論文 CONTRIBUTED PAPER

空間骨組要素の剛性マトリックスについて* On the Stiffness Matrix of an Element of Space Framework

篠 崎 武**
Takeshi SHINOZAKI

Abstract

The geometrical stiffness matrix plays a significant role in the problems of large deflection or instability problems of space framework. In conventional analysis, only the effect of initial axial force has been considered in the geometrical stiffness matrix. This paper shows that, in addition, initial bending moment and torsional moment terms have to be included in stiffness matrix. Its theoretical derivation are developed using the matrix displacement method based on the principle of virtual work. And some numerical examples of initial instability problems are presented to demonstrate the validity of the theory deduced.

1. 緒 言

空間変形する骨組の大変形あるいは不安定現象を解析する際、幾何学的（初応力）剛性マトリックスをどう評価するかが問題となる。特に初期不安定問題¹⁾では初期力の項が固有値を形成するので詳細なる検討が要求される。大変形問題でも Newton Raphson 法あるいは荷重増分法に Newton Raphson 法を併用すれば、幾何学的剛性マトリックスの精度が良好でなくても収束するまでの繰返し回数を増加させると、かなり良好なる結果が得られる場合²⁾もあるがやはり精度の良い幾何学的剛性マトリックスが望ましい。

従来の幾何学的剛性マトリックスの初期力としては、初期軸力しか含まれていないが、先に著者が平面骨組の場合³⁾について検討した所、さらに初期曲げモーメントの効果も含むことがわかった。本論文では空間棒要素について検討したが、初期力として初期軸力、初期曲げモーメント、初期振りモーメントを含む結果となった。これらの初期力を含む剛性マトリックスによって、初期不安定問題として、横座屈、振り座屈等が有効に解析され得る。また修正荷重漸増法^{4,5)}等によれば、大変形の効果も含む不安定現象に有効に利用出来る。

ここでは、仮想仕事の原理より基礎増分式を得、さらに剛性マトリックスの一般的な表現式を得る。その後、空間変形する一般曲棒についての歪み～変位関係式を二次の微小項まで求め、そこで必要とされるあるマトリックス D を求めることが出来れば、機械的に弾性剛性マトリックスも、幾何学的剛性マトリックスも得られることを示す。具体的には直棒要素について誘導した。それによって得られた剛性マトリックスの精度、収束性をみるために、はりの横座屈、軸の振り座屈等の初期不安問題について数値計算をし、厳密解と比較した。

2. 仮想仕事の原理による基礎式

初期外力 R と初期内力 S とで平衡している棒要素について、仮想仕事の原理より次式が成立する。

$$\tilde{r}R = \int \tilde{s}S dx \quad (1)$$

ここで、 r は R の作用点、作用方向の微小仮想変位であり、 $\tilde{r}$ は r の転置を示す。 s は第1図に示されている初期軸力 T 、初期振りモーメント M_1 、主軸まわりの初期曲げモーメント M_2, M_3 を要素とする列マトリックスである。 $\tilde{s}$ は r によって要素内に生ずる仮想歪を表わし、 S に対応して軸歪 ϵ 、回転率変化 $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3$ を要素とする列マトリックスである。また、 x は棒要素の中心を通る軸である。

初期外力 R にさらに外力増分 ΔR を加え、内力

第1図 棒要素の初期力

*昭和48年7月10日原稿受理

**名古屋大学工学部航空学教室、本論文投稿後著者は急逝された。校正その他は西村融教授の御高配による。(編集委員会)

が $S+\Delta S$

となって平衡するものとすれば、仮想仕事の原理より次式が成立する。

$$\bar{r}(R+\Delta R)=\int \bar{s}'(S+\Delta S)dx \quad (2)$$

ここで、仮想変位 $\bar{r}$ は (1) 式と同じもの考えるが、 s' は s とは ΔR の効果により 2 次の微小項だけ差異がある。 s' と s との差を $\bar{\eta}$ と書き、(1)、(2) 式より高次の微小項を省略すれば次の増分式を得る。

$$\bar{r}\Delta R=\int \bar{s}\Delta Sdx+\int \bar{\eta}Sdx \quad (3)$$

弾性棒を考えるものとし、フック則を内力増分 ΔS と変形増分 Δs との間に仮定すれば、

$$\Delta S=k\Delta s \quad (4)$$

と書け、 k は次のように表わされるものである。

$$k=\begin{pmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & k_3 & \\ 0 & & & k_4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで k_1 は軸剛性、 k_2 は振り剛性、 k_3 、 k_4 は曲げ剛性を表わしている。

