論文 CONTRIBUTED PAPERS

地面近傍における翼の突風応答* Sinusoidal Gust Response of a Wing in the Vicinity of the Ground

中 村 慎 悟**・小早川 命***
Shingo NAKAMURA, Makoto KOBAYAKAWA

Abstract

The sinusoidal gust response of a wing which is flying in the vicinity of the ground was investigated theoretically and experimentally. Theoretically, the gust response functions of a low-aspect ratio wing were calculated applying LAWRENCE's method of an oscillating wing. In this case, the lift force augmentation by the ground effect was obtained by the image wing technique.

The experiments were performed by wind tunnel tests. That is to say, the sinusoidal gust was generated in the wind tunnel, and this gusty flow stroke the wing model. Then, the gust velocity and lift force fluctuation were measured simultaneously.

The lift force augmentation which was expressed by the ratio of response function with ground to that without ground was compared with that of the theoretical value.

It is found that both of them agree well with each other for several case. Consequently, it may be said that the theoretical values in this paper can estimate the ground effect on the gust response of a wing pretty well. However, it would be difficult to investigate this problem more precisely by perturbation theory, since the gust velocity distribution becomes shear flow and linearity assumption would not hold in the vicinity of the ground.

摘 要

地面近傍を進行する翼が、正弦的に変動する突風に遭遇した場合の応答関数を、理論的ならびに実験的に求めた。

理論計算については、LAWRENCEの方法を用い、低アスペクト比の矩形翼の応答関数を計算した。この場合、地面による影響は鏡像の理論によって揚力の増加分を求めた。実験は風洞内に正弦的に変動する突風を発生させ、翼に働く揚力の変動および突風の変動を測

定した。地面のない場合の応答関数と、ある場合の応答関数の比をとって、理論値を比較すると、両者はよく一致する。すなわち、本理論によって翼の突風応答に対する地面効果をかなりよく estimate できることを示している。しかし、地面近傍では突風が剪断流れとなっていること、線型性の仮定が成立しない領域であることなどにより、この問題を perturbation theory によって論ずるのはこれ以上無理であろう。

1. ま え が き

航空機が比較的不安定な状態にある離着陸時の非定常応答は重要であるが、航空機の状態が特殊であるだけに、これを求めるのは非常に困難である。突風応答に関して言うならば、水平飛行時の応答はかなり多くの論文が発表されているが、大きい迎角での地面近傍での突風応答についての論文は、著者らの知る限りではまだないようである。

言うまでもなく、航空機の構成要素のうち翼が最も突風の影響を受けやすいから、翼の突風応答の研究は古くから数多くなされて来た。すなわち、翼の突風応答は SEARS によって求められた、いわゆる“SEARSの突風応答関数”をもとにして、色々なバリエーションが求められている。例えば翼弦方向の突風に対する応答関数¹⁾、有限翼幅翼の応答関数^{2,3)}、厚い翼に対する応答関数⁴⁾、などである。最近では圧縮性流れにおける応答関数が揚力面理論を用いて計算されつつある^{5,6)}。ただ、地面近傍における応答特性を求めたものはないようである。これは地面付近では、突風の状態が翼に対して剪断流れとなっていること、また地面に近くなるにつれて応答に非線型性があらわれてくることなどの点からも問題点がかなりあり、またこれらの問題点は困難なものばかりだからである。

本論文は、その手掛りとして、地面近傍における翼の突風応答を、剪断流の影響や非線型性は考慮せず、地面効果による揚力の増加を鏡像の理論によって求めたものである。理論解析の方法としては、地面効果の顕著な低アスペクト比の矩形翼について、REISSNER⁷⁾

* 昭和50年4月7日、日本航空宇宙学会年會にて講演、
昭和50年5月6日原稿受理

** 京都大学工学部（現在川崎重工(株)）

*** 京都大学工学部

の揚力線理論をもとに, LAWRENCE^{8,9)} の方法を用いて計算をおこない, 応答関数を求めた. 更に実験もおこなって理論値と比較した.

2. 理 論

低アスペクト比の振動翼に対する非定常揚力は, LAWRENCE によって求められているが, 本論文ではこの LAWRENCE の方法をそのまま用いる. 従って, 本論文の仮定としては, 流れは非圧縮, 非粘性とし, 翼は薄翼とする.

