論 文 CONTRIBUTED PAPER

有孔円筒殻の強度 (第1報)* Strength of Cylindrical Shells with Cut-Out

小野田 淳次郎**・森 大 吉 郎***
Junjiro ONODA and Daikichiro MORI

Abstract

The state of stresses in the vicinity of a square hole with rounded corners, including a circular hole as a special case, in a cylindrical shell subjected to axial load is analyzed. The analysis is carried out by two methods, that is, by the theory of shallow shell and the finite element method. The solutions of the Donnell-type equations with singular points at the centers of curvature of rounded corners and some other points, are superposed and the collocation technique is applied to satisfy the boundary conditions. The influences of the curvature parameter β and the curvatures of the rounded corners of square holes on the state of stresses, especially stress concentrations, are investigated systematically. Several models are analyzed by the finite element method with flat triangular elements and the results are in good agreement with those of the former method except for cases of larger hole.

1. ま え が き

開口部を有する円筒殻は、航空機構造、飛しょう体構造等にしばしば現われる。開口部付近の応力集中は構造強度上の問題を、また、開口部が存在するための剛性低下は、例えば、飛しょう体における飛行安定上の問題などを提起することがある。したがって、有孔円筒の挙動ならびに有効な補強法の解明は重要な問題である。

有孔円筒殻に関する研究は、浅い円筒殻の理論に基づき一連の研究^{1)~10)}がある。この種の問題を同理論に基づき解析したのは、円形孔の場合についての A. I. LURIE¹⁾ が最初と言われている。LURIE は曲率パラメタ β が開口部周辺の挙動を支配することを示し、 $\beta^2 \ll 1$ の場合についての解を与えている。その後、円形孔の場合については、軸荷重、捩り荷重、および内圧荷重の下に、さらに大きい β の値についての解析が

試みられている^{11)~17)}。筆者の知る範囲では $\beta \leq 4$ の範囲で結果が得られているが、結果にかなりの相違が見られるものもある。また楕円孔、その他の形状の孔についての研究^{8)~10)} も若干報告されているが、円孔の場合に比べ立ちおけている。他の取扱い方による円孔、矩形孔の解析例^{11)~13)} も報告されているが、これらは系統的結果を得るには至っていない。

以上のように有孔円筒殻に関する研究は、円孔の場合には一連の研究が報告されているが、それらはすべて $\beta \leq 4$ の範囲に限られている。また、実用例の多い矩形孔の場合については系統的研究は十分なされていない。

本研究では、角を丸めた正方形孔 (特別な場合として円孔を含む) を有する円筒殻が軸荷重を受ける問題を浅い円筒殻理論に基づいて解析し、曲率パラメタ β と正方形孔の角の丸み半径が応力分布、特に応力集中に及ぼす影響を明らかにする。正方形の場合には $\beta = 2.5$ 、円孔の場合には $\beta = 7$ までの計算結果を示し、一般に最大応力は β の増大に伴い増加し、この傾向は円孔の場合に顕著であることなどを報告する。さらに有限要素法による解析を行い、浅い円筒殻の理論に基づく解析結果と比較検討する。

記号

$C_{in}, C_{in}^{(i)}$	: 複素定数
E, ν	: ヤング率およびポアソン比
F	: Airy の応力関数
$H_n^{(1)}$	: 第1種ハンケル関数
N, M, Q	: 単位幅当たりの面内力、モーメント、ト、剪断力 (第2図)
R, t	: 円筒殻の半径および板厚 (第2図)
r	: 正方形孔の角の丸み半径 (第3図)
S	: Kirchhoff の合剪断力 (14.6式)
$\bar{S}$	: 開口部縁に沿う曲線座標 (第3図)
a	: 正方形孔の1/2辺長 (第3図)
x, y	: 円筒殻面上にとった座標 (第1図)
W	: 殻面に垂直方向の変位、外向きを正
$\beta \equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} s^2 / (8Rt)$	: 曲率パラメタ

*昭和49年2月15日原稿受理

**東京大学大学院

***東京大学宇宙航空研究所

$$\xi \equiv x/s, \eta \equiv y/s$$

ρ, θ : 円筒殻面上にとった極座標 (5式)

σ, τ : 応力

$$\phi \equiv \bar{W} - i\bar{F}, (4.1式)$$

φ : 円筒殻の中心軸から開口部両端を見込む角度

ϕ : 第3図参照

X, Y, Z : 座標, 第13図参照

U_x, U_y, U_z : X, Y, Z 方向の変位

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$: X, Y, Z 軸まわりの回転角

F_x, F_y, F_z : X, Y, Z 方向の力

添字 m, b, ∞ は膜応力, 曲げ応力, 開口部から無限遠方での値をそれぞれ示す. 記号 “ ξ ” は ξ に関する偏微分を示す. 上線 “ $-$ ” は無次元化された値を示す. 記号 “ $||$ ” は絶対値を示す.