有限変形 s の一要素 $s_k=s_k(r_i)$ に注目し、テラ一展開を考えれば以下の関係式がでてくる。

$$\begin{aligned} s_k &= \left(\frac{\partial s_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} \bar{r}_i, \Delta s_k = \left(\frac{\partial s_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} r_i \\ s_k' &= \left(\frac{\partial s_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} \bar{r}_i = \left(\frac{\partial s_k}{\partial r_i} \right)_{r=0} \bar{r}_i + \left(\frac{\partial^2 s_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} \bar{r}_i r_j \\ \bar{\eta}_k &= s_k' - s_k = \left(\frac{\partial^2 s_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} \bar{r}_i r_j \end{aligned} \quad (6)$$

ここで r は ΔR による微小変位増分を表わしている。

(6) 式の s_k および Δs_k を行列の表現に戻し、

$(\partial s_i / \partial r_j)_{r=0}$ を i 行 j 列要素とするマトリックス B を考えて、

$$s=B\bar{r}, \quad \Delta s=B\Delta r \quad (7)$$

と書き、これを (4) 式とともに (3) 式の右辺第 1 項に代入すれば弾性剛性マトリックス k^e が次の如く表現される。

$$\begin{aligned} \int \bar{s}\Delta Sdx &= \int \bar{s}k\Delta sdx \\ &= \int \bar{r} \bar{B} k B dx \end{aligned} \quad (8)$$

$$\therefore k^e = \int \bar{B} k B dx \quad (9)$$

次に $(\partial^2 s_k / \partial r_i \partial r_j)_{r=0}$ を i 行 j 列要素とするマト

リックス G^k を導入し、(3) 式の右辺第 2 項を整理すれば、

$$\int \bar{\eta} S dx = \bar{r} \sum_{k=1}^4 \int G^k S_k dx \quad (10)$$

となり幾何学的剛性マトリックスが次のように得られる。

$$k^g = \sum_{k=1}^4 \int G^k S_k dx \quad (11)$$

これらより、弾性剛性マトリックスについては、 s についての一次項でよいが、幾何学的剛性マトリックスを得るには s について 2 次項まで考えねばならないことがわかる。

3. 細い空間曲線棒における歪み～変位関係

第 2 図に示された空間曲線をなす細い棒を後の利用のために考える。曲棒の中心線に沿って x_1 を測り、その接線と直交し、断面の主軸方向に x_2 、 x_3 軸をとり、それぞれの単位ベクトルを a_i とする。 x_1 点での単位ベクトルは正規直交ベクトルなので、

$$a_i \cdot a_j = \delta_{ij} \quad (12)$$

であり、 x_1 点から微小距離 dx_1 だけ離れたところでの単位ベクトル b_i はやはり正規直交ベクトルとすれば次式となる。

$$b_i \cdot b_j = \left(a_i + \frac{da_i}{dx_1} dx_1 \right) \cdot \left(a_j + \frac{da_j}{dx_1} dx_1 \right) = \delta_{ij} \quad (13)$$

これより、

$$a_i \cdot \frac{da_j}{dx_1} + \frac{da_i}{dx_1} \cdot a_j = 0 \quad (14)$$

となるが、これは (12) 式を微分しても得られる。

$$(da_i / dx_1) \cdot a_j = \omega_{ij}$$

と書けば、これは回転率を表わす。または書きかえて

$$\frac{da_i}{dx_1} = \omega_{ij} a_j \quad (15)$$

(14) 式より、 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ である。

今考えた状態を変形増分前のものとし、次に変形増

第 2 図 棒要素の中心線に沿う基底ベクトル

第3図 変形増分前, 後の基底ベクトル

第4図 変形増分前, 後の中心軸線要素

分後の状態を考える。表現の簡単化のためにこれ以降混乱は生じないので x_1, dx_1 を x, dx と書くことにする。 x 点の変位ベクトル $U = u_i a_i$ と3軸まわりの回転 $\theta^* = \theta_i^* a_i$ を用いて, 新たなる平衡位置に移る変位増分を考える。ただし, 変位増分後, 3軸がさらに直交するためには θ_2^*, θ_3^* は u_i, θ_1^* から定まることになる。

