ヘリコプタの地上不安定振動における非等方支持効果*

Effect of Support Anisotropy on the Helicopter Mechanical Instability

杉 澤 洸**

Kiyoshi SUGISAWA

Abstract

COLEMAN's equations for the mechanical instability of a multi-blade rotor are re-examined in relation to the effect of general anisotropy of support stiffness. The characteristic equations for the special cases of support stiffness in which supports are free or fixed in one direction, or isotropic are derived from the one for general anisotropy. The behaviour of the characteristic roots for these special cases is clearly understood in comparison with that for the general anisotropic case. Next, a proof is developed of PRICE's Approximation: the stability boundary for supports fixed in one direction can be approximated by replacing the parameter A_3 with half that value in the equation for isotropic supports. A check for correspondence of the characteristic roots of the fourth-order equation for isotropic supports with those of sixth-order equation for supports fixed in one direction clarifies the conditions on which the approximation bases.

1. ま え が き

3枚以上のブレードを持つヘリコプタの地上不安定振動の問題は、基本的には、COLEMAN¹⁾によって解かれている。COLEMANは実際の現象をロータ回転面に平行方向にのみ動き得る、等価な振動系によって置き換え、回転速度は一定として解析した。その結果、パイロンの支持剛性の縦、横の非等方性を完全に考慮した式を導き、剛性比が1(等方支持)、 ∞ (一方向拘束支持)、0(一方向自由支持)について、減衰なしに対する不安定範囲および剛性比 ∞ の場合の安定化に必要な減衰の近似値を求めている。等方支持に対する減衰の効果については、HOOPER³⁾およびPRICE⁴⁾が明らかにした。実機では、通常、縦方向の固有振動数が横方向に比べてかなり大きいので、剛性比 ∞ とした計算で十分間に合う。実用上重要なこの場合についても、COLEMANのほか、多くの研究^{2), 5), 8), 10)}があるが、それらの研究者は、COLEMANのモデルに従いつつも、運動方程式の導出にはまちまちの方法を採っている。剛性比0, 1, ∞ 、以外の一般の非等方支持に対しては、COLEMANのモデルによる研究^{9), 11)}と胴体、脚

系統の扱いを改良したモデルによる研究⁶⁾とがある。

この上、吟味を要する問題点の一つとしては、非等方支持効果の解析が挙げられる。まず、一般の非等方支持に対する解そのものは、実用上、特殊な用途しかない¹¹⁾が、その極限、または特殊化を考えることによって、剛性比0, 1, ∞ に対する振動特性を一層明確に理解できる点に価値があるように思われるので、この観点からの究明が望まれる。次に、PRICE⁷⁾は、彼が等方支持について導いた、安定限界の厳密な計算式を用いて、一方向拘束支持に対する近似解を得ることを考え、パラメータ A_3 を $1/2$ にすればよいとして、その根拠につき簡単な説明を与えている。これを、この論文では“PRICEの近似”と呼ぶことにする。この近似は、実用上有用であるため、その完全な証明を導いておくことは、意義があると思われる。

この論文では、以上のような観点から、まずCOLEMANの理論の再展開を行い、一般の非等方支持に対する運動を明らかにし、剛性比0, 1, ∞ の極限を考えて、その後の研究者が得た結果を導き、統一的解釈をはかる。次に、このようにして得た、剛性比 ∞ に対する6次の特性方程式と、剛性比1に対する4次の特性方程式の根の対応を調べ、PRICEの近似の証明を試みる。これにより、この近似の成立つ条件をも数学的に明らかにする。

