} ds$, $\rho_f \bar{v}_f ds$ の総和で、両式を(13)に用いて、

$$\begin{aligned} m[\dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c] + 2m\dot{\bar{r}}_c + m\bar{r}_c + 2m\bar{\omega} \times \bar{r}_c \\ + \frac{d^*}{dt} \sum_n \int_{\sigma_{sn}} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ + 2\bar{\omega} \times \sum_n \int_{\sigma_{sn}} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ + \sum_n \int_{\sigma_{sn}} \rho_f \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds = \bar{F} \end{aligned} \quad (18)$$

上式は一般式で、(13)と(18)は全く同一式であるが、後者は $\bar{r}_c$ と諸量の流出率で表わされ、系の内部物質の相対加速度を知る必要はない。したがって解析に有利と考えられる。

3.2 重心まわりの回転運動 (2)式から、次の重心まわりのモーメントの釣合い式を得る。

$$\int_{\tau+\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{a} dm = \bar{M} \quad (19)$$

$\bar{M}$ は(7)と同様に発散定理(付録1)により次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \int_{\sigma_s} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{n}_{\tau} \cdot \bar{T}) ds \\ &+ \sum_n \int_{\sigma_{sn}} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{n}_{\tau'} \cdot \bar{T}) ds \\ &+ \int_{\tau+\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{R} dm \end{aligned} \quad (20)$$

(11)を(19)に代入し、 $\bar{I}$ を xyz 系に関する重心まわりの慣性モーメントテンソル(付録3)とすると、

$$\begin{aligned} \bar{I} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times (\bar{I} \cdot \bar{\omega}) + 2 \left[\int_{\tau} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_s) dm \right. \\ \left. + \int_{\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_f) dm \right] + \int_{\tau} (\bar{r} - \bar{r}_c) \\ \times \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \dot{\bar{v}}_f dm = \bar{M} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、(21)式の変形を考える。まず、(付2・4)と(付2・5)を用いて d^*/dt ($\bar{I} \cdot \bar{\omega}$) は、

$$\begin{aligned} \frac{d^*}{dt} (\bar{I} \cdot \bar{\omega}) &= \frac{d^*}{dt} \int_{\tau} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) dm \\ &+ \int_{\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) dm = \bar{I} \cdot \dot{\bar{\omega}} \\ &+ \int_{\tau} \left[\bar{v}_s \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) + (\bar{r} - \bar{r}_c) \right. \\ &\times (\bar{\omega} \times \bar{v}_s) \left. \right] dm + \int_{\tau'} \left[\bar{v}_f \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) \right. \\ &\left. + (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_f) \right] dm - \sum_n \int_{\sigma_{sn}} \rho_f (\bar{r} - \bar{r}_c) \\ &\times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) \cdot [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \end{aligned} \quad (22)$$

(22)の最後の式の第2項と第3項の積分式を、ベクトル積の関係式、 $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) + \bar{C} \times (\bar{B} \times \bar{A}) = 2\bar{C} \times (\bar{B} \times \bar{A}) - \bar{B} \times (\bar{C} \times \bar{A})$ を用いて変形する。つぎに、 $\bar{L}$ なる量すなわち機体軸系から見た角運動量を導入する。

$$\bar{L} = \int_{\tau} \bar{r} \times \bar{v}_s dm + \int_{\tau'} \bar{r} \times \bar{v}_f dm \quad (23)$$

さらに、 $\bar{L}$ から(付2・4)、(付2・5)を用いて、

$$\frac{d^* \bar{L}}{dt} = \int_{\tau} \bar{r} \times \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \bar{r} \times \dot{\bar{v}}_f dm$$

$$-\sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{r} \times \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_e'] ds \quad (24)$$

が得られる。(22)を変形した式と,(15),(17),(23)(24)等を用いて, 結局(21)式として次式を得る.

$$\begin{aligned} & d^*/dt(\bar{I} \cdot \bar{\omega}) + \bar{\omega} \times (\bar{I} \cdot \bar{\omega}) + d^*/dt(\bar{L}) + \bar{\omega} \times \bar{L} \\ & - \bar{r}_c \times d^*/dt(m \bar{r}_c) - \bar{\omega} \times [\bar{r}_c \times d^*/dt(m \bar{r}_c)] \\ & - \bar{r}_c \times \frac{d^*}{dt} \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_e'] ds \\ & - \bar{\omega} \times \left\{ \bar{r}_c \times \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{r} \cdot [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_e'] ds \right\} \\ & + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_e'] ds \\ & + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) [(\bar{v}_f \\ & - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_e'] ds = \bar{M} \end{aligned} \quad (25)$$

上式の左辺の最初の2項が通常のオイラーの式に対応するが, $\dot{\bar{I}}$ は0とは限らない. ジェット・ダンピングは種々の定義が見られるが^{11), 4), 5)}, 左辺の最後の項が多くの著者によりジェット・ダンピングといわれている⁵⁾. (21)と(25)は同一内容の式で, 後者は $\bar{I}$, $\bar{r}_c$ 以外に $\bar{L}$ と流出率を知る必要がある. しかし, 一般に系からの諸量の流出率は容易に分かる場合が多く, また $\bar{L}$ は流体の流れが軸方向で軸対称と仮定出来るときは0となるので, 非常に簡単な式となる. この報告の完成段階で最近, transport rule による運動方程式が示された¹¹⁾. 検討の結果によると(18), (25)式はその結果に合致している.

3.3 流体運動 タンク内の液体推進薬および燃焼室内のガスの運動は, 機体の弾性変形との相互作用により, 非常に複雑である. この運動は初期および境界条件, 連続の式, エネルギー式, 燃焼特性その他の constitutive equations を用いて, 解くことが出来るかも知れないが, ここでは, スロッシング効果は縦スロッシングを無視し, 横スロッシングに対して質量一スプリングーダッシュポットの等価力学系で表わし(第3図)¹⁴⁾, 液体および燃焼ガスの排出流運動は, 仮定を設けてこれを用いる.

3.4 曲げ変形運動 刻々に質量が変化し, しかもジンバル・エンジンのような非保存力による運動を伴

第3図 横スロッシングの等価力学的モデル

う全系の固有振動モードは, 通常の意味においては存在しない. したがって何らかの仮想的な制限下における機体モード形を用いて曲げ変形を表わす. この assumed モード形の選び方によって, スロッシング質量およびエンジンの慣性力と曲げ振動のカップリングの度合が左右され, かつ同一精度で曲げ変位を表わし得るモード形のとるべき項数が異なる. ここではカップリング項が少なく, しかもスロッシング運動およびエンジン運動の個々の物理的な意味が明瞭に保持されているように, 流体はスロッシング質量も含めて frozen し, エンジンは初期設定位置で固定された仮想的な束縛下における固有振動モードを用いる.

この第 ν 次固有振動の円振動数を ω_ν , 一般質量を m_ν , 減衰比を ζ_ν , モード形を $\bar{\phi}_\nu(\bar{r}, t)$ として, 曲げ変位 $\bar{u}(\bar{r}, t)$ は, 次式で表わされると仮定する.

$$\bar{u}(\bar{r}, t) = \sum_\nu \xi_\nu(t) \bar{\phi}_\nu(\bar{r}, t) \quad (26)$$

ξ_ν は $\bar{\phi}_\nu$ の一般座標である.

弾性振動方程式は, 例えば BISPLINGHOFF の教科書¹²⁾に従えば, 付録4.の(付4・1)式で表わされる. いまこれを適用するにあたって, スロッシング質量の動揺, 流体の機体に対する相対的な流れおよびエンジンのふれ運動等の有効力を外力の如く考える必要がある.(付4・1)に減衰項を追加し

$$\begin{aligned} m_\nu \omega_\nu^2 \xi_\nu = & - \int_{\tau+\tau'} \bar{a}_s \cdot \bar{\phi}_\nu dm + Q_{\nu s} - 2m_\nu \zeta_\nu \omega_\nu \dot{\xi}_\nu \\ & + Q_\nu \end{aligned} \quad (27)$$

$$m_\nu = \int_{\tau+\tau'} \bar{\phi}_\nu \cdot \bar{\phi}_\nu dm \quad (28)$$

ここに, $\bar{a}_s$ はモード計算の際に, 仮定した束縛条件下における加速度, $Q_{\nu s}$ は上記の有効力を外力と考えた一般力, Q_ν はロケットの外力による一般力である.