第3図の(a)は変形増分前, (b)は増分後の状態を示す。変形増分前に $a_1 dx$ であったものが, 増分後 $a'_1 dx'$ となる(第4図)。

これより次の関係式が出て来る。

$$\begin{aligned} a'_1 dx' &= a_1 dx + \frac{dU}{dx} dx \\ &= \left[a_1 + \left(\frac{du_i}{dx} - \omega_{ij} u_j \right) a_i \right] dx \end{aligned} \quad (16)$$

上式の2乗を取り, (12)式を使用すれば,

$$\begin{aligned} (dx')^2 &= \left[1 + \left(\frac{du_1}{dx} - \omega_{1\beta} u_\beta \right) + \left(\frac{du_1}{dx} - \omega_{1\beta} u_\beta \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{du_i}{dx} - \omega_{ij} u_j \right) \left(\frac{du_i}{dx} - \omega_{i\beta} u_\beta \right) \right] dx^2 \end{aligned} \quad (17)$$

となり, $dx' = (1 + \varepsilon) dx$ と書き, さらに次の記号

$$\begin{aligned} e &= \frac{du_1}{dx} - \omega_{1j} u_j, \quad \theta_3 = \frac{du_2}{dx} \omega_{2j} u_j, \\ -\theta_2 &= \frac{du_3}{dx} - \omega_{3j} u_j, \end{aligned}$$

を採用すれば, (17)式は $(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2e + e^2 + \theta_3^2 + \theta_2^2$ となり, これを ε について整理し, 3次以上の微小項を無視すれば, 軸歪み ε は次のように表わせる。

$$\varepsilon = e + \frac{1}{2}(\theta_3^2 + \theta_2^2) \quad (18)$$

(16)式を a'_1 について整理すれば,

$$a'_1 = \frac{1+e}{1+\varepsilon} a_1 + \frac{\theta_3}{1+\varepsilon} a_2 - \frac{\theta_2}{1+\varepsilon} a_3 \quad (19)$$

となり, 高次の微小項を省略すれば

$$\begin{aligned} a'_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2 \right) a_1 + \theta_3(1-e)a_2 \\ &\quad - \theta_2(1-e)a_3 \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $a'_i = \lambda_{ij} a_j$ と書くと, λ_{ij} は上式より既知である。その他の方向余弦 λ_{ij} は直交条件 $\lambda_{ip} \lambda_{jq} = \delta_{pq}$ より定めることが出来, 2次の微小項までをとり, 整理すれば λ_{ij} は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2, \quad \lambda_{12} = \theta_3(1-e) \\ \lambda_{13} &= -\theta_2(1-e), \quad \lambda_{21} = -\theta_3 + \theta_3 e + \theta_1 \theta_2 \\ \lambda_{22} &= 1 - \frac{1}{2}(\theta_3^2 + \theta_2^2), \quad \lambda_{23} = \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 \theta_3 \\ \lambda_{31} &= \theta_2 - \theta_2 e + \theta_1 \theta_3, \quad \lambda_{32} = -\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 \theta_3 \\ \lambda_{33} &= 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

次に変形増分後の回転率 ω_{ij} を決定する。変形増分前の場合と同様に, ω_{ij} は次のように定義される。

$$\omega_{ij} = \frac{da'_i}{dx} \cdot a'_j \quad (22)$$

上式に $a'_i = \lambda_{im} a_m$, $a'_j = \lambda_{jn} a_n$ を代入し, ω_{ij} で整理すれば

$$\omega_{ij} = \frac{d\lambda_{im}}{dx} \lambda_{jm} + \omega_{mn} \lambda_{im} \lambda_{jn} \quad (23)$$

変形増分前, 後の回転率の差をとれば, 所要の回転率変化 κ_i が得られる。このとき後の便宜上, 次の記号を導入する。

$$\phi_i = \frac{d\theta_i}{dx} - \omega_{ij} \theta_j, \quad f = \frac{de}{dx} \quad (24)$$