2.1 基礎方程式 第1図に示される地面から h の高さで U なる速度で進行している翼のまわりの流れに対しては, 次の方程式が成立つ.

第1図 正弦突風場におかれた翼とその鏡像

$$\frac{\partial \phi(x, y, z; t)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{[u(\xi, \eta, 0^-; t) - u(\xi, \eta, 0^+; t)]z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta + \frac{1}{4\pi} \iint \frac{[u(\xi, \eta, -2h+0^-; t) - u(\xi, \eta, -2h+0^+; t)](z+2h)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2h)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (1)$$

ここに ϕ はじょう乱ポテンシアル, u は x 方向のじょう乱速度である. ただし, x, y, z, ξ, η および h は半翼弦長 c で無次元化されているものとする. なお, 以後翼上下面におけるじょう乱速度の差を

$$u_o(\xi, \eta; t) = u(\xi, \eta, 0^-; t) - u(\xi, \eta, 0^+; t)$$

$$u_{oi}(\xi, \eta; t) = u(\xi, \eta, -2h+0^-; t) - u(\xi, \eta, -2h+0^+; t)$$

とおくことにする.

(1) 式を z について微分し,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-\xi}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y-\eta}{r^3} \right) \equiv 0; r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z+2h}{r_o^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-\xi}{r_o^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y-\eta}{r_o^3} \right) \equiv 0; r_o^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2h)^2$$

なる恒等式を用いて, x について $-\infty$ から x まで積分すると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} \iint u_o(\xi, \eta; t) \left\{ \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(y-\eta)(x-\xi)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\}^{1/2} \{(y-\eta)^2 + z^2\}} \right] \right. \\ \left. + \frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + z^2} \right\} d\xi d\eta - \frac{1}{4\pi} \iint u_{oi}(\xi, \eta; t) \left\{ \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2h)^2]^{3/2}} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(y-\eta)(x-\xi)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2h)^2\}^{1/2} \{(y-\eta)^2 + (z+2h)^2\}} + \frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + (z+2h)^2} \right] \right\} d\xi d\eta \quad (2)$$

のようになる.

第1図における R_a, R_w および R_r の各領域での境界条件は以下のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \phi_s(x, y; t) &= w(x, y; t): R_a \text{ 領域} \\ 2\phi(x, y; t) &= [\phi(x_i, y, 0^+; t) - \phi(x_i, y, 0^-; t)] \exp[-jk(x-x_i)]: R_w \text{ 領域} \\ \phi(x, y; t) &= 0: R_r \text{ 領域} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに x_i は翼後縁の x 座標である. $z = -h$ で $\partial \phi / \partial z = 0$ となるから,

$$u_{oi}(\xi, \eta; t) = -u_o(\xi, \eta; t)$$

(2) 式で $z=0$ とすると,

$$\frac{\partial \phi(x, y; t)}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint d\xi d\eta \cdot u_o(\xi, \eta; t) \frac{1}{y-\eta} \times \left(1 + \frac{r}{x-\xi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint d\xi d\eta \cdot u_o(\xi, \eta; t) \\ \times \left[\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + (2h)^2} \left\{ 1 + \frac{(x-\xi)(r_o^2 + (2h)^2)}{r_o[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right\} \right] \quad (4)$$

となる. ここに

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2, \quad r_o^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (2h)^2$$

である。(4)式に(3)式で与えられる境界条件を代入すると、

$$\begin{aligned}
 w(x, y; t) = & -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-\beta(\xi)}^{\beta(\xi)} d\eta \cdot \frac{u_0(\xi, \eta; t)}{y-\eta} \left(1 + \frac{r}{x-\xi}\right) \\
 & + j \frac{k}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-b}^b d\eta \cdot \frac{\phi(1, \eta; t) \exp[-jk(\xi-1)]}{y-\eta} \left(1 + \frac{r}{x-\xi}\right) \\
 & + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-\beta(\xi)}^{\beta(\xi)} d\eta \cdot u_0(\xi, \eta; t) \left[\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + (2h)^2} \left\{ 1 + \frac{(x-\xi)(r_0^2 + (2h)^2)}{r_0[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right\} \right] \\
 & - j \frac{k}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-b}^b d\eta \cdot \phi(1, \eta; t) \exp[-jk(\xi-1)] \\
 & \times \left[\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + (2h)^2} \left\{ 1 + \frac{(x-\xi)(r_0^2 + (2h)^2)}{r_0[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right\} \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