3.5 エンジンの運動 第 n エンジンのジンバル点 G_n から dm への位置ベクトルを $\bar{r}'$ として, G_n まわりのモーメントの釣合い式は, (2)から

$$\int_{\tau(E_n)+\tau'(E_n)} \bar{r}' \times \bar{a} dm = \bar{M}_{en} \quad (29)$$

ここに, $\tau(E_n)$, $\tau'(E_n)$ はそれぞれ第 n エンジンの固体部と流体部で, $\bar{M}_{en}$ はエンジンに働くモーメントである.

dm の $\bar{a}$ は, 第4図の記号を用いて, (11)より,

$$\begin{aligned} \bar{a} = & \bar{\dot{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r}_{en} + \bar{r}' - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \\ & \times \{ \bar{\omega} \times (\bar{r}_{en} + \bar{r}' - \bar{r}_c) \} + 2\bar{\omega} \times (\bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_c) \\ & + \dot{\bar{v}}_s - \dot{\bar{r}}_c \quad \text{for } \tau(E_n) \\ \bar{a} = & \bar{\dot{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r}_{en} + \bar{r}' - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \\ & \times \{ \bar{\omega} \times \bar{r}_{en} + \bar{r}' - \bar{r}_c \} + 2\bar{\omega} \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_c) + \dot{\bar{v}}_f - \dot{\bar{r}}_c \\ & \text{for } \tau'(E_n) \end{aligned}$$

第 n エンジンのガスも含めた全質量を m_{en} , G_n の慣

第4図 第nエンジンの座標

性空間加速度を $\bar{a}_{gn}$, $\bar{I}_{en}$ を xyz 系に関する G_n まわりのエンジンの慣性モーメントテンソルとして, (29)より,

$$\begin{aligned} \bar{I}_{en} \cdot \dot{\omega} + \omega \times (\bar{I}_{en} \cdot \omega) + m_{en} \bar{r}'_{cn} \times \bar{a}_{gn} \\ + 2 \left[\int_{\tau(E_n)} \bar{r}' \times \{ \omega \times (\bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_{gn}) \} dm \right. \\ \left. + \int_{\tau'(E_n)} \bar{r}' \times \{ \omega \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_{gn}) \} dm \right] \\ + \int_{\tau(E_n)} \bar{r}' \times (\dot{\bar{v}}_s - \ddot{\bar{r}}_{gn}) dm + \int_{\tau'(E_n)} \bar{r}' \\ \times (\dot{\bar{v}}_f - \ddot{\bar{r}}_{gn}) dm = \bar{M}_{en} \end{aligned}$$

(21)から(25)を導いたときと同様にして, エンジンへの流入面 σ_{ein} を考慮して, G_n まわりの回転運動方程式は,

$$\begin{aligned} d^*/dt(\bar{I}_{en} \cdot \omega) + \omega \times (\bar{I}_{en} \cdot \omega) + m_{en} \bar{r}'_{cn} \times \bar{a}_{gn} \\ + d^*/dt(\bar{L}_{en}) + \omega \times \bar{L}_{en} + \int_{\sigma_{en} + \sigma_{ein}} \rho_f \bar{r}' \\ \times (\omega \times \bar{r}') [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ + \int_{\sigma_{en} + \sigma_{ein}} \rho_f \bar{r}' \times (\bar{v}_f - \bar{v}_s) [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ = \bar{M}_{en} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{en} = \int_{\tau(E_n)} \bar{r}' \times (\bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_{gn}) dm + \int_{\tau'(E_n)} \bar{r}' \\ \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_{gn}) dm \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

4. 基礎式の液体ロケットへの適用

3. では一般的な式を導いた。以下で, これを中型ないし大型衛星打上げ用液体ロケットに適用する。

4.1 前提条件 (i) 機体は機軸を含むピッチおよびヨー面に対して対称とし, 燃焼段のタンクは単一(複数への拡張は困難でない)とする。 x 軸は中心軸で機首方向に, y, z 軸はそれぞれ, ピッチ, ヨー軸にとり, 原点 O はジンバル点を通る x 軸に垂直な面内にとる。

(ii) エンジンは複数でジンバル式とし, おおのこのエンジンの構造, 燃焼等の特性は同一とし, かつ剛

体とし, 軸対称で, 初期 canted angle は無視する。エンジンの配置はピッチおよびヨー面に対称で, 個々のエンジンへの推進薬流量 ($-\dot{m}_n$ (正)) は一定とする。ここで, $\dot{m}_n$ は単なる記号で, 時間微分を意味しない。

(iii) 3.4 の曲げ固有振動モード形は, ロケットを自由-自由の棒状構造と考え, ピッチ面およびヨー面の $\bar{k}\phi_{pv}(x, t)$, $\bar{j}\phi_{yv'}(x, t)$ で表わされるとし, ξ_{pv} , $\xi_{yv'}$ をそれらの一般座標とする。 $\bar{u}$ は微小で, 次式で表わされるとする。

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{r}, t) = \bar{j}u_y + \bar{k}u_z = \bar{j} \sum_v \xi_{yv} \phi_{yv} \\ + \bar{k} \sum_v \xi_{pv} \phi_{pv} \end{aligned} \quad (32)$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルとする。

(iv) 内部流体の機体に対する相対速度を以下に仮定する。ロケット胴体部の固体部および流体部をそれぞれ, $\tau(B)$, $\tau'(B)$ とし, $\tau'(B)$ からスロッシング質量を除いた部分を $\tau'(B')$ とする。 $\bar{i}$ を中心線にそった尾部方向の単位ベクトルとすると,

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_s &= \dot{\bar{u}} \quad \text{for } \tau(B) \\ \bar{v}_f &= \bar{v}_s + v_i \bar{i} \quad \text{for } \tau'(B') \\ \bar{i} &= -(\bar{i} + \bar{u}') \quad \text{for } \tau(B) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここに, $\bar{u}' = \partial/\partial x(\bar{u})$, $\dot{\bar{u}} = \partial/\partial t(\bar{u})$ とする。 v_i はタンク断面で一様で, 一定場所では t により不変とする。

つぎに, 第 n エンジンの xyz 系に対する位置関係を第5図の如く表わす。 δ_{pn} , δ_{yn} はピッチ面およびヨー面におけるエンジンふれ角 (エンジン支持機構および油圧アクチュエーター内の流体の弾性変位を含む) で, エンジンの機体に対する固定位置からの変位は, 次の $\bar{I}_n$ なる量を考え,

$$\bar{I}_n = -\delta_{yn} \bar{j} + \delta_{pn} \bar{k} \quad (34)$$

$x\bar{I}_n$ (座標原点 O はジンバル点の面内にある) で表わさ

第5図 エンジン位置

れるとする。したがって、 $\bar{v}_f$ は下記の如く仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_s &= \dot{\bar{u}} + x \bar{I}'_n \quad \text{for } \tau(E_n) \\ \bar{v}_f &= \bar{v}_s + v_i \bar{I}_n \quad \text{for } \tau'(E_n) \\ \bar{I}_n &= -(\bar{i} + \bar{u}' + \bar{I}'_n) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$\bar{I}_n$ は第 n エンジンの中心線にそった尾部方向単位ベクトルで、 $\bar{u}$ は各エンジンについて同一とする。 G_n を通って、エンジンの中心軸およびこれに垂直な互に直交する軸に対する、燃焼ガスも含めたエンジンの慣性能力率を、それぞれ I_{ex} , I_e , I_c とし、 I_e に対して I_{ex} は無視出来るとする。

横スロッシングはタンクの微小変形と、各個のタンク長が全長に比して短いことから、剛体タンクのモデルを用いる。第 k スロッシング質量、固有円振動数および減衰比をそれぞれ、 μ_k , w_k , ζ_k とし、 $\bar{S}_k$ を横スロッシング変位 (第3図) として、 μ_k の位置ベクトル $\bar{r}_k$ は次式で表わされるとする。

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_k &= x_k \bar{i} + \bar{u}(x_k) + \bar{S}_k \\ \bar{S}_k &= y_k \bar{j} + z_k \bar{k} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

したがって、 $d^*/dt(\bar{u}(x_k)) = \dot{\bar{u}}(x_k) + \bar{u}'(x_k)\dot{x}_k$ から、 μ_k の機体軸に対する速度 $\bar{v}_k$ は、 $\bar{i}(x_k) = \bar{i}(x = x_k)$ とし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_k &= \dot{\bar{u}}(x_k) + \bar{S}'_k + v_i(x_k)\bar{i}(x_k) \\ v_i(x_k) &= -\dot{x}_k \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(v) 重力は機体の場所によって不変とし、外力は空気力と重力のみの場合を考える。

(vi) 微小量の仮定。[1] μ_k , ϕ_{pv} , ϕ_{vv}' 等の時間に対する偏微分は無視する。[2] $\bar{w}$, $\bar{I}'_n$, $\bar{S}_k$, ξ_{pv} , ξ_{vv}' , $\xi_{pv}\phi_{pv}$, $\xi_{vv}'\phi_{vv}'$, $\xi_{pv}\phi_{vv}'$ および $\xi_{vv}'\phi_{vv}'$ 等と、これらの t に関する偏微分を微小とする。[3] $\bar{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ の $\dot{x}_c$, x_c および $\tau'(B)$ の v_c は微小量とする。[4] m , m_{pv} , m_{vv} , m_{vv}' ((55)式)の時間微分を微小量とする。

重心の運動、回転運動、スロッシング運動および曲げ振動式では、上記の微小量の3個以上の積を含む項を削除する。エンジン式では[4]を除いて同様の項を削除する。

4.2 重心の運動方程式 ノズル出口のガス流のエンジンに対する相対速さを v_e とし、第4図により、

$$\left. \begin{aligned} \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{r}[(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_c'] ds &= -\dot{m}_n \bar{r}_{en} \\ \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{v}_f[(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_c'] ds &= -\dot{m}_n(v_e \bar{I}_n + \bar{r}_{en}) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(7) 式の $\bar{F}$ に関して、 σ_s の ds に作用する外力から、大気静圧 p_a によるものを差引いた外力を $\bar{n}_c \cdot \bar{T}' ds$ で表わし、 $\bar{r}_{en}$ のガス圧を p_e とし、 $\sigma_s + \sum_n \sigma_{en}$ に作用する大気静圧の合力が0であることを考慮して、

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \int_{\sigma_s} \bar{n}_c \cdot \bar{T}' ds + \int_{\sigma_s} -p_a \bar{n}_c ds \\ &+ \sum_n \int_{\sigma_{en}} -p_a \bar{n}_c' ds + \sum_n \int_{\sigma_{en}} (p_a - p_e) \bar{n}_c' ds \\ &+ \int_{\tau + \tau'} \bar{R} dm \end{aligned}$$

上式の右边第2, 3項の和は0となり、第1項はいわゆる空気力でこれを $\bar{F}_A$ で表わし、第5項は重力による項となり $\bar{F}_g$ で表わし、 $\bar{n}_c' = \bar{I}_n$ であるから、

$$\bar{F} = \sum_n (p_a - p_e) A_e \bar{I}_n + \bar{F}_A + \bar{F}_g \quad (39)$$