2. 浅い円筒殻の理論に基づく解析

2.1 基礎関係式 第1図のように記号, 座標を定義する. 従来の有孔円筒殻に関する多くの研究と同様, Donnell の方程式を使用する. 殻面垂直方向変位 W (外向を正) および Airy の応力関数 F により同方程式を表示すると次式となる.

$$\begin{aligned} \nabla^4 F - s^2 Et/R \cdot W, \xi\xi &= 0 \\ D \nabla^4 W + s^2/R \cdot F, \xi\xi &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \xi &\equiv x/s, \eta \equiv y/s \\ D &\equiv Et^3/[12(1-\nu^2)] \\ \nabla^4 &\equiv (\nabla^2)^2 \equiv (\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

(1) 式を無次元化し, 複素結合すると次式となる.

$$\nabla^4 \phi + 8i\beta^2 \phi, \xi\xi = 0 \quad (3)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \phi &\equiv \bar{W} - i\bar{F} \\ \bar{F} &\equiv F/(s^2 N_\infty) \\ \bar{W} &\equiv WEt^2/[s^2 N_\infty \{12(1-\nu^2)\}^{1/2}] \\ \beta^2 &\equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} s^2/(8Rt) \end{aligned} \quad (4)$$

次式で定義される極座標を円筒殻中央面上に考える.

$$\xi \equiv \rho \cos \theta, \eta \equiv \rho \sin \theta \quad (5)$$

第2図により定義する膜力, モーメント, 剪断力成分を

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\rho\rho} &\equiv N_{\rho\rho}/N_\infty, \text{ etc} \\ \bar{M}_{\rho\rho} &\equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} M_{\rho\rho}/(N_\infty t), \text{ etc} \\ \bar{Q}_\rho &\equiv [12(1-\nu^2)]^{1/2} Q_\rho s/(N_\infty t), \text{ etc} \end{aligned} \quad (6)$$

と無次元化すると, 変位および応力関数と膜力, モーメントおよび剪断力との関係式は次式のようにになる.

$$\bar{N}_{\rho\rho} = \bar{F}, \rho/\rho + \bar{F}, \theta\theta/\rho^2$$

第1図 円筒殻の座標

第2図 極座標における膜力, モーメント成分

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\theta\theta} &= \bar{F}, \rho\rho \\ \bar{N}_{\rho\theta} &= -(\bar{F}, \theta/\rho), \rho \\ \bar{Q}_\rho &= -(\nabla^2 \bar{W}), \rho \\ \bar{Q}_\theta &= -(\nabla^2 \bar{W}), \theta/\rho \\ \bar{M}_{\rho\rho} &= -[\bar{W}, \rho\rho + \nu\{\bar{W}, \rho/\rho + \bar{W}, \theta\theta/\rho^2\}] \\ \bar{M}_{\theta\theta} &= -[\nu\bar{W}, \rho\rho + \{\bar{W}, \rho/\rho + \bar{W}, \theta\theta/\rho^2\}] \\ \bar{M}_{\rho\theta} &= -(1-\nu)(\bar{W}, \theta/\rho), \rho \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 解法 開口部の大きさが円筒殻の大きさに比べ小さく, 開口部による影響は円筒殻の一部分に限られるものとし, 円筒殻面は無限の広がりを持つものと仮定する. 開口部から無限遠方での一様応力状態に対応する ϕ を ϕ_∞ , 開口部による擾乱に対応する ϕ を ϕ^* とする. 円筒殻が軸荷重を受ける場合

$$\phi_\infty = \bar{W}_\infty - i\bar{F}_\infty = -\nu/(8\beta^2) - i\eta^2/2 \quad (8)$$

である. 開口部から無限遠方では開口部による擾乱は消えるので, ϕ^* は(3)式を満たすとともに $\rho \rightarrow \infty$ のとき $\phi^* \rightarrow 0$ とならなくてはならない. 上記の条件を満たす(3)式の解は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \phi^* &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} \cosh\{(1-i)\beta\xi\} H_n^{(1)}\{(1+i)\beta\rho\} \cos n\theta \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \cosh\{(1-i)\beta\xi\} H_n^{(1)}\{(1+i)\beta\rho\} \sin n\theta \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n} \sinh\{(1-i)\beta\xi\} H_n^{(1)}\{(1+i)\beta\rho\} \cos n\theta \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n} \sinh\{(1-i)\beta\xi\} H_n^{(1)}\{(1+i)\beta\rho\} \sin n\theta \end{aligned} \quad (9)$$