となる。ここに b は半翼幅を半翼弦長 c で無次元化した値である。

さて、ここで

$$f(x; t) = \int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} dy \cdot w(x, y; t) \sqrt{\beta^2(x) - y^2} \quad (6)$$

とおき⁹⁾、これに(5)式を代入した後、 y について部分積分して、積分順序を変更すると

$$\begin{aligned}
 f(x; t) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-\beta(\xi)}^{\beta(\xi)} d\eta \cdot u_0(\xi, \eta; t) \cdot J_1 + j \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^1 d\xi \exp[-jk(\xi-1)] \int_{-b}^b d\eta \cdot \phi(1, \eta; t) \cdot J_2 \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-\beta(\xi)}^{\beta(\xi)} d\eta \cdot u_0(\xi, \eta; t) \cdot J_3 + j \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^1 d\xi \exp[-jk(\xi-1)] \int_{-b}^b d\eta \cdot \phi(1, \eta; t) \cdot J_4 \quad (7)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここに

$$J_1 = \int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \frac{y dy}{(y-\eta) \sqrt{\beta^2(x) - y^2}} \left(1 + \frac{r}{x-\xi}\right); -\beta(\xi) < \eta < \beta(\xi) \quad (a)$$

$$J_2 = \int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \frac{y dy}{(y-\eta) \sqrt{\beta^2(x) - y^2}} \left(1 + \frac{r}{x-\xi}\right); -b < \eta < b \quad (b)$$

$$J_3 = \int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \frac{y dy}{\sqrt{\beta^2(x) - y^2}} \left[\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + (2h)^2} \left\{ 1 + \frac{(x-\xi)(r_0^2 + (2h)^2)}{r_0[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right\} \right]; -\beta(\xi) < \eta < \beta(\xi) \quad (c)$$

$$J_4 = \int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \frac{y dy}{\sqrt{\beta^2(x) - y^2}} \left[\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2 + (2h)^2} \left\{ 1 + \frac{(x-\xi)(r_0^2 + (2h)^2)}{r_0[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right\} \right]; -b < \eta < b \quad (d)$$

(8)

ここで LAWRENCE の低アスペクト近似をもちいて J_1 に対しては

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \cong \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}$$

J_2 に対しては

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \cong \sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}$$

J_3 に対しては

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (2h)^2} \cong \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}, (y-\eta)^2 + (2h)^2 \cong \beta^2(x) + (2h)^2$$

さらに、 J_4 に対しては

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (2h)^2 \cong (x-\xi)^2 + b^2, (y-\eta)^2 + (2h)^2 \cong b^2 + (2h)^2$$

のように近似すると、 $J_1 \sim J_4$ は以下のように簡単になる。

$$J_1 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{|x-\xi|}{x-\xi} \right) + \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}}{x-\xi} \right] \quad (a)$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{|x-\xi|}{x-\xi} \right) + \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}{x-\xi} \right] \quad (b)$$

$$J_3 = \frac{\pi}{2} \frac{\beta^2(x)}{\beta^2(x) + (2h)^2} \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + \beta^2(x) + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] \quad (c)$$

$$J_4 = \frac{\pi}{2} \frac{b^2}{b^2 + (2h)^2} \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + b^2 + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] \quad (d)$$

(9)

これら $J_1 \sim J_4$ を (7) 式に代入し

$$q(x; t) = \frac{1}{2} \int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} \phi(x, y; t) dy \quad (10)$$

とおくと、次のような $q(x; t)$ に対する積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} f(x; t) = & -\frac{1}{2} q(x; t) - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 q'(\xi; t) \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}}{x-\xi} \right] d\xi \\ & + j \frac{k}{4} q(1; t) \int_1^\infty d\xi \cdot \exp[-jk(\xi-1)] \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}{x-\xi} + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 d\xi \frac{\beta^2(x)}{\beta^2(x) + (2h)^2} q'(\xi; t) \right. \\ & \times \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + \beta^2(x) + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] + j \frac{k}{4} q(1; t) \int_1^\infty d\xi \cdot \exp[-jk(\xi-1)] \frac{b^2}{b^2 + (2h)^2} \\ & \times \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + b^2 + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