結局回転率変化は次のようになる。

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \phi_1 - \frac{1}{2}\theta_2 \phi_3 + \frac{1}{2}\theta_3 \phi_2 - \frac{1}{2}\theta_1 \theta_2 \omega_2 - \frac{1}{2}\theta_1 \theta_3 \omega_3 \\ &\quad - \theta_3 e \omega_2 + \theta_2 e \omega_3 \\ \kappa_2 &= \phi_2 - e \phi_3 + \theta_1 \phi_3 - \theta_2 f + \frac{1}{2}(\theta_1^2 - \theta_3^2) \omega_2 \\ &\quad + (e \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 \theta_3) \omega_3 \\ \kappa_3 &= \phi_3 - e \phi_2 - \theta_1 \phi_2 - \theta_3 f + \frac{1}{2}(\theta_1^2 - \theta_2^2) \omega_3 \end{aligned}$$

$$+(-e\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_3)\omega_2 \quad (25)$$

ここで, $\omega_3 = \omega_{12}, \omega_1 = \omega_{23}, \omega_2 = \omega_{31}$ の記号を導入している。

4. 一般化変位パラメーターによる剛性マトリックスの表示

ここで, 一般化変位パラメーター q を導入する。これは次のように表現されるものである。

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= (q_1, q_2, \dots, q_8) \\ &= (e, \theta_1, \theta_2, \theta_3, f, \phi_1, \phi_2, \phi_3) \end{aligned} \quad (26)$$

そうすると, s は q の関数, q は r の線形結合とすれば,

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial r_j} \right)_{r=0} = \left(\frac{\partial s_i}{\partial q_m} \right)_{q=0} \frac{\partial q_m}{\partial r_j} \quad (27)$$

となり, この関係よりマトリックスまた B は

$$B = CD \quad (28)$$

と表わせる。ここでマトリックス C は $(\partial s_i / \partial q_j)$ を i 行 j 列要素とするマトリックスであり, D は $(\partial q_i / \partial r_j)$ を i 行 j 列要素とするマトリックスである。(28)式を(9)式に代入し同時に(18), (25)式を使用すれば弾性剛性マトリックスは次式のように表わせる。

$$k^e = \int \tilde{D} K^e D dx \quad (29)$$

$$K^e = \begin{pmatrix} O, \omega_3 M_2 - \omega_2 M_3, \omega_2 M_1, -\omega_2 M_1 \\ \omega_2 M_2 + \omega_3 M_3, -0.5\omega_2 M_1, -0.5\omega_3 M_1 \\ T - \omega_3 M_3, 0.5(\omega_3 M_2 + \omega_2 M_3) \\ T - \omega_2 M_2 \\ \text{SYM} \end{pmatrix}$$

k^e も k^e と同様マトリックス D を求めることが出来れば任意曲棒について具体的に表現可能である。

5. 直棒要素についての k^e , k^e

前節では一般の棒要素に対する剛性マトリックスの表現を得, 適当なる D マトリックスを求めれば, 任意の細い棒に対する k^e と k^e とが導出されることを示したが, ここではその有効性を確かめるべく, 最も基本的な直棒要素について考えることにし, 初曲率を有する棒要素については次の問題とする。

ここでの問題は一般化変位パラメーター q と節点変位増分 r とを結びつける D マトリックスを決定することである。

r として両端の3軸方向変位増分, 3軸まわりの回転増分を第5図のようにとる。またこれをマトリックス表示すれば次のようになる。

ただし K^e は次のように表わされるマトリックスである。

$$K^e = \begin{pmatrix} k_1 & & & & & \\ & O & & & & \\ & & O & & & \\ & & & O & & \\ & & & & O & \\ & O & & & & k_2 \\ & & & & & & k_3 \\ & & & & & & & k_4 \end{pmatrix}$$

これより一般曲棒の弾性剛性マトリックスは $(\partial q_i / \partial r_j)$ を i 行 j 列要素とするマトリックス D を求めれば得られることになる。

幾何学的剛性マトリックスについては, まず G^e の要素について表現すれば,

$$\left(\frac{\partial^2 s_k}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{r=0} = \left(\frac{\partial^2 s_k}{\partial q_m \partial q_n} \right)_{q=0} \frac{\partial q_m}{\partial r_i} \frac{\partial q_n}{\partial r_j} \quad (30)$$