ここに, C_{in} は複素定数, $H_n^{(1)}$ は第1種の Hankel 関数である. (9)式を原点移動した次式も, 特異点 (ξ_j, η_j) 以外で(3)式を満たす.

$$\phi_j^* = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n}^{(j)} \cosh\{(1-i)\beta(\xi - \xi_j)\} H_n^{(1)}\{(1+i)\beta\rho_j\} \cos n\theta_j$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{(j)} \cosh \{(1-i)\beta(\xi-\xi_j)\} H_n^{(1)} \{(1+i)\beta\rho_j\} \sin n\theta_j \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n}^{(j)} \sinh \{(1-i)\beta(\xi-\xi_j)\} H_n^{(1)} \{(1+i)\beta\rho_j\} \cos n\theta_j \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n}^{(j)} \sinh \{(1-i)\beta(\xi-\xi_j)\} H_n^{(1)} \{(1+i)\beta\rho_j\} \sin n\theta_j
\end{aligned} \quad (10)$$

ここに, (ξ_j, η_j) は任意の定点の無次元化された座標であり,

$$\rho_j = \{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2\}^{1/2} \quad (11)$$

$$\theta_j = \tan^{-1}\{(\eta - \eta_j)/(\xi - \xi_j)\}$$

である。また

$$\phi^* = \phi_0^* + \phi_1^* + \phi_2^* + \dots \quad (12)$$

としても(12)式は特異点 (ξ_0, η) , $(\xi_1, \eta_1) \dots$ 以外で(3)式を満たす。本章の解法は, (12)式中の特異点を正方形孔の角の丸み半径の中心などに分散させた上で, 開口部の縁における境界条件をコロケーション法により近似的に満足させるよう複素定数 C_{in} を決定するものである。開口部形状として第3図の如き角を丸めた正方形孔を考える。図に示す如く開口部の縁に沿って曲線座標 ϕ を考え,

$$S \equiv \phi/s \quad (13)$$

と無次元化する。また開口部の縁に沿う方向を T , 垂直方向を N で表わすと図中の ϕ を用い

$$\begin{aligned}
\bar{N}_{NN} &= \bar{N}_{\rho\rho} \cos^2 \phi + \bar{N}_{\theta\theta} \sin^2 \phi + 2\bar{N}_{\rho\theta} \sin \phi \cos \phi \\
\bar{N}_{NT} &= (\bar{N}_{\theta\theta} - \bar{N}_{\rho\rho}) \sin \phi \cos \phi + \bar{N}_{\rho\theta} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\
\bar{M}_{NN} &= \bar{M}_{\rho\rho} \cos^2 \phi + \bar{M}_{\theta\theta} \sin^2 \phi + 2\bar{M}_{\rho\theta} \sin \phi \cos \phi \\
\bar{M}_{NT} &= (\bar{M}_{\theta\theta} - \bar{M}_{\rho\rho}) \sin \phi \cos \phi \\
&+ \bar{M}_{\rho\theta} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\
\bar{Q}_N &= \bar{Q}_\rho \cos \phi + \bar{Q}_\theta \sin \phi \\
\bar{S}_N &= \bar{Q}_N + d\bar{M}_{NT}/ds
\end{aligned} \quad (14)$$

である。ここに $\bar{S}_N$ は Kirchhoff の合剪断力である。開口部の縁における境界条件はこれらを用いて

$$\bar{N}_{NN}=0, \bar{N}_{NT}=0, \bar{M}_{NN}=0, \bar{S}_N=0 \quad (15)$$

第3図 角を丸めた正方形孔

である。開口部の縁に沿って m 個の点を考える。(8)式, (12)式を(14)式に代入すると, これら m 個の点における $\bar{N}_{NN}, \bar{N}_{NT}, \bar{M}_{NN}, \bar{S}_N$ が(10)式の複素定数 $C_{in}^{(j)}$ の実部および虚部の一次式として求められる。

m 個の点のうち k 番目の点における上記の値を $\bar{N}_{NNk}, \bar{N}_{NTk}, \bar{M}_{NNk}, \bar{S}_{Nk}$ とするとき

$$\sum_{k=1}^m (\bar{N}_{NNk}^2 + \bar{N}_{NTk}^2 + \bar{M}_{NNk}^2 + \bar{S}_{Nk}^2) \rightarrow \text{MINIMUM} \quad (16)$$