さて、突風としては、一次元の突風を仮定すると、

$$w(x, y; t) = -(w_0/U) \exp(j\omega(t - cx/U)) \quad (12)$$

のようにあらわされるから、 f, q も正弦的に変動するとして

$$\begin{aligned} f(x; t) &= \bar{f}(x) \exp(j\omega t) \\ q(x; t) &= \bar{q}(x) \exp(j\omega t) \end{aligned} \quad (13)$$

とおける。(12) 式を (6) 式に代入して得られる $\bar{f}$ を (11) 式へ入れると、結局 $\bar{q}$ に対する積分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) = & -\int_{-\beta(x)}^{\beta(x)} (w_0/U) \sqrt{\beta^2(x) - y^2} \exp[-jkx] dy \\ = & \frac{1}{2} \bar{q}(x) + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 q'(\xi) \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}}{x-\xi} - j \frac{k}{4} \bar{q}(1) \int_1^\infty d\xi \cdot \exp[-jk(\xi-1)] \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}{x-\xi} \right] \right. \\ & - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{\beta^2(x)}{\beta^2(x) + (2h)^2} \bar{q}(\xi) \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + \beta^2(x) + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] \\ & \left. + j \frac{k}{4} \bar{q}(1) \int_1^\infty d\xi \exp[-jk(\xi-1)] \frac{b^2}{b^2 + (2h)^2} \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + b^2 + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] \right] \end{aligned} \quad (14)$$

2.2 積分方程式の解 積分方程式 (14) はかなり複雑な形をしており、解析的に解くのは困難である。LAWRENCE は $\bar{q}(x)$ を級数展開して積分方程式をその係数の 1 次連立方程式になおして解いているが、ここでもこの方法にならって $\bar{q}(x)$ を N 個の級数に展開する。

まず、 $q(x; t)$ は KUTTA の条件を満足しなければならない。これは

$$q'(1; t) + jkq(1; t) = 0 \quad (15)$$

で与えられる。そこで (15) 式を満足する $\bar{q}(x)$ を

$$\bar{q}(x) = \bar{q}_s(x) - \mu(k) \bar{q}_s(1)(1+x) \quad (16)$$

とおく。ここで $x = \cos \theta$ なる変数変換して $\bar{q}_s$ を次のように級数展開する。

$$\bar{q}_s(\theta) = (\pi - \theta)(A_0 + A_1) + \sum_{r=1}^{N-1} (A_{r-1} - A_{r+1}) \frac{\sin r\theta}{r} \quad (17)$$

$$\text{また} \quad \mu(k) = \frac{jk}{2jk+1} = \frac{2k^2 + jk}{4k^2 + 1}$$

である。ただし、KUTTA の条件より $A_{N-1} = A_N = 0$ である。

(16) 式を (14) 式に代入すると、

$$\bar{f}(x) = S(x, \beta) - V(x, \beta, h) - \frac{1}{4} \mu(k) \bar{q}_s(1) [R(x, \beta) + P(x, b, k) - W(x, \beta, h) - Y(x, b, k, h)] \quad (18)$$

が得られる。ここに

$$S(x, \beta) = \frac{1}{2} \bar{q}_s(x) + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \bar{q}_s(\xi) \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}}{x-\xi} \right] \quad (a)$$

$$V(x, \beta, h) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 d\xi \cdot \bar{q}_s'(\xi) \frac{\beta^2(x)}{\beta^2(x) + (2h)^2} \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + \beta^2(x) + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] \quad (b)$$

$$R(x, \beta) = 2(1+x) + \int_{-1}^1 d\xi \cdot \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}}{x-\xi} \right] \quad (c)$$

$$P(x, b, k) = \int_1^\infty d\xi \cdot \exp[-jk(\xi-1)] \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}{x-\xi} \right] \quad (d)$$

$$W(x, \beta, h) = \int_{-1}^1 d\xi \cdot \frac{\beta^2(x)}{\beta^2(x) + (2h)^2} \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + \beta^2(x) + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] \quad (e)$$

$$Y(x, b, k, h) = \int_1^\infty d\xi \cdot \exp[-jk(\xi-1)] \frac{b^2}{b^2 + (2h)^2} \left[1 + \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 + b^2 + (2h)^2]}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(x)}[(x-\xi)^2 + (2h)^2]} \right] \quad (f)$$