2. 記 号

α : 特性根 ν の実部

B_a : x_a, y_a 方向の運動に働く粘性減衰の係数

$B_f: (B_x + B_y)/2 = B_x(1 + \tau)/2$

$\Delta B_f: (B_x - B_y)/2 = B_x(1 - \tau)/2$

b : ブレード枚数

D : 時間微分演算子

I : ブレードのドラッグ・ヒンジ回りの慣性モーメント

$K_f: (K_x + K_y)/2 = K_x(1 + \xi)/2$

$\Delta K_f: (K_x - K_y)/2 = K_x(1 - \xi)/2$

$M: m_f + bm_b = (M_x + M_y)/2 = M_x(1 + \rho)/2$

M_x, M_y : x_f, y_f 方向の運動に対するロータとパイロンの等価質量, $M_x = m_x + bm_b$, $M_y = m_y + bm_b$

* 昭和50年4月28日原稿受理

** 三菱重工業株式会社

- m_b : ブレードの質量
 $m_f: (m_x + m_y)/2$
 $\Delta m_f: (m_x - m_y)/2 = (M_x - M_y)/2 = M_x(1 - \rho)/2$
 m_x, m_y : x_f, y_f 方向の運動に対するパイロンの等価質量
 r_1 : ブレードの、重心回りの慣性半径
 $\bar{r}_A$: ドラッグ・ヒンジからブレード重心までの距離
 x_a, y_a : 回転座標系
 x_f, y_f : 静止座標系
 z_f : 複素座標系, $x_f + iy_f$
 $\alpha: 2\pi/b$
 $\beta_k (k=0 \sim b-1)$: ブレードのドラッグ角, 前進が正
 ζ_1 : 静止座標系で表わした $\theta_1, \theta_1 e^{i\Omega t}$
 θ_1 : ブレードのドラッグ運動によるロータ重心の変位 (回転座標系による), $(\bar{r}_A/b) i \sum_{k=0}^{b-1} \beta_k e^{i\alpha k}$
 $A_{11}: eR / \{ \bar{r}_A(1 + r_1^2/\bar{r}_A^2) \} = eR \bar{r}_A m_b / I$
 $A_{13}: \mu / \{ 2(1 + r_1^2/\bar{r}_A^2) \} = b m_b^2 \bar{r}_A^2 / (2IM)$
 $\lambda_a: B_a/M$
 $\lambda_f: B_f/M = \lambda_x(1 + \tau)/(1 + \rho)$
 $\Delta \lambda_f: \Delta B_f/M = \lambda_x(1 - \tau)/(1 + \rho)$
 $\lambda_x, \lambda_y: B_x/M_x, B_y/M_y$
 $\lambda_\beta: B_\beta/I$
 $\mu: b m_b/M$
 ν : 特性根, $i\omega = a + \omega_f i$
 $\xi: K_y/K_x$
 $\rho: M_y/M_x$
 $\tau: B_y/B_x$
 ω : 複素振れ回り角速度, $\omega_f - ai$
 ω_f : 振れ回り角速度
 ω_r : 基準角振動数, $\sqrt{K_x/M_x}$
 $\omega_{\beta_0}: \sqrt{K_\beta/I}$
 $(\quad)$: 共役複素数
 $(\underline{\quad})$: ω_r で割って無次元化した値

その他の記号は、第1図を参照のこと。

3. COLEMAN の方程式

第1図のようなモデルに対して、COLEMAN の導いた運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned}
 (m_f + b m_b) \ddot{z}_f + B_f \dot{z}_f + B_a (\dot{z}_f - i \Omega z_f) \\
 + K_f z_f + \Delta m_f \ddot{z}_f + \Delta B_f \dot{z}_f + \\
 + \Delta K_f z_f + b m_b \ddot{\zeta}_1 = 0 \\
 b m_b \ddot{z}_f + 2 b m_b \left\{ \left(1 + \frac{r_1^2}{\bar{r}_A^2} \right) (\ddot{\zeta}_1 - 2i \Omega \dot{\zeta}_1 \right. \\
 \left. - \Omega^2 \zeta_1) + \frac{B_\beta}{m_b \bar{r}_A^2} (\dot{\zeta}_1 - i \Omega \zeta_1) + \Omega^2 \frac{e R}{\bar{r}_A} \zeta_1 \right. \\
 \left. + \frac{K_\beta}{m_b \bar{r}_A} \zeta_1 \right\} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