とするよう $C_{in}^{(j)}$ を決定する。なお問題の対称性を考慮すれば未定定数の数を減らすことができる。 $C_{in}^{(j)}$ を決定した後, 開口部の縁に沿って $\bar{N}_{NN}, \bar{N}_{NT}, \bar{M}_{NN}, \bar{S}_N$ を計算し, これが十分零に近い値であることが確認できれば求める解が得られたことになる。(10)式の各項は厳密に(3)式の解であるので, 開口部の縁での $\bar{N}_{NN}, \bar{N}_{NT}, \bar{M}_{NN}, \bar{S}_N$ の値は得られた解の精度の目安となる。 $r/s=1$ (円孔)の場合について(9)式を用いれば P. van DYKE⁵⁾ が用いた方法と本質的に一致するが, 正方形孔の場合には収束性が悪く, (9)式のみ適用では事実上解析は困難であることが判った。そこで正方形孔の場合には(12)式を用い, 正方形角部の丸み半径の中心など, 開口部内部に適当に特異点を分散させることにより解析を事実上可能にした。なおこの解法は振り荷重, 内圧荷重の場合にも適用でき, また長方形孔等の解析にも有効であると思われる。

2.3 数値計算結果および考察 円孔の場合には(9)式を用い, $\nu=0.3, \beta \leq 7$ についての計算結果を得た。開口部の縁における膜応力および曲げ応力の計算結果をそれぞれ第4図および第5図に示す。ここに, 開口縁に沿う方向の膜応力 σ_m および円筒殻外側表面における曲げ応力 σ_b は

$$\sigma_m/\sigma_\infty = \bar{N}_{TT}, \quad \sigma_b/\sigma_\infty = 6\bar{M}_{TT}/[12(1-\nu^2)]^{1/2} \quad (17)$$

により求められる。 $\beta=6.5$ の場合, $|\bar{N}_{NN}|, |\bar{N}_{NT}|, |\bar{M}_{NN}|, |\bar{S}_N|$ の全自由縁に亘る最大値は, 対称性を考慮した上で(9)式の40項(80自由度)を用いた場合 6×10^{-5} 以下, 45項(90自由度)の場合 5×10^{-5} 以下であり, 40項の場合と45項の場合との計算結果は最大膜応力, 最大曲げ応力ともに5桁まで一致している。軸荷重の場合については, J. G. LEKKERKERKER⁴⁾

第4図 軸荷重を受ける円筒殻上の円孔縁の膜応力

第5図 軸荷重を受ける円筒殻上の円孔縁の曲げ応力

は $\beta \leq 2.8$, P. van DYKE⁵⁾ は $\beta \leq 4.0$, N. J. I. ADAMS⁷⁾ も $\beta \leq$ 約 4.0 の範囲で解析結果を得ている。ここで得た結果は、ポアソン比 ν の値が多少相違しているが、LEKKERKERKER および van DYKE の得た結果と一致している。ADAMS の得た結果は、LEKKERKERKER, DYKE および筆者らと同一の前提および基礎方程式に基づいているにもかかわらず、かなり相違する結果を得ている。

第4図に示すように最大膜応力は $\theta=90^\circ$ の位置に生じ、応力値は β の増大に伴い増加を続け、 $\beta=7$ では $\beta=0$ (平板) の場合の4倍以上の値となっている。 $\theta=0^\circ$ の位置の膜応力は、 $\beta>4$ では $0.4\sigma_\infty \sim 0.5\sigma_\infty$ のほぼ一定値をとり、 $\theta=10^\circ$ の位置でも $\beta>5$ で同様の傾向が見られる。第5図に示すように、最大曲げ応力は、 β が概ね 3.4 より小さいとき $\theta=0^\circ$ 位置に

第6図 角を丸めた正方形孔縁の膜応力、曲げ応力および境界条件の不整 (β の影響)

生じるが、 β が 3.4 より大きいとき $\theta=90^\circ$ 位置に生じる。 $\theta=90^\circ$ 位置の曲げ応力は β の増加に伴い増加し続ける。膜応力と曲げ応力を合成した最大応力は、 $\theta=90^\circ$ 位置の円筒殻内側表面に現われ、その値は第4図に破線で示すように、 β の増加に伴い増加し、 $\beta=7$ では $\beta=0$ の場合の5に近い値となっている。