(19)

さて, $S(x, \beta)$, $V(x, \beta, h)$, $R(x, \beta)$, $P(x, b, k)$, $W(x, \beta, h)$ および $Y(x, b, k, h)$ はかなり面倒な積分を含んでいる. 特に $S(x, \beta)$ および $V(x, \beta, h)$ は $\vartheta'(\xi)$ を被積分関数に含んでいる. そこで, これらを級数展開して次のようにあらわす.

(a) $S(x, \beta)$

$$S(x, \beta) = G_0 A_0 + \sum_{r=1}^{N=1} G_r A_r \quad (20)$$

ここに

$$G_0(\theta) = \frac{\pi}{4} [F_1(\theta) - F_0(\theta)]$$

$$G_r(\theta) = \frac{\pi}{4} [F_{r+1}(\theta) - F_{r-1}(\theta)]$$

$$F_0(\theta) = \frac{2\theta}{\pi} + H_0(\theta, \beta) - 3$$

$$F_r(\theta) = \frac{2 \sin r\theta}{\pi r} - \frac{\beta(\theta) \sin r\theta}{\sin \theta} + H_r(\theta, \beta)$$

$$H_r(\theta, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\tau \cdot \cos \gamma \tau H(\theta, \beta, \tau)$$

$$H(\theta, \beta, \tau) = \frac{\sqrt{(\cos \tau - \cos \theta)^2 + \beta^2(\theta)} - \beta(\theta)}{\cos \tau - \cos \theta}$$

(b) $V(x, \beta, h)$

$$V(x, \beta, h) = G_0' A_0 + G_1' A_1 + \sum_{r=1}^{N=1} G_r' A_r \quad (21)$$

ここに

$$G_0' = \frac{\pi}{4} \frac{\beta^2(\theta)}{\beta^2(\theta) + (2h)^2} [1 + \tilde{H}_0(\theta, \beta) - \tilde{H}_1(\theta, \beta)]$$

$$G_1' = \frac{\pi}{4} \frac{\beta^2(\theta)}{\beta^2(\theta) + (2h)^2} [1 + \tilde{H}_0(\theta, \beta) - \tilde{H}_2(\theta, \beta)]$$

$$G_r' = \frac{\pi}{4} \frac{\beta^2(\theta)}{\beta^2(\theta) + (2h)^2} [\tilde{H}_{r-1}(\theta, \beta) - \tilde{H}_{r+1}(\theta, \beta)]$$

$$\tilde{H}_r(\theta, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\tau \cdot \cos \gamma \tau \tilde{H}(\theta, \beta, \tau, h)$$

$$\tilde{H}(\theta, \beta, \tau, h) = \frac{(\cos \theta - \cos \tau)[(\cos \theta - \cos \tau)^2 + \beta^2(\theta) + (2h)^2]}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \tau)^2 + \beta^2(\theta)}[(\cos \theta - \cos \tau)^2 + (2h)^2]}$$

これらを (21) 式へ代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{\overline{wG}}{U} \beta^2(x) \exp[-jkx] \\ &= \sum_{r=0}^{N=1} (G_r - G_r') A_r - \frac{\pi}{4} \mu(k) \{R(x, \beta) - W(x, \beta, h) + P(x, b, k) + Y(x, b, k, h)\} (A_0 + A_1) \end{aligned} \quad (22)$$

のようになる. さらに, $R(x, \beta)$, $W(x, \beta, h)$ は後の計算の便宜のため, 次のように書き直しておく.