(38), (39)を用い、 $\dot{m} = \sum \dot{m}_n$ を考慮して、(18)式は

$$\begin{aligned} m[\ddot{\bar{V}}_c + \bar{w} \times \bar{V}_c] - 2 \sum \dot{m}_n[\dot{\bar{r}}_{en} - \dot{\bar{r}}_c + \bar{w} \\ \times (\bar{r}_{en} - \bar{r}_c)] = \bar{F}_T + \bar{F}_A + \bar{F}_g \end{aligned} \quad (40)$$

ここに、 $\bar{F}_T$ は(38)の第2式のうち推力項を右边に移して、次式の如くまとめた。 A_e をノズル出口の断面積として、

$$\left. \begin{aligned} T_e &= -\dot{m}_n v_e + (p_e - p_a) A_e \\ \bar{F}_T &= -\sum_n T_e \bar{I}_n \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$(p_e - p_a) A_e$ はいわゆる圧力推力の項である。

つぎに $\bar{r}_c$ を求める。いま、機体の曲げ変位がなく δ_{pn} も δ_{yn} も0で、かつスロッシング変位が起こらないと仮想したとき、 dm の O に対する位置ベクトルを $\bar{r}_R$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_R + \bar{u} && \text{for } \tau(B), \tau'(B') \\ \bar{r}_k &= \bar{r}_R + \bar{u}(x_k) + \bar{S}_k && \text{for sloshing mass} \\ \bar{r} &= \bar{r}_R + \bar{u} + \bar{I}'_n x && \text{for } \tau(E_n), \tau'(E_n) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

また、 t で曲げ、エンジンのふれおよびスロッシングが起こらないと仮想したときの重心位置を $\bar{r}_c^0$ とすると、

$$\bar{r}_c^0 = \frac{1}{m} \int_{\tau + \tau'} \bar{r}_R dm \quad (43)$$

機体の対称性から、 $\bar{r}_c^0$ の座標は $(x_c^0, 0, 0)$ とおけ、(42), (43)式と、自由一自由棒の固有振動に関する次の慣性力の釣合い式、

$$\int_{\tau + \tau'} \phi_{pv} dm = 0, \quad \int_{\tau + \tau'} \phi_{vv} dm = 0 \quad (44)$$

を用いて、エンジンの重心の x 座標を x_{en} とすれば、(12), (42), (43)から、

$$\bar{r}_c = \bar{r}_c^0 + \sum_k (\mu_k/m) \bar{S}_k + \sum_n (m_{en} x_{en}/m) \bar{I}'_n \quad (45)$$

$\dot{\bar{r}}_c$, $\ddot{\bar{r}}_c$ は(45)から直接時間微分によって得られる。

さらに、後節の回転運動の方程式の導入にも使用する都合上、 $\bar{r}_{en}$ に関する関係式をここで導いておく。

$\bar{r}_{en}$ は、曲げ変位がないときの $\bar{r}_{en}$ を $\bar{r}_{en}^0(0, y_{en}^0, z_{en}^0)$ として、

$$\begin{aligned} \bar{r}_{en} &= \bar{r}_{en}^0 + x_{en} \bar{i} + \{u_v(x_{en}) - x_{en} \delta_{yn}\} \bar{j} \\ &+ \{u_z(x_{en}) + x_{en} \delta_{pn}\} \bar{k} \end{aligned} \quad (46)$$

x_{en} は $\bar{r}_{en}$ の x 座標で, 対称配置から次式が仮定出来る.

$$\sum_n \bar{r}_{en}^0 = 0, \sum_n y_{en}^0 \delta y_n = 0, \sum_n z_{en}^0 \delta z_n = 0 \quad (47)$$

なお, ロール制御のためのエンジンふれ角は, ピッチおよびヨー制御のためのふれ角に比して微小として, 推力項によるロール・モーメントの場合は除いて, 次式を仮定する.

$$\sum_n \bar{r}_{en}^0 \times \bar{I}_n = 0 \quad (48)$$

(45), (46) および (47) の第1式を用い, 4.1 の微小項の処理を行なって (40) を xyz 成分に書下す. このさい重力の加速度 $\bar{g}$ の x, y, z 成分をそれぞれ g_x, g_y, g_z とする.

$$\left. \begin{aligned} m[\dot{V}_{cx} + w_y V_{cx} - w_z V_{cy}] + 2\dot{m}\dot{x}_c^0 \\ = F_{Tx} + F_{Ax} + F_{gx} \\ m[\dot{V}_{cy} + w_x V_{cx} - w_z V_{cz}] + 2\dot{m}[\dot{y}_c - \dot{u}_y(x_{en}) \\ + w_x(x_c^0 - x_{en})] + 2\dot{m}x_{en} \sum_n \dot{\delta y}_n \\ = F_{Ty} + F_{Ay} + F_{gy} \\ m[\dot{V}_{cz} + w_x V_{cy} - w_y V_{cx}] + 2\dot{m}[\dot{z}_c - \dot{u}_z(x_{en}) \\ - w_y(x_c^0 - x_{en})] - 2\dot{m}x_{en} \sum_n \dot{\delta z}_n \\ = F_{Tz} + F_{Az} + F_{gz} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{Tx} &= \sum_n T_x \\ F_{Ty} &= T_y \sum_n (u_y'(0) - \delta y_n) \\ F_{Tz} &= T_z \sum_n (u_z'(0) + \delta z_n) \\ F_{gx} &= mg_x, \quad F_{gy} = mg_y, \quad F_{gz} = mg_z \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

ここに, $u_y'(0)$ 等はジンバル点 ($x=0$) における値を示す. また $\dot{y}_c, \dot{z}_c$ は (45) で表わされる.

4.3 重心まわりの回転運動方程式 (25) でいわゆる推力項を含むものは左辺の第9項で,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{en}} \rho_f (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_c'] ds \\ = \dot{m}_n \bar{v}_c (\bar{r}_c - \bar{r}_{en}) \times \bar{I}_n + \dot{m}_n (\bar{r}_c - \bar{r}_{en}) \times \dot{\bar{r}}_{en} \end{aligned} \quad (51)$$

したがって, (41) と同様に推力によるモーメントを, 圧力推力の項も含めて, $\bar{M}_T^0$ であらわす.

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= I_{xx}^0 + \sum_{\nu} m_{\nu} \xi_{\nu}^2 + \sum_{\nu} m_{\nu} \xi_{\nu}^2 + \sum_k \mu_k [y_k^2 + z_k^2 + 2y_k u_y(x_k) + 2z_k u_z(x_k)] + \sum_n [2J_{nz} \delta z_n \\ &\quad - 2J_{ny} \delta y_n + I_c (\delta y_n^2 + \delta z_n^2)] - m(y_c^2 + z_c^2) \\ I_{xy} &= I_{xy}^0 - \sum_k \mu_k x_k y_k + \sum_n I_c \delta y_n + m x_c^0 y_c \\ I_{xz} &= I_{xz}^0 - \sum_k \mu_k x_k z_k - \sum_n I_c \delta z_n + m x_c^0 z_c \\ I_{yy} &= I_{yy}^0 + \sum_{\nu} m_{\nu} \xi_{\nu}^2 + \sum_k \mu_k (y_k^2 + 2z_k u_z(x_k)) + \sum_n [2J_{nz} \delta z_n + I_c \delta y_n^2] - m z_c^2 \\ I_{yz} &= I_{yz}^0 - \sum_{\nu, \nu'} m_{\nu} \xi_{\nu} \xi_{\nu'} - \sum_k \mu_k (y_k z_k + z_k u_y(x_k) + y_k u_z(x_k)) + \sum_n [I_{nz} \delta y_n - J_{ny} \delta z_n + I_c \delta y_n \delta z_n] + m y_c z_c \\ I_{zz} &= I_{zz}^0 + \sum_{\nu} m_{\nu} \xi_{\nu}^2 + \sum_k \mu_k (y_k^2 + 2y_k u_y(x_k)) - \sum_n [2J_{ny} \delta y_n - I_c \delta y_n^2] - m y_c^2 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\bar{M}_T = - \sum_n T_c (\bar{r}_{en} - \bar{r}_c) \times \bar{I}_n \quad (52)$$

また, 空気力によるモーメントを $\bar{M}_A$ とし, (25) の第7項は (38) を用い, 末項の積分は断面中心の位置 $\bar{r}_{en}$ で代表させて, 結局 (25) 式は次式の如く表わされる.

$$\begin{aligned} \bar{I} \cdot \dot{\bar{w}} + \dot{\bar{I}} \cdot \bar{w} + \bar{w} \times (\bar{I} \cdot \bar{w}) + d^*/dt(\bar{I} \cdot \bar{w}) + \bar{w} \times \bar{I} \\ - \bar{r}_c \times [m\ddot{\bar{r}}_c - 2 \sum_n \dot{m}_n (\dot{\bar{r}}_{en} - \dot{\bar{r}}_c)] - \bar{w} \\ \times [\bar{r}_c \times \{m\ddot{\bar{r}}_c - \sum_n \dot{m}_n \bar{r}_{en}\}] - \sum_n \dot{m}_n \bar{r}_{en} \\ \times \dot{\bar{r}}_{en} - \sum_n \dot{m}_n (\bar{r}_{en} - \bar{r}_c) \times (\bar{w} \times (\bar{r}_{en} - \bar{r}_c)) \\ = \bar{M}_T + \bar{M}_A \end{aligned} \quad (53)$$

さて, $\bar{I}$ を機体曲げ, エンジンのふれおよびスロッシングが起こらないと仮想したときの $\bar{I}_c^0$ で表わす. このために, (42), (45) を簡単に, $\bar{r} = \bar{r}_R + \bar{d}$, $\bar{r}_c = \bar{r}_c^0 + \Delta \bar{r}_c$ とおくと, $\bar{I} \cdot \bar{w}$ と $\bar{I}^0 \cdot \bar{w}$ は,

$$\left. \begin{aligned} \bar{I} \cdot \bar{w} &= \int_{\tau + \tau'} (\bar{r}_R + \bar{d} - \bar{r}_c^0 - \Delta \bar{r}_c) \\ &\quad \times \{\bar{w} \times (\bar{r}_R + \bar{d} - \bar{r}_c^0 - \Delta \bar{r}_c)\} dm \\ \bar{I}^0 \cdot \bar{w} &= \int_{\tau + \tau'} (\bar{r}_R - \bar{r}_c^0) \times \{\bar{w} \times (\bar{r}_R - \bar{r}_c^0)\} dm \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

で表わされる. 機体の対称性と機体曲げ, スロッシング変位およびエンジンのふれの仮定から $\Delta \bar{r}_c$ の成分は, $(0, y_c, z_c)$ に等しくなる.