角を丸めた正方形孔の場合の、開口部の縁に沿う膜応力および曲げ応力分布の計算結果の例を、第6図および第7図に示す。第6図は $r/s=0.25$ の場合について、 β の種々の値における応力分布計算結果および $\beta=1.17$ の場合の $\bar{N}_{NN}, \bar{N}_{NT}, \bar{M}_{NN}, \bar{S}_N$ の値を示したものである。(14.6)式に(14.4)式を代入すると $\bar{S}_N$ の式の中に $d\psi/d\alpha$ を含む項が現われる。角を丸めた正方形孔の、直線辺と円弧部が出合う位置 ($\alpha=s-r$ および $\alpha=s-(1-\pi/2)r$ の点) で $d\psi/d\alpha$ は不連続となり、このためこれらの点付近では境界条件式(15.4)を精度よく満足させることが困難となり、 $|\bar{S}_N|$ の値が局部的に大きくなっている。このことは、殻の方程式を導く場合、板厚方向の剪断変形を考慮しないため、境界条件の一つとして Kirchhoff の合剪断力を用いていることに起因している。このよう

第7図 角を丸めた正方形孔縁の膜応力および曲げ応力 (r/s の影響)

に、角を丸めた正方形孔の場合、 $|\bar{S}_N|$ が局部的に大きい値をとっており、 $|\bar{N}_{NN}|$, $|\bar{N}_{NT}|$, $|\bar{M}_{NN}|$, $|\bar{S}_N|$ の全自由縁に亘る最大値を解の精度の目安とするのは必

第8図 角を丸めた正方形孔を有する円筒殻の応力集中係数 (軸荷重)

ずしも妥当でないと思われる。ここでは、70項をとって計算を行ったが、 $\beta=1.17$ のとき、63項による計算結果との差は最大膜応力、最大曲げ応力とも 0.2% 以下である。図に実線で示すように、最大膜応力は平板の場合と同様に、荷重方向と平行な辺からやや円弧部に入った位置に生じ、最大膜応力値は β の増大に伴い増加している。図に破線で示した曲げ応力は、ここで得た範囲では、荷重方向と垂直な辺の中央位置 ($\theta=0^\circ$) で最大値をとり、その値は β の増加に伴い増加しているが、増加の割合は鈍りつつある。

第7図は $\beta=1.17$ の場合に、 r/s が応力分布に及ぼす影響を示す。図に実線で示す膜応力については、

第9図 開口部周辺の軸方向膜応力分布

第10図 開口部周辺の殻面に垂直方向の変位

平板の場合と同様に、 r/s の値が小さい場合鋭い応力集中が見られる。辺中央部の膜応力および曲げ応力は $r/s < 0.7$ では r/s の影響をあまり受けていない。

β および r/s が最大膜応力、最大応力に及ぼす影響を第8図に示す。図中細線が膜応力集中係数、太線が応力集中係数を示している。また $(+Z)[-Z]$ と記したものは、円筒殻外側(内側)表面に最大応力が生じることを示したものである。同図に見るように、応力集中係数は β の増大に伴い一般に増加し、 $r/s=1$ (円孔)の場合特に顕著である。 r/s が1から小さく(正方形孔の角部が鋭く)なるに従い、応力集中係数は一度低下し、その後急速に増大している。最大応力は、 β により定まるある値より r/s が大きいとき円筒殻内側表面に、小さいとき円筒殻外側表面にそれぞれ現われる。一般に、 r/s がこの値より小さくなるに従い、応力集中係数は急速に増大している。なお、図中の $\beta=0$ は石田¹⁴⁾の解である。

開口部付近の $x(\xi)$ 方向の膜応力 σ_{mz} の分布例を、 $\xi \geq 0, \eta \geq 0$ の部分について第9図に示す。ここに $\beta=1.63, r/s=1/4$ である。開口部の影響は η 方向には急速に減衰し、 $\eta=2.0 \sim 2.5$ で $\sigma_{mz}/\sigma_\infty$ の値は約1.2となっている。これに対し、 ξ 軸方向への減衰は小さく、 $\sigma_{mz}/\sigma_\infty$ の値が0.8以下である領域は $\xi=6.5$ 近くまで広がっている。このときの板面に垂直な方向への変位 $\bar{W}$ の様子を第10図に等高線の形で示してあるが、変位の面からも上記のことが判る。引張荷重の場合、開口部縁の $\eta=0$ ($\theta=0^\circ$) の点が最も大きく円筒外側へ張り出している。 $\bar{W}$ の稜線は、この点から ξ 軸上を伸び、途中から2つに分かれて ξ 軸を挟んで伸びている。