第1図 地上不安定振動の解析モデル

となる。これを次のように書き換える。

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11}(D) z_f + \Delta A_{11}(D) \bar{z}_f + A_{12}(D) \zeta_1 &= 0 \\
 A_{21}(D) z_f + A_{22}(D) \zeta_1 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2)式を変数に関して対称にするため、それぞれの共役複素数をとって整理すると、

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11}(D) z_f + \Delta A_{11}(D) \bar{z}_f + A_{12}(D) \zeta_1 &= 0 \\
 \bar{A}_{11}(D) \bar{z}_f + \bar{A}_{11}(D) \bar{z}_f + \bar{A}_{12}(D) \bar{\zeta}_1 &= 0 \\
 A_{21}(D) z_f + A_{22}(D) \zeta_1 &= 0 \\
 \bar{A}_{21}(D) \bar{z}_f + \bar{A}_{22}(D) \bar{\zeta}_1 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。パイロンとロータ重心の運動を、 $z_f = C_1 e^{\nu t}$, $\zeta_1 = C_3 e^{\nu t}$ と置いて(3)式へ代入すると、それが各時刻 t にて成立つためには、係数行列式が0となる必要がある。形を整えるため、2列と3列、2行と3行を入れ換えると、この行列式は、次のようになる。

$$\begin{vmatrix}
 A_{11}(\nu) & A_{12}(\nu) & \Delta A_{11}(\nu) & 0 \\
 A_{21}(\nu) & A_{22}(\nu) & 0 & 0 \\
 \bar{A}_{11}(\nu) & 0 & \bar{A}_{11}(\nu) & \bar{A}_{12}(\nu) \\
 0 & 0 & \bar{A}_{21}(\nu) & \bar{A}_{22}(\nu)
 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

(4)式を展開すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}) (\bar{A}_{11} \bar{A}_{22} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{21}) \\
 - \Delta A_{11} \bar{A}_{11} A_{22} \bar{A}_{22} = 0
 \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{11}(\nu) &= \nu^2 + \lambda_f \nu + \lambda_a (\nu - i \Omega) + \frac{K_f}{M} \\
 \bar{A}_{12}(\nu) &= \nu^2 + \lambda_f \nu + \lambda_a (\nu + i \Omega) + \frac{K_f}{M} \\
 \Delta A_{11}(\nu) &= \bar{A}_{11}(\nu) = \frac{\Delta m_f}{M} \nu^2 + \Delta \lambda_f \nu + \frac{\Delta K_f}{M} \\
 A_{12}(\nu) A_{21}(\nu) &= \bar{A}_{12}(\nu) \bar{A}_{21}(\nu) = \frac{\mu}{2 \left(1 + \frac{r_1^2}{\bar{r}_A^2} \right)} \nu^4 \\
 A_{22}(\nu) &= (\nu - i \Omega)^2 + \lambda_\beta (\nu - i \Omega) + \Omega^2 A_{11} + \omega^2 \beta_0
 \end{aligned}$$

$$\bar{A}_{22}(\nu) = (\nu + i\Omega)^2 + \lambda_\beta(\nu + i\Omega) + \Omega^2 A_1 + \omega_\beta^2$$

(5)式にて, $\nu = i\omega$ と置くと COLEMAN¹⁾ の(31)式を得る。(5)式は, 共役複素数の積の差になっているので, 展開すると, 実係数の8次式となる。したがって ν が根なら $\bar{\nu}$ も根であるから, 運動は COLEMAN が表わしたように,

$$z_f = C_1 e^{\nu t} + C_2 e^{\bar{\nu} t}$$

$$\bar{z}_f = \bar{C}_1 e^{\bar{\nu} t} + \bar{C}_2 e^{\nu t}$$

$$\xi_1 = C_3 e^{\nu t} + C_4 e^{\bar{\nu} t}$$

$$\bar{\xi}_1 = \bar{C}_3 e^{\bar{\nu} t} + \bar{C}_4 e^{\nu t}$$

となって, 一般には, 楕円状の振れ回りを表わす。この運動の特別の場合として, 円の振れ回り ($C_2 = C_4 = 0$) や直線振動 ($C_1 = \bar{C}_2$) がある。