さらに, 自由-自由振動の慣性力によるモーメントの釣合い式と, 一般質量に関係した定義式および曲げモードの直交性を示す. 以下の関係式

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau + \tau'} x \phi_{\nu} dm &= 0, \quad \int_{\tau + \tau'} x \phi_{\nu'} dm = 0 \\ m_{\nu\nu} &= \int_{\tau + \tau'} \phi_{\nu}^2 dm, \quad m_{\nu\nu'} = \int_{\tau + \tau'} \phi_{\nu} \phi_{\nu'} dm \\ m_{\nu\nu'} &= \int_{\tau + \tau'} \phi_{\nu} \phi_{\nu'} dm \\ \int_{\tau + \tau'} \phi_{\nu} \phi_{\nu'} dm &= \int_{\tau + \tau'} \phi_{\nu} \phi_{\nu'} dm = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{for } \nu \neq \nu' \quad (55)$$

と, (42) ~ (48), (55) 等を用いて $\bar{I}$ を成分に書下す.

つぎに, 4.1 の $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$ を用いて同様に, $\bar{L}$ の成分は,

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \sum_{\nu, \nu'} m_{\nu\nu'} (\xi_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}' - \xi_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}') + \sum_k \mu_k [y_k (\dot{z}_k + \dot{u}_z(x_k)) - v_z(x_k) u_z'(x_k) - z_k (\dot{y}_k + \dot{u}_y(x_k)) \\ &\quad - v_z(x_k) u_y'(x_k) - \dot{y}_k u_z(x_k) + \dot{z}_k u_y(x_k)] - \sum_n [J_{ny} \delta_{pn} + J_{nz} \delta_{yn} - J_{ny} \delta_{pn} - J_{nz} \delta_{yn} + I_e (\delta_{pn} \delta_{yn} - \delta_{pn} \delta_{yn})] \\ &\quad + \dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} (u_y u_z' - u_z u_y') dx - \dot{m}_n x_{en} \sum_n [\delta_{pn} u_y(0) + \delta_{yn} u_z(0)] \\ L_y &= - \sum_k \mu_k \{z_k v_z(x_k) + x_k \dot{z}_k\} - I_e \sum_n \delta_{pn} - \dot{m} \{x_s u_z(x_s) - x_{en} u_z(x_{en})\} + 2\dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} u_z dx \\ L_z &= \sum_k \mu_k \{y_k v_z(x_k) + x_k \dot{y}_k\} - I_e \sum_n \delta_{yn} + \dot{m} \{x_s u_y(x_s) - x_{en} u_y(x_{en})\} - 2\dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} u_y dx \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

ここに, x_s は液面の x 座標で, J_{ny} , J_{nz} は次式とする.

$$\left. \begin{aligned} J_{ny} &= m_{en} x_{en} u_y(0) + I_e u_y'(0) \\ J_{nz} &= m_{en} x_{en} u_z(0) + I_e u_z'(0) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

以上の関係式を用い, 4.1 の微小項の処理を行ない, (53) を xyz 成分で表す.

$$\begin{aligned} I_{xx}^0 \dot{w}_x + [I_{xy}^0 - \sum_k \mu_k y_k (x_k - x_c^0) + (I_e - m_{en} x_{en} x_c^0) \sum_n \delta_{yn}] \dot{w}_y + [I_{xz}^0 - \sum_k \mu_k z_k (x_k - x_c^0) \\ - (I_e - m_{en} x_{en} x_c^0) \sum_n \delta_{pn}] \dot{w}_z + \dot{I}_{xy}^0 w_y + \dot{I}_{xz}^0 w_z + (I_{xx}^0 - I_{yy}^0) w_y w_z - I_{xy}^0 w_x w_z \\ - I_{yz}^0 (w_x^2 - w_y^2) + I_{xz}^0 w_x w_y + \sum_{\nu, \nu'} m_{\nu\nu'} (\xi_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}' - \xi_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}') + \sum_k \mu_k [\dot{z}_k (y_k + u_y(x_k)) - \dot{y}_k (z_k + u_z(x_k)) \\ + y_k \dot{u}_z(x_k) - z_k \dot{u}_y(x_k)] + \sum_n [J_{ny} \delta_{pn} + J_{nz} \delta_{yn} - \dot{J}_{ny} \delta_{pn} - \dot{J}_{nz} \delta_{yn} + I_e (\delta_{pn} \delta_{yn} - \delta_{pn} \delta_{yn})] + m (z_c \dot{y}_c - y_c \dot{z}_c) \\ = M_{Tx} + M_{Ax} \\ [I_{xy}^0 - \sum_k \mu_k y_k (x_k - x_c^0) + (I_e - m_{en} x_{en} x_c^0) \sum_n \delta_{yn}] \dot{w}_x + I_{yy}^0 \dot{w}_y + I_{yz}^0 \dot{w}_z + [\dot{I}_{xy}^0 - 2 \sum_k \mu_k \dot{y}_k (x_k - x_c^0) \\ + 2(I_e - m_{en} x_{en} x_c^0) \sum_n \delta_{yn}] w_x + [\dot{I}_{yz}^0 - \dot{m}_n \sum_n \{(y_{pn}^0)^2 + (x_{en} - x_c^0)^2\}] w_y + \dot{I}_{xz}^0 w_z + (I_{xx}^0 \\ - I_{zz}^0) w_x w_z - I_{yz}^0 w_y w_z - I_{xz}^0 (w_x^2 - w_z^2) + I_{xy}^0 w_y w_z - \sum_k \mu_k (x_k \dot{z}_k - z_k \dot{x}_k) - I_e \sum_n \delta_{pn} \\ + m (x_c^0 \dot{z}_c - z_c \dot{x}_c^0) - 2\dot{m}_n x_c^0 \sum_n \{\dot{u}_z(x_{en}) + x_{en} \delta_{pn} - \dot{z}_c\} + 2\dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} \dot{u}_z dx - \dot{m} \{x_s \dot{u}_z(x_s) - x_{en} \dot{u}_z(x_{en})\} \\ = M_{Ty} + M_{Ay} \\ [I_{xz}^0 - \sum_k \mu_k z_k (x_k - x_c^0) - (I_e - m_{en} x_{en} x_c^0) \sum_n \delta_{yn}] \dot{w}_x + I_{yz}^0 \dot{w}_y + I_{zz}^0 \dot{w}_z + [\dot{I}_{xz}^0 - 2 \sum_k \mu_k \dot{z}_k (x_k - x_c^0) \\ - 2(I_e - m_{en} x_{en} x_c^0) \sum_n \delta_{pn}] w_x + \dot{I}_{yz}^0 w_y + [\dot{I}_{zz}^0 - \dot{m}_n \sum_n \{(y_{pn}^0)^2 + (x_{en} - x_c^0)^2\}] w_z + (I_{yy}^0 - I_{zz}^0) w_x w_y \\ - I_{xz}^0 w_z w_y - I_{yz}^0 (w_y^2 - w_z^2) + I_{yz}^0 w_z w_x + \sum_k \mu_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) - I_e \sum_n \delta_{yn} - m (x_c^0 \dot{y}_c - y_c \dot{x}_c^0) \\ + 2\dot{m}_n x_c^0 \sum_n \{\dot{u}_y(x_{en}) - x_{en} \delta_{yn} - \dot{y}_c\} - 2\dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} \dot{u}_y dx + \dot{m} \{x_s \dot{u}_y(x_s) - x_{en} \dot{u}_y(x_{en})\} = M_{Tx} + M_{Ax} \quad (59) \end{aligned}$$

$\bar{M}_T$ の成分は, $\bar{r}_{en} = \bar{r}_{en}^0 + \bar{u}(0) + x_{en} \{\bar{i} + \bar{u}'(0) + \bar{\Gamma}_n\}$ を用いて,

$$\left. \begin{aligned} M_{Tx} &= T_e \sum_n [\{y_{pn}^0 + u_y(0) - y_c\} (u_z'(0) + \delta_{pn}) - (z_{pn}^0 + u_z(0) - z_c) (u_y'(0) - \delta_{yn})] \\ M_{Ty} &= T_e \sum_n [u_z(0) + x_c^0 (u_z'(0) + \delta_{pn}) - z_c] \\ M_{Tz} &= -T_e \sum_n [u_y(0) + x_c^0 (u_y'(0) - \delta_{yn}) - y_c] \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