従来平面問題において、簡単な写像により作られるハイポトロコイド孔が、角を丸めた正方形孔の近似として用いられることが多かった¹⁵⁾。ここでも軸荷重を

第11図 ハイポトロコイド孔縁の膜応力

受ける円筒殻上にハイポトロコイド孔がある場合の解析を行った。第11図に開口部の縁の膜応力分布例を示す。図中の実線がハイポトロコイド孔、破線が角を丸めた正方形孔の場合の膜応力である。ここに、正方形孔とハイポトロコイド孔との対応は第12図に従うものとし、開口部の縁の長さを補正して、両者の辺の

第12図 角を丸めた正方形孔とハイポトロコイド孔との対応

中央を一致させて表示してある。図に見るように、角を丸めた正方形孔の近似という立場からはハイポトロコイド孔近似はあまり精度が良くないが、開口部の形状によって最大応力値をかなり低減できる可能性を示唆している。ハイポトロコイド孔の場合、開口部の縁の曲率が急変する点がないため、角を丸めた正方形孔の場合に比べ、境界条件を精度良く満足させることができる。 $r/s=1/4, \beta=1.17$ のとき、58項をとって計算を行った場合、 $|\bar{N}_{NN}|, |\bar{N}_{NT}|, |\bar{M}_{NN}|, |\bar{S}_N|$ の全自由縁にわたる最大値は 1.2×10^{-4} 以下であった。

3. 有限要素法による解析

3.1 解析方法 殻を微小平面の集まりとして近似し¹⁶⁾、三角形平面要素を用いて変位法により解析する。ここでは面内定歪要素(変位関数1次式)の面内剛性と、BAZELEY ら¹⁷⁾により導かれた板曲げ要素(変位関数3次式)の曲げ剛性を持つ要素を用いる。これは曲げ非適合要素であるが、一様曲げ状態を表現し得るものであり、剛体自由度も保たれている。一般変位は3方向への変位および回転、一般力は3方向への力およびモーメントである。使用したプログラムは筆者が作成した汎用のもので、種々の要素が多数登録できる。連立方程式は共役傾斜法によって解いている。

3.2 計算モデルおよび要素分割 問題の対称性から、円筒殻の1/4の部分について解析を行えばよい。第13図に計算モデル、要素分割の例を示す。境界条件は

$$\begin{aligned} Y=0(y=0 \text{ および } y=-\pi R) \text{ で } U_Y=\theta_X=\theta_Z=0 \\ Z=0(x=0) \text{ で } U_Z=\theta_X=\theta_Y=0 \end{aligned} \quad (19)$$

である。節点外力は $Z=l(x=l)$ の位置の節点にのみ作用し

$$\begin{aligned} Y=0 \text{ で } F_Z=0.5, Y \neq 0 \text{ で } F_Z=1 \\ \text{他の節点力} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

である。

要素分割が粗い場合には、一般に開口部の縁におけ

第13図 有限要素法解析モデル例

る応力を正確に求めることは困難と思われる。ここで取扱う問題では曲げ応力よりも膜応力が支配的であるので、面内問題を例にとりて上記の点について考察を加える。第13図の計算モデルを平面に展開して作られる円孔を有する平板を、一様引張荷重の下で定歪要素を用いて解析した。 y 軸に接する要素の σ_x の計算結果を第14図に示す。定歪要素を用いた場合、得られた応力値は要素内でのある意味での平均的な値であると考えられ、要素の図心位置における値として処理するケースが多いようである。拡大図中の○印はこのように考えてプロットしたものである。図に見るように、自由縁付近での自由縁に沿う方向の応力は、自由

第14図 円孔を有する帯板の引張

縁に平行な辺を共有する2要素ではほぼ同一の値をとっており、得られた応力値はむしろ共有される辺での値と考えた方がよいと思われる。自由縁を一边として含む要素についても同様に、得られた応力値を自由縁における値と考えると円孔を有する帯板の厳密解¹⁸⁾と非常に良く一致している。以上のような取扱いをすることとすれば、開口部の縁における応力もここで用いた程度の要素分割で十分正確に得られると考えられる。正方形孔の場合にはさらに分割数を増やし、急激な応力変化が予想される角部では特に細かい要素分割とした。