となるので, これを行列の表現に戻し整理すれば k^e は次のように求まる。

$$k^e = \int \tilde{D} K^e D dx \quad (31)$$

ただし K^e は次のように表わされるマトリックスである。

$$K^e = \begin{pmatrix} O & O & -M_2 & -M_3 \\ O & O & -M_3 & M_2 \\ -M_2 & O & O & -0.5M_1 \\ -M_3 & O & -0.5M_1 & O \\ O & O & O & O \\ & O & O & O \\ & & O & O \\ & & & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= (r_1, r_2, r_3, \dots, r_{12}) \\ &= (u_{1A}, u_{2A}, u_{3A}, \theta_{1A}, \theta_{2A}, \theta_{3A}, u_{1B}, u_{2B}, u_{3B}, \\ &\quad \theta_{1B}, \theta_{2B}, \theta_{3B}) \end{aligned}$$

変位増分は次のように仮定する。

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1A}(1-\xi) + u_{1B}\xi \\ \theta_1 &= \theta_{1A}(1-\xi) + \theta_{1B}\xi \\ u_2 &= u_{2A}(1-3\xi^2+2\xi^3) + u_{2B}(3\xi^2-2\xi^3) \\ &\quad + \theta_{3A}l\xi(1-\xi)^2 + \theta_{3B}l(\xi^3-\xi^2) \\ u_3 &= u_{3A}(1-3\xi^2+2\xi^3) + u_{3B}(3\xi^2-2\xi^3) \\ &\quad - \theta_{2A}l\xi(1-\xi)^2 - \theta_{2B}l(\xi^3-\xi^2) \end{aligned} \quad (32)$$

一般化変位パラメーターは次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{1}{l} \frac{d\theta_i}{d\xi}, e = \frac{1}{l} \frac{du_1}{d\xi}, f = 0, \\ \theta_2 &= -\frac{1}{l} \frac{du_3}{d\xi}, \theta_3 = \frac{1}{l} \frac{du_2}{d\xi}, \theta_1 = \theta_1 \end{aligned} \quad (33)$$

上式の右辺に(32)式の関係を代入し, r で整理すれば

第5図 要素の節点変位

D マトリックスは次のように得られる.

$$\begin{pmatrix} -1/l, 0, 0, 0, 0, 0, 1/l, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 1-\xi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \xi, 0 \\ 0, 0, 6(\xi-\xi^2)/l, 0, 1-4\xi+3\xi^2, 0, 0, 0, 6(\xi^2-\xi)/l, 0, 3\xi^2-2\xi, 0 \\ 0, 0, 6(\xi^2-\xi)/l, 0, 0, 0, 1-4\xi+3\xi^2, 0, 6(\xi-\xi^2)/l, 0, 0, 0, 3\xi^2-2\xi \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, -1/l, 0, 0, 0, 0, 0, 1/l, 0, 0 \\ 0, 0, 6(1-2\xi)/l^2, 0, (6\xi-4)/l, 0, 0, 0, 6(2\xi-1)/l^2, 0, (6\xi-2)/l, 0 \\ 0, 6(2\xi-1)/l^2, 0, 0, 0, (6\xi-4)/l, 0, 6(1-2\xi)/l^2, 0, 0, 0, (6\xi-2)/l \end{pmatrix} \quad (34)$$

弾性剛性マトリックスは(34)式を(29)式に代入し、積分を実行すれば通常のもの⁶⁾と一致する.

幾何学的剛性マトリックスは、まず初期力を次のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 \\ M_1 &= M_{10} \\ M_2 &= -M_{2A}(1-\xi) + M_{2B}\xi \\ M_3 &= -M_{3A}(1-\xi) + M_{3B}\xi \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここで、 T_0 は初期軸力、 M_{10} は初期振りモーメント、 M_{2A} 、 M_{2B} はそれぞれ要素の A 端、 B 端における y 軸まわりの初期曲げモーメント、 M_{3A} 、 M_{3B} は同様な z 軸まわりの初期曲げモーメントである.