4.4 スロッシング運動方程式 横スロッシングを 3.3 の如く表わすと, y , z 成分に対して(1)式の右辺は, スプリングの復原力とダッシュ・ポットの減衰力および重力の項で表わされる. したがって, 第 k スロッシング質量の y , z 方向の運動方程式は,

$$\begin{aligned} \mu_k [\ddot{\vec{v}}_c + \vec{w} \times \vec{\nabla}_c + \dot{\vec{w}} \times (\vec{r}_k - \vec{r}_c) + \vec{w} \times (\vec{w} \times (\vec{r}_k - \vec{r}_c)) + 2\vec{w} \times \{\dot{\vec{u}}(x_k) + \dot{\vec{s}}_k + v_z(x_k) \vec{f}(x_k) - \dot{\vec{r}}_c\} + \ddot{\vec{u}}(x_k) \\ + \dot{\vec{s}}_k + d^* dt \{v_z(x_k) \vec{f}(x_k)\} - \dot{\vec{r}}_c] = -\mu_k w_k^2 \vec{s}_k - 2\mu_k \zeta_k w_k (\vec{s}_k / |\vec{s}_k|) (\vec{s}_k \cdot \dot{\vec{s}}_k / |\vec{s}_k|) + \mu_k \vec{g} \end{aligned} \quad (61)$$

ここに, $|\vec{s}_k|$ は $\vec{s}_k$ の大きさを表わし, 右辺の第2項は減衰力が $\vec{s}_k$ と直角方向には作用せず, $|\vec{s}_k|$ の変化に対してのみ作用するとした. (61)を 4.1 の微小項の処理を行ない y , z 成分で表わすと,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_k + 2\zeta_k w_k y_k (\dot{y}_k \dot{y}_k + z_k \dot{z}_k) / (y_k^2 + z_k^2) + w_k^2 y_k = & -\dot{V}_{cy} - w_x V_{cx} + w_x V_{cz} - \dot{w}_x (x_k - x_c^0) + \dot{w}_x (u_x(x_k) \\ & + z_k - z_c) - w_x w_y (x_k - x_c^0) - 2w_x (\dot{x}_k - \dot{x}_c^0) + 2w_x (\dot{u}_x(x_k) + \dot{z}_k - \dot{z}_c) - \dot{u}_y(x_k) - \dot{x}_k \dot{u}_y'(x_k) \\ & - \dot{x}_k \dot{u}_y'(x_k) + \dot{y}_c + g_y \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_k + 2\zeta_k w_k z_k (\dot{y}_k \dot{y}_k + z_k \dot{z}_k) / (y_k^2 + z_k^2) + w_k^2 z_k = & -\dot{V}_{cx} - w_x V_{cy} + w_y V_{cx} - \dot{w}_x (u_y(x_k) + y_k - y_c) \\ & + \dot{w}_y (x_k - x_c^0) - w_x w_z (x_k - x_c^0) - 2w_x (\dot{u}_y(x_k) + \dot{y}_k - \dot{y}_c) + 2w_y (\dot{x}_k - \dot{x}_c^0) - \dot{u}_z(x_k) - \dot{x}_k \dot{u}_z'(x_k) \\ & - \dot{x}_k \dot{u}_z'(x_k) + \dot{z}_c + g_z \end{aligned} \quad (62)$$

4.5 曲げ振動方程式 (27)式において, $\bar{a}_a$ は(42)を用いて(11)より,

$$\bar{a}_a = \ddot{V}_c + \dot{w} \times \bar{V}_c + \dot{w} \times (\bar{F}_R + \bar{u} - \bar{F}_c) + \bar{w} \times \{\bar{w} \times (\bar{F}_R + \bar{u} - \bar{F}_c)\} + 2\bar{w} \times (\dot{\bar{u}} - \dot{\bar{F}}_c) + \ddot{\bar{u}} - \ddot{\bar{F}}_c \quad (63)$$

(63) は全機質量素片に適用される。また, (27) 式の Q_{ev} に寄与するスロッシング変位, エンジンのふれ運動および流体の流れによる有効力は, それに対応する慣性力で表わされるとする。いま, (27) 式の記号のうち, 固有振動形 $\phi_{y,j}$ および $\phi_{p,k}$ に対応する $\omega_y, \zeta_y, Q_{ev}, Q_y$ をそれぞれ, $\omega_{yv}, \zeta_{yv}, Q_{yev}, Q_{yv}$ および $\omega_{pv}, \zeta_{pv}, Q_{pev}, Q_{pv}$ とし, まず, (44), (55)を用い, 振動形 $\phi_{y,j}$ に対して(63)から,

$$\int_{\tau+\tau'} \bar{a}_a \cdot (\phi_{y,j}) dm = m_{yv} \ddot{\xi}_{yv} - (w_x^2 + w_z^2) m_{yv} \xi_{yv} - 2w_x \sum_{y'} m_{y'y} \dot{\xi}_{y'y'} + (w_y w_x - \dot{w}_x) \sum_{y'} m_{y'y} \xi_{y'y'} \quad (64)$$

つぎに, (11)と(63)を比べ, (33)~(37)を用いて, Q_{yev} は,

$$\begin{aligned} Q_{yev} = & - \int_{\tau'(B')} [2\bar{w} \times v_i \bar{F} + d^*/dt(v_i \bar{F})] \cdot (\phi_{y,j}) dm - \sum_k \mu_k [\dot{w} \times \bar{s}_k + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{s}_k) + 2\bar{w} \times \{\dot{\bar{s}}_k \\ & + v_i(x_k) \bar{F}(x_k)\} + \ddot{\bar{s}}_k + d^*/dt\{v_i(x_k) \bar{F}(x_k)\}] \cdot (\phi_{y,j}) - \sum_n \int_{\tau(E_n)+\tau'(E_n)} [\dot{w} \times \bar{\Gamma}_n x - \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{\Gamma}_n x) \\ & + 2\bar{w} \times \dot{\bar{\Gamma}}_n x + \ddot{\bar{\Gamma}}_n x] \cdot (\phi_{y,j}) dm - \sum_n \int_{\tau'(E_n)} [2\bar{w} \times v_i \bar{F}_n + d^*/dt(v_i \bar{F}_n)] \cdot (\phi_{y,j}) dm \end{aligned}$$

ここで, 上式の Q_{yev} のうち d^*/dt の記号を含む項を集めて, $\int_{\tau'} \phi_{y,j} \cdot \frac{d^*}{dt}(v_i \bar{F}) dm$ で表わすと, $\phi_{y,j}$ を無視する仮定と(付2・5)を用いて,

$$\begin{aligned} \int_{\tau'} \phi_{y,j} \cdot \frac{d^*}{dt}(v_i \bar{F}) dm = & \int_{\tau'} \frac{d^*}{dt} [v_i \phi_{y,j} (j \cdot \bar{F})] dm = \frac{d^*}{dt} \int_{\tau'} [v_i \phi_{y,j} (j \cdot \bar{F})] dm + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f v_f \phi_{y,j} (j \cdot \bar{F}_n) [(v_f \\ & - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_f] ds \end{aligned}$$

結局, Q_{yev} は次式の如くなる。

$$\begin{aligned} Q_{yev} = & \sum_k \mu_k [-\ddot{y}_k + (w_x^2 + w_z^2) y_k + (\dot{w}_x - w_y w_z) z_k + 2w_x \dot{z}_k] \phi_{y,j}(x_k) + \sum_n [m_{en} x_{en} \phi_{y,j}(0) + I_e \phi_{y,j}'(0)] \\ & \cdot [\ddot{\delta}_{yn} - (w_x^2 + w_y^2) \delta_{yn} + (\dot{w}_x - w_y w_z) \delta_{pn} + 2w_x \dot{\delta}_{pn}] + \dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} 2(w_x u_x' - w_z) \phi_{y,j} dx \\ & + \sum_n \dot{m}_n \int_{x_{en}}^0 2w_x \delta_{pn} \phi_{y,j} dx - \frac{d^*}{dt} \left[\dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} u_y' \phi_{y,j} dx - \sum_n \dot{m}_n \int_{x_{en}}^0 \delta_{yn} \phi_{y,j} dx \right] \\ & - \sum_n \dot{m}_n v_s \phi_{y,j}(x_{en}) (u_y' - \delta_{yn}) \end{aligned} \quad (65)$$

$\dot{m}$ または, $\dot{m}_n$ を含む項が流れによる影響を表わす項となる。ここで, (41), (51)式と同様に, Q_{yv} から圧力推力による一般力と推力による(65)式の末項を合せて Q_{yTv} とすると,