3.3 計算結果および考察 円孔の場合、 $\varphi=30^\circ$, 42° , 60° の3つのモデルについて、板厚:半径比 t/R を $1/50$, $1/100$, $1/200$ ($\varphi=42^\circ$ では $1/50$ のみ) と変化させて計算を行った結果を、第15図および第16図に示す。第15図には開口部縁における膜応力分布を、第16図には曲げ応力分布をそれぞれ示してある。図中の実線は浅い円筒殻の理論に基づいた解析結果である。 $\varphi=30^\circ$ では、両者はよく一致している。 $\varphi=60^\circ$ では、最大膜応力、最大曲げ応力ともに有限要素法による計算結果の方が多少大きい値を示している。また、 $\varphi=60^\circ$, $t/R=1/50$ の場合と $\varphi=30^\circ$, $t/R=1/200$ の場合とでは曲率パラメータ β の値は同一であるが、計算結果は多少相違している。これらは、 $\varphi=60^\circ$ の場合には円筒殻に比べ開口部の大きさが比較的大きく、

第15図 円孔縁の膜応力分布計算結果比較

前述の“浅い無限に広がる円筒殻と考え得る”との仮定が成立しなくなっているためと考えられる。ここに得た結果から、前述の浅い円筒殻の理論に基づく解析の適用可能範囲の一応の目安を $\varphi \leq 30^\circ$ とすることができよう。ここで浅い円筒殻の理論に基づいて行った解析では、円筒殻に無限の広がりを仮定した。しかし、実際には、円筒殻の断面積は、開口部がある部分では開口部が無い場合の $(360^\circ - \varphi)/360^\circ$ 倍となっているので、計算結果は多少過小評価となっていると考えられる。計算結果を構造設計に用いる目的で、計算結果に $360^\circ/(360^\circ - \varphi)$ を乗じると、第15図および第16図の破線のようになり、 $\varphi \leq 60^\circ$, $r/s \geq 1/50$ では安全側の評価となっている。

角を丸めた正方形孔の場合の解析例を第17図に示してある。ここに $\varphi=30^\circ$, $r/s=1/4$, $\nu=0.4$ であり、 $\beta=1.17$ ($t/R=1/50$) および $\beta=1.65$ ($t/R=1/100$) の場合の、開口部の縁に沿う膜応力および曲げ応力の分布を示したものである。実線は浅い円筒殻の理論に基づく解析結果であり、両者は比較的良く一致している。

4. む す び

本論文では、角を丸めた正方形孔（特別な場合とし

第16図 円孔縁の曲げ応力分布計算結果比較

て円孔を含む)を有する円筒殻が軸荷重を受ける場合の解析を、浅い円筒殻の理論に基づいて行った。円孔の場合には従来曲率パラメタ β の値が $\beta \leq 4$ の範囲で解析されていたが、これを進めて $\beta = 7$ までの計算結果を得た。角を丸めた正方形孔の場合、 $\beta = 2.5$, $0.15 \leq r/s \leq 0.7$ の範囲で解析を行い、曲率パラメタ β および正方形孔の角の丸み半径 r が応力分布に与える影響を系統的に明らかにした。さらに有限要素法による解析を行い、結果を比較検討した。結果を要約すると次のようになる。

- 1) 応力集中係数は β の増大に伴い増大する。この傾向は $r/s = 1$ (円孔) の場合最も顕著である。
- 2) r/s が 1 から 0 へ (正方形孔の角が鋭く) 変化するにつれ、応力集中係数は一度やや低下し、その後急速に上昇する。
- 3) r/s が β により定まるある値より大きいとき、最大応力は円筒殻内側表面に生じ、この値より小さいとき円筒殻外側表面に生じる。
- 4) 浅い円筒殻の理論に基づく解析は、 $\varphi \leq 30^\circ$ では良い精度で適用できると思われる。構造設計に

第17図 角を丸めた正方形孔縁の応力分布計算結果比較

解析結果を用いる場合、断面積比 $360^\circ / (360^\circ - \varphi)$ を乗じて補正して用いると $\varphi \leq 60^\circ$, $r/s \leq 1/50$ で安全側の値として用いることができる。

なお筆者らは、引張、圧縮、曲げ荷重を受ける有孔円筒殻について光弾性実験等を行った。実験における円筒端末条件等を考慮した有限要素法による解析結果とあわせて続報にて報告する予定である。

本研究をまとめるにあたって有益なご助言とご討論を頂いた東京大学工学部 小林繁夫教授、東京大学宇宙航空研究所 砂川恵教授、東京大学工学部 近藤恭平助教授の諸先生に感謝します。

本報告は、昭和48年12月東京大学大学院に提出された小野田淳次郎の学位論文¹⁹⁾の一部である。

参考文献

- 1) LURIE, A. I.: Statics of Thin-Walled Elastic Shells (State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, Moscow, 1947). Transl.; AEC-TR-3798 (1959).
- 2) WITHUM, D.: Die Kreiszyllinderschale mit Kreisförmigen Ausschnitt unter Schubbeanspruchung, Ingenieur-Archiv, 26 (1958), 435.
- 3) 三木, 太田: 圧力を受ける円筒殻の円形開口部の応力集中について, 日本航空学会誌, 8 (昭35), 258.
- 4) LEKKERKERKER, J. G.: Stress Concentration around