(35)式を(34)式とともに(31)式に代入し、積分を実行すれば、幾何学的剛性マトリックスが次のように表現される. ここで、 (i, j) は k° の i 行 j 列要素を示すものとする.

$$\begin{aligned} (1, 2) &= \frac{M_{3A} + M_{3B}}{l^2}, (1, 3) = -\frac{M_{2A} + M_{2B}}{l^2}, \\ (1, 5) &= \frac{M_{2A}}{l}, (1, 6) = \frac{M_{3A}}{l}, (1, 8) = \frac{M_{3A} + M_{3B}}{l^2}, \\ (1, 9) &= \frac{M_{2A} + M_{2B}}{l^2}, (1, 11) = \frac{M_{2B}}{l}, (1, 12) = \frac{M_{3B}}{l}, \\ (2, 2) &= \frac{6T_0}{5l}, (2, 4) = \frac{M_{2A}}{l}, (2, 5) = \frac{M_{10}}{l}, \\ (2, 6) &= \frac{T_0}{10}, (2, 7) = -\frac{M_{3A} + M_{3B}}{l^2}, (2, 8) = -\frac{6T_0}{5l}, \end{aligned}$$

$$(2, 10) = \frac{M_{2B}}{l}, (2, 11) = -\frac{M_{10}}{l}, (2, 12) = \frac{T_0}{10},$$

$$(3, 3) = \frac{6T_0}{5l}, (3, 4) = \frac{M_{3A}}{l}, (3, 5) = -\frac{T_0}{10},$$

$$(3, 6) = \frac{M_{10}}{l}, (3, 7) = \frac{M_{2A} + M_{2B}}{l^2}, (3, 9) = -\frac{6T_0}{5l},$$

$$(3, 10) = \frac{M_{3B}}{l}, (3, 11) = -\frac{T_0}{10}, (3, 12) = -\frac{M_{10}}{l},$$

$$(4, 5) = \frac{M_{3B} - 5M_{3A}}{6}, (4, 6) = \frac{5M_{2A} - M_{2B}}{6},$$

$$(4, 8) = -\frac{M_{2A}}{l}, (4, 9) = -\frac{M_{3A}}{l},$$

$$(4, 11) = -\frac{M_{3A} + M_{3B}}{6}, (4, 12) = \frac{M_{2A} + M_{2B}}{6},$$

$$(5, 5) = \frac{2T_0 l}{15}, (5, 7) = -\frac{M_{2A}}{l}, (5, 8) = -\frac{M_{10}}{10},$$

$$(5, 9) = \frac{T_0}{10}, (5, 10) = -\frac{M_{3A} + M_{3B}}{6},$$

$$(5, 11) = -\frac{T_0 l}{30}, (5, 12) = \frac{M_{10}}{2}, (6, 6) = \frac{2T_0 l}{15},$$

$$(6, 7) = -\frac{M_{3A}}{l}, (6, 8) = -\frac{T_0}{10}, (6, 9) = -\frac{M_{10}}{l},$$

$$(6, 10) = \frac{M_{2A} + M_{2B}}{6}, (6, 11) = -\frac{M_{10}}{2},$$

$$(6, 12) = -\frac{T_0 l}{30}, (7, 8) = \frac{M_{3A} + M_{3B}}{l^2},$$

$$\begin{aligned}
(7, 9) &= -\frac{M_{2A} + M_{2B}}{l^2}, (7, 11) = -\frac{M_{2B}}{l}, \\
(7, 12) &= -\frac{M_{3B}}{l}, (8, 8) = \frac{6T_0}{5l}, (8, 10) = -\frac{M_{2B}}{l}, \\
(8, 11) &= \frac{M_{10}}{l}, (8, 12) = -\frac{T_0}{10}, (9, 9) = \frac{6T_0}{5l}, \\
(9, 10) &= -\frac{M_{3B}}{l}, (9, 11) = \frac{T_0}{10}, (9, 12) = \frac{M_{10}}{l}, \\
(10, 11) &= \frac{M_{3A} - 5M_{3B}}{6}, (10, 12) = \frac{5M_{2B} - M_{2A}}{6}, \\
(11, 11) &= \frac{2T_0 l}{15}, (12, 12) = \frac{2T_0 l}{15}, \\
(1, 1) &= (1, 4) = (1, 7) = (1, 10) = (2, 3) = (2, 9) \\
&= (3, 8) = (4, 4) = (4, 7) = (4, 10) = (5, 6) = (7, 7) \\
&= (7, 10) = (8, 9) = (10, 10) = (11, 12) = 0
\end{aligned} \quad (36)$$

(36) 式で見られるように, k^e には初期軸力 T_0 のほかに, 初期振りモーメント M_{10} , 初期曲げモーメント M_{2A} , M_{2B} , M_{3A} , M_{3B} , の効果が含まれている。