(5)式を無次元化し, ξ, ρ, τ を使って整理すると, A_{11} は, 次のように表わされる。

$$A_{11}(\nu) = \nu^2 + \lambda_x \frac{1+\tau}{1+\rho} \nu + \lambda_a(\nu - i\Omega) + \frac{1+\xi}{1+\rho}$$

$$\bar{A}_{11}(\nu) = \nu^2 + \lambda_x \frac{1+\tau}{1+\rho} \nu + \lambda_a(\nu + i\Omega) + \frac{1+\xi}{1+\rho}$$

$$\Delta A_{11}(\nu) = \bar{A}_{11}(\nu) - A_{11}(\nu) = \frac{1-\rho}{1+\rho} \nu^2 + \lambda_x \frac{1-\tau}{1+\rho} \nu + \frac{1-\xi}{1+\rho}$$

$$A_{12}(\nu) A_{21}(\nu) = \bar{A}_{12}(\nu) \bar{A}_{21}(\nu) = A_3 \nu^4$$

$$A_{22}(\nu) = (\nu - i\Omega)^2 + \lambda_\beta(\nu - i\Omega) + \Omega^2 A_1 + \omega_\beta^2$$

$$\bar{A}_{22}(\nu) = (\nu + i\Omega)^2 + \lambda_\beta(\nu + i\Omega) + \Omega^2 A_1 + \omega_\beta^2$$

一般の非等方支持の場合につき, (5)式を解いた例を第2図に示す。振動数の図 (第2図(a)) にて $\omega_f = 1$ および $\sqrt{\xi/\rho}$ の線は, パイロンの縦, 横の固有振動数であり, 2本の斜線は, 静止系から観たブレードのドラッグ運動の固有振動数を表わしている。パイロンとブレードの運動に連成が入ると, 両固有振動数の交点付近に大きな変化が表われ, 両者が離れるところと近寄るところができる。この例では, 減衰を0としているので, 不安定域では, 2つの根の振動数が完全に重なる。すなわち, $\lambda_a = \lambda_x = \lambda_y = \lambda_\beta = 0$, $\tau = 1$ の場合には, (5)式より ν が根なら $-\nu$ も根になるから, 前述のように, $\bar{\nu}$, $-\bar{\nu}$ も根となる事実と合わせて, 同一の振動数を持つ格が二つで, 根の実部 (減衰率に対応) は, 第2図(b)のようになる。減衰がある場合は, 不安定域でも, 交点を除き振動数は, 重ならず, 減衰率も回転速度とともにだらかに変化する。

一般の非等方支持に対する特性根の図は, 基本的に基準振動数 (ω_r) の異なる, 二種の等方支持の運動を重ねた特性を備えている。

4. 一方向自由または拘束支持

$\lambda_a = 0$ のときは, $A_{11} = \bar{A}_{11}$ であるから, 特性方程式(5)は, 次のように書ける。

(a) 振れ回り振動数

(b) 減衰率

第2図 一般の非等方支持に対する運動

$$A_{22} \bar{A}_{22} (A_{11} + \Delta A_{11}) (A_{11} - \Delta A_{11}) - A_{11} A_{12} A_{21} (A_{22} + \bar{A}_{22}) + A_{12}^2 A_{21}^2 = 0 \quad (6)$$