$$Q_{yTv} = T_e \sum_n (u_y'(0) - \delta_{yn}) \phi_{y,j}(x_{en}) \quad (66)$$

また, 空気力による一般力を Q_{yAv} とする。 $\phi_{p,k}$ の振動形に対しても同様にして

$$Q_{pTv} = T_e \sum_n (u_z'(0) + \delta_{pn}) \phi_{p,j}(x_{en}) \quad (67)$$

結局, 4.1 の微少量の処理を行ない, ξ_{yv}, ξ_{pv} の振動方程式は, 次式の如くなる。

$$\begin{aligned} m_{yv} \ddot{\xi}_{yv} + 2m_{yv} \zeta_{yv} w_{yv} \dot{\xi}_{yv} + m_{yv} w_{yv}^2 \xi_{yv} = & \sum_{y'} m_{y'y} (w_x \xi_{y'y'} + 2w_x \dot{\xi}_{y'y'}) + \sum_k \mu_k [-\ddot{y}_k + 2w_x \dot{z}_k + w_x z_k] \\ & \cdot \phi_{y,j}(x_k) + \{m_{en} x_{en} \phi_{y,j}(0) + I_e \phi_{y,j}'(0)\} \sum_n [\ddot{\delta}_{yn} + 2w_x \dot{\delta}_{pn} + \dot{w}_x \delta_{pn}] - \dot{m}_n [\phi_{y,j}(0) x_{en} + \phi_{y,j}'(0) x_{en}^2/2] \sum_n \dot{\delta}_{yn} \\ & - \dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} (2w_x + \dot{u}_y') \phi_{y,j} dx + Q_{yTv} + Q_{yAv} \\ m_{pv} \ddot{\xi}_{pv} + 2m_{pv} \zeta_{pv} w_{pv} \dot{\xi}_{pv} + m_{pv} w_{pv}^2 \xi_{pv} = & - \sum_{y'} m_{y'y} (\dot{w}_x \xi_{y'y'} + 2w_x \dot{\xi}_{y'y'}) - \sum_k [\ddot{z}_k + 2w_x \dot{y}_k + \dot{w}_x y_k] \phi_{p,j}(x_k) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned}
& + \{m_{en} x_{cn} \phi_{pn}(0) + I_e \phi'_{pn}(0)\} \sum_n [-\ddot{\delta}_{pn} + 2w_x \dot{\delta}_{yn} + \dot{w}_x \delta_{yn}] + \dot{m}_n [\phi_{pn}(0) x_{en} + \phi_{pn}'(0) x_{en}^2/2] \sum_n \dot{\delta}_{pn} \\
& + \dot{m} \int_{x_{en}}^{x_s} (2w_y - \dot{u}_z') \phi_{pn} dx + Q_{pT_v} + Q_{pA_v}
\end{aligned} \quad (68)$$

4.6 エンジンの運動方程式 第 n エンジンについて, (35) より $\bar{v}_s$ は次式の如く表わすことが出来る.

$$\bar{v}_s = \dot{\bar{r}}_{gn} + x(\dot{u}'(0) + \dot{\bar{I}}_n) \quad (69)$$

また, エンジンの軸対称性から次式が成立つ.

$$\int_{\tau'(E_n)} \bar{v}_s \bar{r}' \times \bar{I}_n dm = 0$$

これらの関係式を用い, σ_{ein} 面の寄与を 0 とおいて, (30) と (31) は次式の如く変形出来る.

$$\begin{aligned}
& \bar{I}_{en} \cdot \dot{\bar{w}} + \dot{\bar{I}}_{en} \cdot \bar{w} + \bar{w} \times (\bar{I}_{en} \cdot \bar{w}) + m_{en} \bar{r}'_{cn'} \times \bar{a}_{gn} + \dot{\bar{I}}_{en} + \bar{w} \times \bar{L}_{en} - \dot{m}_n \bar{r}'_{en'} \times (\bar{w} \times \bar{r}'_{en'}) - \dot{m}_n \bar{r}'_{en'} \\
& \times \{x_{en}(\dot{u}'(0) + \dot{\bar{I}}_n)\} = \bar{M}_{en}
\end{aligned} \quad (70)$$

$$\bar{L}_{en} = \int_{\tau(E_n) + \tau'(E_n)} x \bar{r}' \times (\dot{u}'(0) + \dot{\bar{I}}_n) dm \quad (71)$$

まず, (56) の導入と同様にして, 機体曲げおよびエンジンふれがないとしたときの $\bar{r}'$ を $\bar{r}'_R$ とすると,

$$\bar{r}' = \bar{r}'_R + x(\bar{u}'(0) + \bar{I}_n)$$

したがって, $\bar{I}_{en}$ の xyz 成分を後程の微小項の処理を考慮して, 微小項の 1 次の項まで求め, マトリックスの形で表わすと次のようになる.

$$\begin{bmatrix}
0 & -I_e(u_y'(0) - \delta_{yn}) & -I_e(u_z'(0) + \delta_{pn}) \\
-I_e(u_y'(0) - \delta_{yn}) & I_e & 0 \\
-I_e(u_z'(0) + \delta_{pn}) & 0 & I_e
\end{bmatrix}$$

ただし, 4.1 の (iv) により I_{ez} は無視した.

つぎに, $\bar{L}_{en}$ の xyz 成分は (71) より,

$$\left. \begin{aligned}
L_{enx} &= I_e[(u_y'(0) - \delta_{yn})(\dot{u}_z'(0) + \dot{\delta}_{pn}) - (u_z'(0) + \delta_{pn})(\dot{u}_y'(0) - \dot{\delta}_{yn})] \\
L_{eny} &= -I_e(\dot{u}_z'(0) + \dot{\delta}_{pn}) \\
L_{enz} &= I_e(\dot{u}_y'(0) - \dot{\delta}_{yn})
\end{aligned} \right\} \quad (72)$$

さらに, δ_{pn} , δ_{yn} の正方向を考慮して $\bar{M}_{en}$ の y , z 成分を $-M_{eny}$, $-M_{enz}$ とし, 空気力によるトルクを無視すると,

$$\left. \begin{aligned}
M_{eny} &= M_{enp} - T_{nfp} \\
M_{enz} &= M_{eny} - T_{nfy}
\end{aligned} \right\} \quad (73)$$

ここに, M_{enp} , M_{eny} は油圧アクチュエーターによるトルクによるもの, T_{nfp} , T_{nfy} はジンバル点における摩擦力によるものである¹⁵⁾. また機体の運動による慣性力および重力とガス流によるロード・トルクの y , z 成分を T_{nLp} , T_{nLy} とすると¹⁵⁾, (70) の y , z 成分は結局次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned}
I_e \ddot{\delta}_{pn} + T_{nLp} + T_{nfp} &= M_{enp} \\
I_e \ddot{\delta}_{yn} + T_{nLy} + T_{nfy} &= M_{eny}
\end{aligned} \right\} \quad (74)$$

$\bar{a}_{gn}$ を (11) で表わし, (70) の右辺の重力による項は $m_{en} \bar{r}'_{en'} \times \bar{g}$ となることを考慮して, T_{nLp} , T_{nLy} を求め,

4.1 の微小量の処理を行なって次式を得る.

$$\begin{aligned}
T_{nLp} &= -m_{en} x_{cn} (\delta_{pn} + u_z'(0)) [\dot{V}_{cx} + (1/2) \dot{V}_{cx} (\delta_{pn} + u_z'(0)) + w_y V_{cx} - w_x V_{cy} + \dot{w}_y z_{gn}^0 - \dot{w}_x y_{gn}^0 \\
& - \dot{x}_c^0 - g_x] - 2I_e w_x (\dot{\delta}_{yn} - \dot{u}_y'(0)) - (\delta_{yn} - u_y'(0)) [I_e \dot{w}_x + (1/2) m_{en} x_{cn} \dot{V}_{cx} (\delta_{pn} - u_y'(0))] + I_e \dot{u}_z'(0) \\
& + m_e x_{cn} [\dot{w}_x u_y(0) + 2w_x \dot{u}_y(0) + \dot{u}_z(0)] + m_{en} x_{cn} [\dot{V}_{cx} + w_x V_{cy} - w_y V_{cx} + \dot{w}_x (y_{gn}^0 - y_c) \\
& + \dot{w}_y x_c^0 - 2w_x \dot{y}_c + 2w_y \dot{x}_c^0 - (w_x^2 + w_y^2) z_{gn}^0 - w_x w_z x_c^0 + w_y w_z y_{gn}^0 - \dot{x}_c - g_x] - I_e (\dot{w}_y - w_x w_z) \\
& - \dot{m}_n x_{en}^2 [\dot{\delta}_{pn} + \dot{u}_z'(0) - w_x (\delta_{yn} - u_y'(0)) - w_y]
\end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
T_{nLy} &= -m_{en} x_{cn} (\delta_{yn} - u_y'(0)) [\dot{V}_{cx} - (1/2) \dot{V}_{cy} (\delta_{yn} - u_y'(0)) + w_y V_{cx} - w_x V_{cy} + \dot{w}_y z_{gn}^0 - \dot{w}_x y_{gn}^0 \\
& - \dot{x}_c^0 - g_x] + 2I_e w_x (\dot{\delta}_{pn} + \dot{u}_z'(0)) + (\delta_{pn} + u_z'(0)) [I_e \dot{w}_x - (1/2) m_{en} x_{cn} \dot{V}_{cy} (\delta_{pn} + u_z'(0))] - I_e \dot{u}_y'(0) \\
& + m_{en} x_{cn} [\dot{w}_x u_z(0) + 2w_x \dot{u}_z(0) - \dot{u}_y(0)] + m_{en} x_{cn} [-\dot{V}_{cy} + w_x V_{cx} - w_z V_{cx} + \dot{w}_x (z_{gn}^0 - z_c) \\
& + \dot{w}_z x_c^0 - 2w_x \dot{z}_c + 2w_z \dot{x}_c^0 + (w_x^2 + w_z^2) y_{gn}^0 + w_x w_y x_c^0 - w_y w_z z_{gn}^0 + \dot{y}_c + g_y] - I_e (\dot{w}_z + w_x w_y) \\
& - \dot{m}_n x_{en}^2 [\dot{\delta}_{yn} - \dot{u}_y'(0) + w_x (\delta_{pn} + u_z'(0)) - w_z]
\end{aligned} \quad (75)$$

m_e を含む項がガス流の影響を示す.