6. 初期不安定問題における数値計算例

前節で求めた細い直棒要素の剛性マトリックスの精度, 収束性をみるために初期不安定問題について数値計算をした。先程の k^e および k^e は局所座標系についての表現なので, これを一般座標系に交換する。局所座標系と一般座標との間の方向余弦を λ とし, 識別マトリックスを a とすれば, 構造物の挫屈方程式は次のように表わされる。

$$|K^E + K^G| = 0 \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで, } K^E &= \sum \tilde{a} \tilde{\lambda} k^e \lambda a \\
K^G &= \sum \tilde{a} \tilde{\lambda} k^g \lambda a
\end{aligned} \quad (38)$$

Σ は各要素について総和を取る事を示す。

また, 単位力による K^G を K^{G*} とすれば,

$$|K^E + \alpha K^{G*}| = 0 \quad (39)$$

となり, α が挫屈の固有値を与える。これは固有値方程式,

$$(K^E + \alpha K^{G*}) \Delta = 0 \quad (40)$$

を解いてもよい。ここで, Δ は一般座標系での節点変位を示している。以下数値計算方法については, 本質的でないので, 具体的な問題について(39)式を利用し, はさみうち法にて行列式の符号の変わる所を見つけ, その後比例補間法により根を求めた結果を示すことにする。

(a). 両端支持はりの横挫屈 第6図に示したはりの横倒れ挫屈による両端末モーメントの限界値 M_{cr} を要素数に対し無次元表示したのが第1表である。 GJ は x 軸まわりの振り剛性, EI_y は主軸 y まわりの曲げ剛性であり, 端末の支持条件は, x , y , z 方向の移動拘束, z , y まわりの回転自由, x まわりの回転拘束, である。

(b). 両端支持はりの中央集中荷重による横挫屈 (a)の場合と同じはりで, 中央部に集中荷重 P が作用した場合の横倒れ挫屈による限界値 P_{cr} が第2表

第1表 両端支持はりの曲げによる横挫屈

分割数	$M_{cr} l / \sqrt{EI_y GJ}$	誤差 (%)
1	3.460	10.1
2	3.219	2.45
4	3.159	0.54
8	3.143	0.032
厳密解 ⁷⁾	3.142	

第2表 両端支持はりの中央集中荷重による横挫屈

分割数	$P_{cr} l^2 / \sqrt{EI_y GJ}$	誤差 (%)	$P_{cr}^* l^2 / \sqrt{EI_y GJ}$	誤差 (%)
1	18.142	7.1	27.712	63.6
2	17.403	2.73	18.735	10.6
4	17.067	0.75	17.356	2.46
8	16.969	0.17	17.040	0.59
厳密解 ⁷⁾			16.94

第6図 両端支持はりの曲げによる横挫屈

第3表 片持はりの自由端集中荷重による横挫屈

分割数	$P_{cr} l^2 / \sqrt{EI_y GJ}$	誤差 (%)	$P_{cr}^* l^2 / \sqrt{EI_y GJ}$	誤差 (%)
1	6.000	49.5	3.464	13.7
2	4.289	6.9	3.967	1.1
4	4.073	1.5	4.010	0.07
8	4.028	0.37	4.013	0.00
厳密解 ¹⁾	4.013			

第4表 直棒の振り挫屈

分割数	$(M_x)_{cr} l / EI$	誤差 (%)	$(M_x)_{cr} l / EI$	誤差 (%)
1	6.86	9.2	9.79	10.2
2	6.32	0.64	8.95	0.8
4	6.28	0.0	8.88	0.0
厳密解 ¹⁾	6.28		8.88	
備考	$I_x = I_y = I$ の場合		$I_x = 2I, I_y = I$ の場合	

第5表 片持はりの自由端を直交して結合した構造物の横挫屈

分割数	$P_{cr} l^2 / \sqrt{EI_y GJ}$	$P_{cr}^* l^2 / \sqrt{EI_y GJ}$
2	24.830	20.036
4	24.098	23.148