- Circular Holes in Cylindrical Shells. Proc. 11th International Congress of Applied Mechanics (1964), 283.
- 5) van DYKE, P.: Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell. AIAA J., 3 (1965), 1733.
- 6) 山本, 一色, 浜田, 林: 円筒殻の開口のまわりの応力集中について, 第16回応用力学連合講演会論文抄録集 I (昭41), 19.
- 7) ADAMS, N. J. I.: Stress Concentration in a Cylindrical Shell Containing a Circular Hole. J. of Engineering for Industry, Transactions of the ASME, (1971), 953.
- 8) MURTHY, M. V. V.: Stress Around an Elliptic Hole in a Cylindrical Shell. J. of Applied Mechanics, 36 (1969), 39.
- 9) BAPURAO, M. N. and MURTHY, M. V. V.: On the Stresses in the Vicinity of an Elliptic Hole in a Cylindrical Shell under Torsional Loading. Nuclear Engineering and Design, 16 (1971), 309.
- 10) SAVIN, G. N. and Guz', A. N.: On the State of Stress near Curvilinear Holes in Shells (Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika i Mashinostroyeniye, 7 (1964), 96). Transl.; NASA TTF-423.
- 11) 溝口, 谷川, 山本: 有孔円筒殻の変形と応力. 日本機械学会論文集 (昭46), 1457.
- 12) 安藤, 飯田, 川井, 矢川, 菊地: 開口あるいは貫通割れを有する円筒殻の解析, 日本機械学会論文集, 37 (昭46), 1802.
- 13) 安藤, 飯田, 川井, 矢川, 菊地: 長方形開口を有する円筒かくの応力解析, 日本機械学会論文集, 37 (昭46), 237.
- 14) 石田: 隅を丸めた長方形孔を持つ板の平面応力問題, 日本機械学会講演論文集, No. 700-2 ('70-4 第47期通常総会講演会).
- 15) 例えば 石田: 近似正方形孔を有する帯板の引張り, 日本機械学会論文集, 25 (昭34), 1110.
- 16) ZIENKIEWICZ, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, London, (1971).
- 17) BAZELEY, G. P., CHEUNG, Y. K., IRONS, B. M. and ZIENKIEWICZ, O. C.: Triangular Elements in Plate Bending-Conforming and Non-Conforming Solutions. Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Airforce Inst. of Tech., Wright PATTERRSON A. F. Base Ohio (1965), 547.
- 18) 西田: 応力集中 森北出版 (昭42)
- 19) 小野田: 有孔円筒殻の強度と剛性に関する研究, 東京大学大学院工学系研究科学学位論文 (昭48).

表紙写真説明

防衛庁が現用している PS-1 型飛行艇は世界に類例のない外洋 (荒海) で離着水ができる航空機である。その運用に当たってはパイロットに対し操縦技術と練度が要求されるほか教育の費用対効果をあげるため、技術研究本部では昭和43年から44年にかけて同機用操縦訓練機の研究を行なった。ひきつづきその試作を新明和工業(株), 日立/日立電子(株)に依頼して47年度に受取り, 48年度に性能確認試験を行ないまもなく開発を完了しようとしているところである。本機は他の多くの陸上航空機用訓練機と異なり, 離着水操縦訓練に主眼を置き, 主な新規開発要素となったものは次のようなものである。

- (1) 波浪海面中の艇体運動の数学的模擬
- (2) STOL 空力特性模擬

第1図 模擬視界発生装置

- (3) 波浪海面に関する模擬視界
- (4) 水上および STOL に関する模擬視界

表紙写真は試験実施中の本訓練機とその模擬波浪海面を操縦室内部から撮影したものである。波浪発生機構については, 原理図を, テレビ・カメラ用海面模型については写真を, それぞれ参考まで併記した。これらの機構のほか, 照明装置や計算機を併用することにより波浪, 視界, 風の種類並びに組合わせを変えることができる。同装置で飛行艇の運動に相応した速度, 高度, ピッチング, ローリング, ヨーイング, 横滑り等の各感覚をパイロットに与えるほか, 耐波衝撃, 空力荷重感覚を操縦室駆動機構で与えることにより, 一層 PS-1 実機への模擬度を上げている。

(防衛庁技術研究本部 清水孝悦)
(波浪発生原理図は p. 254 参照)

第2図 1/250 海面模型