したがって, (74), (75) を用い, 油圧アクチュエーターの作動には, 例えば線型化の仮定を用いて文献 15) を

用いて,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_{pn} + 2\zeta_{pc}w_{pc}\dot{\delta}_{pn} + w_{pc}^2\delta_{pn} + K_{pc}w_{pc}^2\delta_{pn} \\ = K_{pc}w_{pc}^2\delta_{pcn} - (1/I_e)[\dot{T}_{nLp} + \dot{T}_{nfp} \\ + 2\zeta_{pc}w_{pc}(T_{nLp} + T_{nfp})] \\ \ddot{\delta}_{yn} + 2\zeta_{yc}w_{yc}\dot{\delta}_{yn} + w_{yc}^2\delta_{yn} + K_{yc}w_{yc}^2\delta_{yn} \\ = K_{yc}w_{yc}^2\delta_{ycn} - (1/I_e)[\dot{T}_{nLy} + \dot{T}_{nfy} \\ + 2\zeta_{yc}w_{yc}(T_{nLy} + T_{nfy})] \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

ここに, w_{pc} , ζ_{pc} , K_{pc} ; w_{yc} , ζ_{yc} , K_{yc} はそれぞれ, ピッチ面およびヨー面に対するエンジン・サーボコントローラーの固有振動数と減衰比とサーボ・ゲインで δ_{pcn} , δ_{ycn} はピッチ面およびヨー面のエンジン回転に対するコマンド・シグナルである. ロール制御を δ_{pn} および δ_{yn} で行なうとすると, δ_{pcn} , δ_{ycn} はそれぞれピッチ, ヨー制御チャンネルの姿勢コマンド・シグナルとフィードバック信号以外に, ロール制御のための姿勢コマンド・シグナルとフィードバック信号で表わされる.

姿勢制御の方程式は, (76)式以外に, フィードバック・シグナル, ポジション・ジャイロ, レート・ジャイロ, 加速度計, 迎角計およびエンジン・コマンド・シグナル等に関する方程式が必要である. これらについてはここでは言及しない. ただ, 次節でこれらのセンサーの入力に關係する量を導入する.

4.7 制御センサー取付け位置の角速度, 加速度および迎角 ジャイロの機体取付け点の慣性空間に対する回転角速度は, 4.1 の曲げ変形を考慮して,

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(x_{GR}) = \omega_x \vec{i} + \{\omega_y - \dot{u}_y'(x_{GR})\} \vec{j} \\ + \{\omega_z + \dot{u}_y'(x_{GR})\} \vec{k} \end{aligned} \quad (77)$$

ここで, x_{GR} はジャイロ取付け点の x 座標で, (32)式で表わされる機体曲げによる回転角速度の x 成分は 0 とする.

加速度計取付け点の慣性空間加速度の機体軸成分, a_{ax} , a_{ay} , a_{az} は, 曲げがないときの取付け点の位置を (x_a, y_a, z_a) として, (11)式から(42)を用いて,

$$\begin{aligned} a_{ax} = \dot{V}_{cx} + w_y V_{cz} - w_z V_{cy} + \dot{w}_y [z_a + u_z(x_a) \\ - z_c] - \dot{w}_z [y_a + u_y(x_a) - y_c] + w_x w_y y_a \\ - (w_y^2 + w_z^2)(x_a - x_c^0) + w_x w_z z_a \\ + 2w_y [\dot{u}_z(x_a) - \dot{z}_c] - 2w_z [\dot{u}_y(x_a) - \dot{y}_c] \\ - \ddot{x}_c^0 - g_x \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} a_{ay} = \dot{V}_{cy} + w_x V_{cz} - w_z V_{cx} + \dot{w}_z (x_a - x_c^0) \\ - \dot{w}_x [z_a + u_z(x_a) - z_c] + w_y w_x z_a - (w_x^2 \\ + w_z^2) y_a + w_y w_z (x_a - x_c^0) - 2w_x \dot{x}_c^0 \\ - 2w_z [\dot{u}_z(x_a) - \dot{z}_c] + \dot{u}_y(x_a) - \dot{y}_c - g_y \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} a_{az} = \dot{V}_{cz} + w_x V_{cy} - w_y V_{cx} + \dot{w}_x y_a \\ + \dot{u}_y(x_a) - \dot{y}_c - \dot{w}_y (x_a - x_c^0) + w_x w_z (x_a \\ - x_c^0) - (w_x^2 + w_y^2) z_a + w_x w_y y_a + 2w_z \\ \cdot [\dot{u}_y(x_a) - \dot{y}_c] + 2w_y \dot{x}_c^0 + \dot{u}_z(x_a) - \dot{z}_c - g_z \end{aligned} \quad (78)$$

第6図 α_{sp}

ただし 4.1 の微小項の処理を行なった.

つぎに, 迎角計取付け位置における局所的な迎角を求める. いま, 慣性軸系を $O_I-x_Iy_Iz_I$ とし (第1図), 風速度は慣性軸系で $\vec{W}_I(W_{Ix}, W_{Iy}, W_{Iz})$ で与えられ, 重心位置の風速で代表出来るとして, 機体軸系の風の成分 $\vec{W}(W_x, W_y, W_z)$ は, $x_Iy_Iz_I$ 系と xyz 系の座標変換マトリックス $[T_I]$ を用いて, 次式で得られる.

$$\begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{Bmatrix} = [T_I] \begin{Bmatrix} W_{Ix} \\ W_{Iy} \\ W_{Iz} \end{Bmatrix} \quad (79)$$

迎角計は中心軸を含むピッチ面またはヨー面に取付けられているとし, 機体曲げがないときの O に対する位置ベクトルを $\vec{r}_a(x_a, y_a, z_a)$ とすると, この取付け点の気体に対する相対速度 $\vec{W}_r$ は,

$$\begin{aligned} \vec{W}_r = \vec{V}_c + \vec{\omega} \times \{\vec{r}_a + \vec{u}(x_a) - \vec{r}_c\} + \dot{\vec{u}}(x_a) \\ - \dot{\vec{r}}_c - \vec{W} \end{aligned} \quad (80)$$

$\vec{W}_r$ の機体軸成分を W_{rx} , W_{ry} , W_{rz} とし, 全迎角のピッチ面およびヨー面への正斜影をそれぞれ α_{ip} , α_{iy} (第6図) とすると,

$$\left. \begin{aligned} W_{rx} &= V_{cx} + w_y [z_a + u_z(x_a) - z_c] \\ &\quad - w_z [y_a + u_y(x_a) - y_c] - \dot{x}_c^0 - W_x \\ W_{ry} &= V_{cy} + w_x (x_a - x_c^0) - w_z [z_a \\ &\quad + u_z(x_a) - z_c] + \dot{u}_y(x_a) - \dot{y}_c - W_y \\ W_{rz} &= V_{cz} + w_x [y_a + u_y(x_a) - y_c] \\ &\quad - w_y (x_a - x_c^0) + \dot{u}_z(x_a) - \dot{z}_c - W_z \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ip} &= \tan^{-1}(W_{ry}/W_{rx}) - u_y'(x_a) \\ \alpha_{iy} &= \tan^{-1}(W_{rz}/W_{rx}) - u_z'(x_a) \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

5. むすび

質量が変化しているロケットについて, 重心位置の

変化, 機体の曲げ振動, スロッシングおよびエンジン運動等を考慮して, 動力学運動方程式の一般式を, 系らの流出量を用いて簡単で取扱い易い形で導入した. さらに, 推進葉の流れの仮定や assumed モードの設定などをして, 運動方程式におよぼすこれらの諸現象の影響を詳細に明らかにした. ここでは空気力については言及を略したが, 大型の vehicle に通常用いられる準静的な空気力を用いると, 機体の局所的な迎角を (82) 式の方法で求めて, 空気力を導入出来る. したがって, 必要とあれば困難ではあるがシミュレーションが出来る. 特にピッチ面あるいはヨー面内に限定した運動などでは比較的簡単であろう.

付 録

付録 1 発散定理 (例えば文献 12) の (i)) により τ, σ をある物質系の体積とそれを囲む表面とすると,

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \tilde{T} d\tau = \int_{\sigma} \tilde{n}_\tau \cdot \tilde{T} ds \quad (\text{付 1.1})$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\tilde{T} \times \bar{r}) d\tau = \int_{\sigma} (\tilde{n}_\tau \cdot \tilde{T}) \times \bar{r} ds \quad (\text{付 1.2})$$

付録 2 連続体の運動をオイラーの方法により場の量で表わすと, 連続体の実質部分に付随する任意の量 $\bar{A}$ が, 実質部分の運動とともに変化する割合を D/Dt ($\bar{A}$) で表わすと, $\bar{v}$ を物質の速度として, 直角座標系で,

$$D/Dt(\bar{A}) = \partial/\partial t(\bar{A}) + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{A}$$

である. したがって, $\bar{v}_f$, $D^*/Dt(\bar{A})$ をそれぞれ運動座標系から見た物質の速度および実質部分の運動とともに変化する $\bar{A}$ の割合, ∇ を運動座標系に関する発散演算子とし,

$$D^*/Dt(\bar{A}) = \partial^*/\partial t(\bar{A}) + (\bar{v}_f \cdot \nabla) \bar{A} \quad (\text{付 2.1})$$

を得る. $\partial^*/\partial t$ は運動座標軸系の成分についての時間偏微分である. いま, σ をある物質系の運動する物質粒子が作る閉曲面, τ をその内部体積として, 文献 13) より,

$$\frac{D^*}{Dt} \int_{\tau} \bar{A} d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma} \bar{A} (\bar{v}_f \cdot \bar{n}_\tau) ds \quad (\text{付 2.2})$$

$$= \int_{\tau} \left[\frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} + \bar{A} (\nabla \cdot \bar{v}_f) + (\bar{v}_f \cdot \nabla) \bar{A} \right] d\tau \quad (\text{付 2.2'})$$

の関係式が得られる. つぎに, 考察する物質粒子が作る閉曲面とは限らず, 運動する任意の閉曲面 Σ に囲まれた T 体積内の物質系の場合にも, 同様に¹³⁾, $\bar{v}_s$, $\bar{n}_\tau$ を任意の閉曲面 Σ の ds 部の運動座標系から見た速度および ds に垂直な外方向単位ベクトルとして, 次式を得る.