まず, 一方向自由の場合は, (6)式にて $\xi \rightarrow 0$ の極限を考えると,

$$\frac{4}{(1+\rho)^2} A_{22} \bar{A}_{22} (\nu^2 + \lambda_x \nu + 1) (\rho \nu^2 + \lambda_x \tau \nu) - A_{11} A_3 (A_{22} + \bar{A}_{22}) \nu^4 + A_3^2 \nu^8 = 0 \quad (7)$$

となり, さらに $\lambda_x \tau$ が無視できるときは, $\nu^2 = 0$ の根を除くと, 特性方程式は, ν の6次以下になる。COLEMAN¹⁾ の Fig. I-6 は, $\lambda_x = \lambda_\beta = 0$, $\rho = \tau = 1$ として, (7)式を解いて不安定域を求めた結果を示しているようである。

次に, 一方向拘束の場合も同様に, (6)式にて $\xi \rightarrow \infty$ の極限を考えると,

$$\frac{4}{(1+\rho)^2} A_{22} \bar{A}_{22} (\nu^2 + \lambda_x \nu + 1) - \frac{1}{1+\rho} A_{12} A_{21} (A_{22} + \bar{A}_{22}) = 0$$

となり, やはり6次以下になる。 ρ は, COLEMAN に従って, 1ととると,

$$A_{11} (\xi = 1) A_{22} \bar{A}_{22} - \frac{1}{2} A_{12} A_{21} (A_{22} + \bar{A}_{22}) = 0 \quad (8)$$

が得られる。すなわち, $\xi = \infty$ に対する特性方程式は, 非等方性を無視して定めた A_{11} を使うと, (8)式で表わせる。(8)式を詳しく書くと,

$$\begin{aligned}
 & (1-A_3)\psi^6 + \{\lambda_x + (2-A_3)\lambda_\beta\}\psi^5 + \{(2+2A_1+A_3 \\
 & -A_1A_3)\psi^4 + (1+2\lambda_x\lambda_\beta + \lambda_\beta^2) + (2-A_3)\omega_{\beta 0}^2\}\psi^4 \\
 & + \{2(1+A_1)(\lambda_x + \lambda_\beta)\psi^3 + \lambda_x\lambda_\beta^2 + 2\lambda_\beta + 2(\lambda_x \\
 & + \lambda_\beta)\omega_{\beta 0}^2\}\psi^3 + \{(1-A_1)^2\psi^2 + \{2(1+A_1)(1+\lambda_x\lambda_\beta) \\
 & + \lambda_\beta^2 - 2(1-A_1)\omega_{\beta 0}^2\}\psi^2 + \lambda_\beta^2 \\
 & + (2+2\lambda_x\lambda_\beta + \omega_{\beta 0}^2)\omega_{\beta 0}^2\psi + [\lambda_x(1-A_1)^2\psi^4 \\
 & + \{\lambda_x\lambda_\beta^2 + 2(1+A_1)\lambda_\beta - 2(1-A_1)\lambda_x\omega_{\beta 0}^2\}\psi^2 \\
 & + 2\lambda_\beta\omega_{\beta 0}^2 + \lambda_x\omega_{\beta 0}^4\}\psi + (1-A_1)^2\psi^4 + \{\lambda_\beta^2 - 2(1 \\
 & -A_1)\omega_{\beta 0}^2\}\psi^2 + \omega_{\beta 0}^4 = 0 \quad (8)'
 \end{aligned}$$

となって, GRODKO⁸⁾ と同じ結果を得る. (8)' 式にて $\psi = i\omega$ と置き, $\omega_{\beta 0}$ の項を落とすと GABEL and CAPURSO⁵⁾ の式と一致する. そして, さらに λ_x, λ_β に関係した項を落とせば LOEWY and YNTEMA²⁾ や 井町¹⁰⁾ の式になる.