第7図 片持はりの自由端集中荷重による横挫屈

第8図 片持はりを自由端で直交に結合した構造物の横挫屈

に示してある。 P_{cr}^* は要素内初期曲げモーメントを一定とした場合の計算値である。各表中の記号*は要

素内の初期曲げモーメントを一定とした場合(両端の初期曲げモーメントの平均値を採用)の計算結果を示すものとする。

(c). 片持はりの自由端集中荷重による横挫屈 第7図に示されたはりの横倒れ挫屈値が第3表に示されている。各記号は(a)の場合と同じである。

(d). 直棒の振れ挫屈 長さ l , 中心軸 x , それと直交する主軸 y, z , とする直棒の端末に振りモーメント M_x が作用した場合の振り挫屈値が第4表に示されている。

(e). 直棒の軸圧縮, 振れ挫屈 (d)の場合と同じ直棒で $I_x = I_y = I$ なるとき, 軸力と振りモーメントが端末に同時に作用するときの挫屈値は厳密解と比較したところ, 誤差は1分割の時, 3.6%, 2分割の時0.32%であった。

(f). 構造物の横挫屈 第8図に示されるような, 2個の片持はりを自由端で直交に剛性した構造物の接合部に集中荷重を作用させた場合, 横倒れ挫屈値が第5表に示されている。比較解がないので, 一つの片持はりの部分について, 2分割, 4分割の場合の計算結果のみ示した。

7. 結 論

本論文では仮想仕事の原理に基づいて, 大変形する空間棒要素の弾性剛性マトリックス, 幾何学的剛性マトリックスの一般表現式を導出した。特に幾何学的剛性マトリックスでは, 通常初期軸力のほかに初期振りモーメント, 初期曲げモーメントの効果も含むことを示した。これにより, これらの効果を含む初期不安定問題の解析が可能である。また, 空間変形する一般曲棒要素の歪み, 変位関係式を2次の微小項まで正確に表現した。

剛性マトリックスを, 直棒要素について具体的に求め, その精度, 収束性を数値例によって示した。計算結果よりみられるように振れおよび軸圧縮による挫屈については精度, 収束性とも良好であるが, 横挫屈については, 精度がやや悪くなっている。これは振りの変位関数を要素内で一次変化するものを用いているからである。収束性のクライテリオンから要求される要素内モーメント・コンスタントとした場合の計算結果も示してあるが, 収束はするが, 精度は一般に良好ではないようである。

終わりに, 本研究に関し, 終始適切な御指導を賜った名古屋大学工学部西村融教授に深く感謝します。なお数値計算は名古屋大学大型計算センターFACOM 230-60によった。

参考文献

- 1) ZIENKIEWICZ, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill London, (1971), pp. 413~434.
- 2) CHU, K.H. et al.: Large Deflection Buckling of Space Frames, J. ASCE, Vol. 98, ST12, Dec. (1972), pp. 2701~2722.
- 4) 篠崎武: 初撓みを考慮した骨組の有限変形解析, 日本航空宇宙学会第9回中部関西支部合同秋季大会前刷, (1972).
- 4) HOFMEISTER, L.D. et al.: Large Strain, Elasto-Plastic Finite Element Analysis, AIAAJ., Vol. 9, No. 7, July 1971, pp. 1248~1254.
- 5) STRICKLIN, J.A. et al.: Static Geometric and Material Nonlinear Analysis, Advance in Computational Method in Structural Mechanics and Design edited by J.T. Oden, R.W. Clough and Y. Yamamoto, UAH Press, (1972), pp. 301~324.
- 6) 例えば, H.C. マーチン: マトリックス法による構造力学の解法, 吉識雅夫監訳, 培風館, (1967), pp. 131~141.
- 7) TIMOSHENKO, S.P. and GERE J.M.: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, (1961), pp. 212~277.

(p.147 からつづく)

第2図

第3図

(p.166 からつづく)

似ランダム入力を用いてスペクトラム解析により周波数応答を求める方法が多く用いられてきたが、ここで扱うような系に対しては、人間が発生するノイズの増大、また人間の非定常性等により周波数応答法によっては信頼性の高い結果を得ることは非常に困難である。この論文では時間領域の解析法を用い、まず人間

のインパルス応答を求めて、それをフーリエ変換することにより周波数応答を求める手法を用いている。

得られた結果は、前に鷲津・宮嶋により提案された、人間は表示される誤差信号の周期性に注目して操縦すると考えた2次のリード項を含む伝達関数を極めてよく検証するものである。