$$\frac{D^*}{Dt} \int_T \bar{A} d\tau = \int_T \frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} d\tau + \int_{\Sigma} \bar{A} (\bar{v}_s \cdot \bar{n}_\tau) ds \quad (\text{付 2.3})$$

さて, 以上の関係式を用いて, 本文の記号を用いて, ロケットの場合に適用する. 固体部については境界面 σ_s と σ_{sf} は固体部粒子が作る面であるから, 密度を ρ_s とし連続の式, $\partial^*/\partial t(\rho_s) + \nabla \cdot (\rho_s \bar{v}_s) = 0$ を用い (付 2.2') から,

$$\begin{aligned} \frac{D^*}{Dt} \int_{\tau} \bar{A} dm &= \int_{\tau} \rho_s \left[\frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} + (\bar{v}_s \cdot \nabla) \bar{A} \right] d\tau \\ &= \int_{\tau} \frac{D^* \bar{A}}{Dt} dm \end{aligned} \quad (\text{付 2.4})$$

を得る. (付 2.4) は $\bar{A} dm$ の総和の時間微分は, $D^*/Dt(\bar{A}) dm$ の総和に等しいことを示し, 全く質点運動的な取扱いが出来る. つぎに, 流体部についてはその境界面のうち σ_{en} は, 運動する流体粒子が作る面ではなくて, 固体部が作るエンジン出口断面であることを考えて, (付 2.3) から

$$\begin{aligned} \frac{D^*}{Dt} \int_{\tau'} \bar{A} dm &= \int_{\tau'} \frac{\partial^* (\rho_f \bar{A})}{\partial t} d\tau \\ &+ \int_{\sigma_{sf}} \rho_f \bar{A} (\bar{v}_f \cdot \bar{n}_{\tau'}) ds + \int_{\Sigma \sigma_{en}} \rho_f \bar{A} (\bar{v}_s \cdot \bar{n}_{\tau'}) ds \\ &= \int_{\tau'} \frac{\partial^* (\rho_f \bar{A})}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma_{sf} + \Sigma \sigma_{en}} \rho_f \bar{A} \\ &\cdot (\bar{v}_f \cdot \bar{n}_{\tau'}) ds - \int_{\Sigma \sigma_{en}} \rho_f \bar{A} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \end{aligned}$$

$\bar{v}_s$ は σ_{en} 上の ds の運動座標系から見た速度で, 上式の最初の 2 項の積分を, (付 2.2), (付 2.2') および連続の式を用いて変形して, 結局次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{D^*}{Dt} \int_{\tau'} \bar{A} dm &= \int_{\tau'} \frac{D^* \bar{A}}{Dt} dm \\ &- \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{A} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \end{aligned} \quad (\text{付 2.5})$$

上式の右辺の第 2 項の積分は, σ_{en} から単位時間に流出する $\rho_f \bar{A} ds$ の総和を表わしている.

付録 3 慣性モーメントテンソル $\bar{I}$ は対称であり, その xyz 系に関する成分はマトリックス表示で,

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

である. ただし, I_{xx} 等は次式で定義される.

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{\tau + \tau'} [(y - y_c)^2 + (z - z_c)^2] dm, \\ I_{xy} &= - \int_{\tau + \tau'} (x - x_c)(y - y_c) dm \\ I_{xz} &= - \int_{\tau + \tau'} (x - x_c)(z - z_c) dm, \end{aligned} \quad (\text{付 3.1})$$

付録 4 簡単のため文献 12) の (ii) の記号と, 式

番号をそのまま使用すると、文献の(9-4b)式は、

$$\begin{aligned} \bar{q} - \bar{q}_0 - \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{q}_0) \times \bar{r} \\ = - \int_V \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \cdot \bar{a} \rho dV \\ + \int_V \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \cdot (\bar{F}^D + \bar{F}^M) \delta(\bar{r} - \bar{r}_s) dV \end{aligned}$$

両辺に $\bar{\phi} \rho$ を乗じて全体積について積分する。 $\bar{q} = \sum_V \bar{\phi}_s \xi_s$ と(9-23)を用いて、上式の左辺は $M_s \xi_s$ となりまた $\Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \Gamma(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ であるから、文献の(9-11)を用いて右辺は次のようになる。

$$\begin{aligned} - \int_V \bar{a} \rho \left[\int_V \Gamma \cdot \bar{\phi}_s \rho dV \right] dV \\ + \int_V (\bar{F}^D + \bar{F}^M) \delta(\bar{r} - \bar{r}_s) \cdot \left[\int_V \Gamma \cdot \bar{\phi}_s \rho dV \right] dV \\ = - \frac{1}{w_s^2} \int_V \left[\bar{\phi}_s - \bar{\phi}_{s0} - \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{\phi}_{s0}) \times \bar{r} \right] \\ \cdot \bar{a} \rho dV + \frac{1}{w_s^2} \int_V \left[\bar{\phi}_s - \bar{\phi}_{s0} - \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{\phi}_{s0}) \right. \\ \left. \times \bar{r} \right] \cdot (\bar{F}^D + \bar{F}^M) \cdot \delta(\bar{r} - \bar{r}_s) dV \\ = \frac{1}{w_s^2} \left[- \int_V \rho \bar{a} \cdot \bar{\phi}_s dV + \int_S (\bar{F}^D + \bar{F}^M) \cdot \bar{\phi}_s dS \right] \end{aligned}$$

したがって、振動方程式は次式のようになる。

$$M_s w_s^2 \xi_s = - \int_V \rho \bar{a} \cdot \bar{\phi}_s dV + \int_S (\bar{F}^D + \bar{F}^M) \cdot \bar{\phi}_s dS \quad (\text{付 4-1})$$

参考文献

- 1) BARTON, M.V.: The effects of variation of mass on the dynamic stability of jet-propelled missiles, J. Aero. Sci. Vol. 17, No. 4, (1950/4), pp. 197-203.

- 2) 鷲津: 質量および重心位置が時間とともに変化するロケット航空機の運動方程式, 日本航学会誌, 第5巻 第43号, (1957), pp. 7-10.
- 3) THORPE, J.A. and HATCHINSON, R.C.: The dynamics of rocket-powered vehicles, MIT-IL Report 206, (1959).
- 4) THOMSON, W.T.: Introduction to space dynamics, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1963), pp. 230-235.
- 5) THOMSON, W.T. and REITER, G.S.: Jet damping of a solid rocket: Theory and flight results, AIAA J., Vol. 3, No. 3, (1965), pp. 413-417.
- 6) THOMSON, T.W.: Equations of motion for the variable mass system, AIAA., Vol. 4, (1966), pp. 766-768.
- 7) JAMES, R.L.: A three dimensional trajectory simulation using six-degree-of-freedom with arbitrary winds, NASA TND-641, (1961).
- 8) HARRIS, J.R.: A Trajectory simulation applicable to stability and control studies of Large multi-engine vehicles, NASA TND-1838, (1963).
- 9) LESTER, H.C. and COLLINS, D.F.: Determination of loads on a flexible launch vehicle, NASA TND-2590, (1965).
- 10) GREENSITE, A.L.: Analysis and design of space vehicle flight control systems, Vol II-Trajectory equations, NASA CR-821, (1967).
- 11) BELKNAP, S.B.: A general transport rule for variable mass dynamics, AIAA J., Vol. 10, No. 9, (1972), pp. 1137-1138.
- 12) BISPINGHOFF, R.L. and ASHLEY, H.: Principles of aeroelasticity, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1962), (i) p. 22, (ii) p. 187, pp. 451-457.
- 13) ERINGEN, A.C.: Mechanics of continua, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1967), p. 75.
- 14) ABRAMSON, H.N.: The dynamic behavior of liquid in moving containers, NASA SP-106, (1966), pp. 199-223.
- 15) COOETTE, J.G.R.: Analysis and design of space vehicle flight control systems, Vol. XI-Component dynamics, NASA CR-830, p. 68, p. 70.

(640 ページから続く)

フランジのスプライスが重なってくる。

部品全長は 3,193 mm で、材質は高力アルミニウム合金 7075 の板厚 12.5 mm の厚板である。加工法はまず粗切削を行なった後、ストレッチ・フォーミング法でコード方向のねじれをふくむコンターをつけ、ケミカル・ミリングで肋骨部を溶削する。つぎに桁部とコードのあたる中央背骨部をならいフライス盤で筋彫りして仕上げ、最後にアーム・ルーターで外形をトリムする。

この部品は複雑な面を多く持っている点と、多数の部品に挟まれて組立てられるため、各部の寸度が正確でなければならぬ点に特徴があり、また加工の面でも板金技術のストレッチ、ケミカル法と機械加工を組合わせている点に特徴がある。

第2図 2頭フライスによる一体化部品の切削 最近

の削り出し一体化構造部品の切削加工は、部品の大型化・複雑化のため、切削時間が長くなる傾向にある。また、超高抗張力鋼・チタニウム合金などの難削材の場合は、さらにこの傾向が助長される。この傾向に対する対策として、工作機械の主軸頭数を多くし、数個の同じ部品を同時に切削することによって、設備投資や、加工工数の低減が計られている。

第2図の加工中の部品は、大型輸送機のフラップのレールで長さ約 2.5 m 材質はクロム・モリブデン鋼でロックウェル硬度 RC 45 に熱処理硬化してある。

工作機械は2頭の数値制御フライス盤で加工精度は ±0.05 mm である。

このような部品切削の技術的問題点は、熱処理などによる残留応力によって切削加工中に歪みが発生する点や、切粉がカッターに巻き込まれカッターを損傷すること、および2個のカッターの精度管理などである。