$\xi = 0$, または ∞ に対する根の挙動は, 第2図の, 一般の非等方支持に対する結果から, 容易に推定することができる. すなわち, ξ が0または ∞ に近づくにつれ, 第2図(a)にて, $\sqrt{\xi/\rho}$ に対応する漸近線が横軸に吸込まれるか, または上方へ飛び去り, 0または ∞ においては, 振動数の図は, 第1象限でみると, 第3図の等方支持と同様になる.

5. 等方支持

$\xi = \rho = \tau = 1$ の場合, (2)式にて, $A_{11} = 0$ であるから, 運動方程式は, 本来, 4次式であって,

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0 \quad (9)$$

となる. (9)式は, 複素係数の4次式であるから, その根は, 共役でなくなる. この場合の振動数の計算例を第3図に示す.

一方, 一般の非等方支持に対する第2図にて, $\sqrt{\xi/\rho}, \tau \rightarrow 1$ の極限を考えると, その場合の特性方程式は,

$$(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})(\bar{A}_{11}\bar{A}_{22} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{21}) = 0 \quad (10)$$

であるから根は, 共役であり, 振動数は, 第4図に示すように, 第3図を横軸に対称に反転したものをそれぞれ自身に重ねた形になる.

6. PRICE の近似とその証明

$\xi = \infty$ に対する特例性方程式は, (8)式のように6次であり, 振動数の一例は, 第5図のようになる. 安定限界に関しては, (8)式が A_3 を $1/2$ にした, $\xi = 1$ に対する特性方程式, すなわち,

$$A_{11}A_{22} - \frac{1}{2}A_{12}A_{21} = 0 \quad (11)$$

により近似できる, というのが PRICE⁷⁾ の主張である.

この近似が成立つとすれば, (8)式と(11)式の根の

第3図 等方支持に対する振動数

第4図 8次に拡張された特性方程式による, 等方支持に対する振動数

実部が, 少なくとも, 安定限界付近の Ω にて, 一致しなければならない. この点を詳しくみるため, (11)式を次のように, 8次に展開する.

第5図 一方向拘束支持に対する振動数

$$(A_{11}A_{22} - \frac{1}{2}A_{12}A_{21})(\bar{A}_{11}\bar{A}_{22} - \frac{1}{2}\bar{A}_{12}\bar{A}_{21}) = 0 \quad (12)$$

この式の根の実部は、(11)式のそれと一致するから、(11)式の代わりに、(12)式を調べてもよい。(12)式を展開すると、 $\bar{A}_{12}\bar{A}_{21} = A_{12}A_{21}$ を考慮して、

$$\begin{aligned} & A_{11}A_{22}\bar{A}_{11}\bar{A}_{22} - \frac{1}{2}A_{12}A_{21}(A_{11}A_{22} + \bar{A}_{11}\bar{A}_{22}) \\ & + \frac{1}{4}A_{12}^2A_{21}^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

となる。さらに、 $\lambda_0 = 0$ とすれば、 $\bar{A}_{11} = A_{11}$ が成立つから、

$$\begin{aligned} & A_{11}\{A_{11}A_{22}\bar{A}_{22} - \frac{1}{2}A_{12}A_{21}(A_{22} + \bar{A}_{22})\} \\ & + \frac{1}{4}A_{12}^2A_{21}^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。ここで、最後の項は、 $(1/4)A_3^2\psi^8$ となり、ふつう、 $A_3 < 0.1$ のオーダーであるから、第一項から出てくる ψ^8 に比し、全く無視できる。この項を落とすと、次に、 $A_{11} = 0$ という根が得られる。すなわち、 $\psi^2 + \lambda_2\psi + 1 = 0$ より、

$$\psi = \frac{1}{2}(-\lambda_2 \pm \sqrt{4 - \lambda_2^2}) \quad (14)$$

となり、虚部は、 $\omega_f \approx \pm 1$ 付近に貼り付く。(第4図

の破線の根に相当)したがって、これを除くと、残る根は、

$$A_{11}A_{22}\bar{A}_{22} - \frac{1}{2}A_{12}A_{21}(A_{22} + \bar{A}_{22}) = 0$$

となつて、(8)式と一致する。すなわち、(8)式の根の実部は、3つあるが、(12)式では4つある。この余分の一つが近似的に、(14)式の値になっており、それは、不安定になることは無いから、安定解析上は無視できる。したがって、(8)式の安定判別を、近似的に(12)式や(11)式により、行うことができる。

6. む す び

COLEMAN のモデルの範囲内で、非等方支持効果に関する、いくつかの問題点の究明を試みた。

COLEMAN の特性方程式は、最も一般的な式であるから、それを基に、剛性比 0, 1, ∞ に対する結果を導くことができる。特に、一般の非等方支持に対する根の挙動を基に、 $\xi \rightarrow 0, 1, \infty$ の極限を考えることにより、根の特性を明確に理解できることがわかった。

等方支持に対する安定限界計算式を使って、一方向拘束に対する結果を求める、PRICE の近似が成立つための条件は、 $\lambda_0 = 0$ と $(1/4)A_3^2 \ll 1$ の2つである。また、この場合、安定限界付近のみならず、全回転数範囲にわたり根が大体一致する。近年、計算機の発達により、直接、高次の特性方程式を解いて、容易に安定限界を計算できるようになったが、PRICE は、等方支持について非常に見通しの良い解析的方法を与えている^{4), 7)} ので、それを用いて一方向拘束に対する近似計算が可能になることは実用上、意味があると思われる。

参 考 文 献

- 1) COLEMAN, R.P.: Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Hinged Rotor Blades, NACA ARR No. 3 G 29, (1943). (Reprinted in Chapter I. of NACA Report No. 1351).
- 2) LOEWY, R.G. and YNTEMA, R.T.: Some Aeroelastic Problems of Tilt-Wing VTOL Aircraft, J. of Amer. Heli. Soc., Vol. 3, No. 1, (1958/1) pp. 35-57.
- 3) HOOPER, W.E.: Helicopter Ground Resonance, The Effect of Rotor and Fuselage Damping, Aircraft Engineering, Vol. XXXI, No. 360, (1959/2) pp. 32-39.
- 4) PRICE, H.L.: The Avoidance of Ground Resonance, Exact Stability Criteria for Helicopter on Isotropic Supports, Part I and II, Aircraft Engineering, Vol. XXXII, No. 376, 377, (1960/6, 7) pp. 156-160, 195-200.
- 5) GABEL, R. and CAPURSO, V.: Exact Mechanical Instability Boundaries as Determined from the

- COLEMAN Equation, J. of Amer. Heli. Soc., Vol. 7, No. 1, (1962/1) pp. 17-23.
- 6) BIELAWA, R. L.: An Experimental and Analytical Study of the Mechanical Instability of Rotors on Multiple-Degree of Freedom Supports, Princeton Univ. Dept. of Aero. Engg. Rep. 612, (1962/6).
- 7) PRICE, H. L.: Simplified Helicopter Ground Resonance Stability Boundaries, Part I, II, Aircraft Engineering, Vol. XXXIV, No. 404, 405, (1962/10, 11) pp. 294-299, 332-334.
- 8) MIL, M. L. (ed.): Helicopters—Calculation and Design, Volume II. Vibrations and Dynamic Stability, Chapter III. Ground Resonance, by L. N. Grodtko, NASA TT F-519, (1968/5) pp. 274-368.
- 9) 市川輝雄: ヘリコプタの地上不安定振動の一解析, 運輸技研報告, Vol. 12, No. 5, (1962/6) pp. 405-416.
- 10) 井町 勇編著: 機械振動学, 朝倉書店, (1964). pp. 279-282.
- 11) 杉沢 洵, 森田義郎: ヘリコプタ ロータの地上不安定振動に関する研究, 三菱重工技報, Vol. 10, No. 4, (1973/7) pp. 515-526.