(c) $R(x, \beta)$

$$R(x, \beta) = 4 + 2x - \sqrt{(x-1)^2 + \beta^2(x)} + \sqrt{(x+1)^2 + \beta^2(x)} \\ + \beta(x) \sinh^{-1} \left| \frac{\beta(x)}{x-1} \right| - \beta(x) \sinh^{-1} \left| \frac{\beta(x)}{x+1} \right| \quad (23)$$

(d) $W(x, \beta, h)$

$$W(x, \beta, h) = \frac{\beta^2(\theta)}{\beta^2(x) + (2h)^2} \left[2 + \int_0^\pi d\tau \cdot s.n \tau \cdot \tilde{H}(\theta, \beta, h, \tau) \right] \quad (24)$$

さて、揚力も正弦的に変動するとして、 $L(t) = \bar{L} \exp(j\omega t)$ とおくと、単位面積当りの揚力の振幅は

$$d\bar{L}/dS = 2\rho U^2(\bar{\phi}_x + jk\bar{\phi}) \quad (25)$$

で与えられる。結局、翼全体の揚力の振幅は上式を積分して、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{L}}{2\rho U^2} &= \int_{-1}^1 \bar{g}'(x) dx + jk \int_{-1}^1 \bar{g}(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \bar{g}'(x) dx - 2\mu(k)\bar{g}_s(1) + jk \left\{ \int_{-1}^1 \bar{g}_s(x) dx - 2\mu(k)\bar{g}_s(1) \right\} \\ &= -\int_0^\pi \bar{g}_s'(\theta) d\theta + jk \int_0^\pi \bar{g}_s(\theta) \sin \theta d\theta - 2(1+jk)\mu(k)\bar{g}_s(1) \\ &= \pi(A_0 + A_1)(1+jk)(1-2\mu(k)) + \frac{\pi}{2}(jk)(A_0 - A_2) \end{aligned} \quad (26)$$

となり、 A_0, A_1 および A_2 のみであらわされることになる。最後に、突風応答関数は

$$L(t) = (2\pi\rho w_G US) S'(k) \exp(j\omega t)$$

より

$$S'(k) = \frac{\bar{L}}{2\pi\rho w_G US} \quad (27)$$

を計算することにより求められる。

2.3 計算例 (22) 式は N 個の A_7 を未知数とする方程式である。これを解くため、翼弦長を N 個に分割し $x_n = \cos(n\pi/N)$, ($n=0, 1, \dots, N-1$) とおいて x に代入すると、 N 個の A_7 についての連立 1 次方程式が得られる。この連立方程式を解き、そのうちの A_0, A_1 および A_2 を (26) 式へ代入すれば、揚力の振幅が k の関数として求められ、これより突風応答関数を計算することができる。ここでは、後の実験の項で述べる 3 種類のアスペクト比をもつ矩形翼に対し $N=10$ として計算をおこなった。ただ、(22) 式の G_7, G_7', R, W, P, Y などの値を計算する場合、数値積分をおこなう必要があるが、これらの積分は SIMPSON の方法を用いた。また、(22) 式は複素係数連立方程式となるので、実部、虚部にわけて解く方法をとった。

計算結果の一例を第 2, 3 および 4 図に示す。パラメーターは翼の地面からの高さである。各図の上が応答関数の絶対値、中が実部、下が虚部をあらわす。実部の図について $h=\infty$ の場合 (地面効果のない場合) を見ると、アスペクト比が 2.0 で約 0.4 であるが、これと FILOTAS²⁾ や小早川³⁾ によって求められた有限翼中翼の応答関数と比較すると、この計算による値はかなり小さいようである。この原因は低アスペクト近似によるものと考えられる。応答関数に対する地面効

第2図 突風応答関数 (1) アスペクト比: 2.0
上図: 絶対値, 中図: 実部, 下図: 虚部

第3図 突風応答関数(2) アスペクト比: 1.5
上図: 絶対値, 中図: 実部, 下図: 虚部

果の影響は, 翼の地面からの高さが低くなるにつれてかなり顕著となるが, $h=0.6$ あたりでは線型性がくずれていると考えられ, また突風の剪断流れによる影響も無視できなくなるであろうと考えられる。

3. 実験

翼の突風応答に対する地面効果の影響を調べる実験は, 風洞内に正弦的突風を発生させることによって, 風洞実験をおこなって調べた。

3.1 実験装置 実験装置の概要を第5図に示す。使用した風洞は, 測定部断面が正方形 ($600 \times 600 \text{ mm}$) の変形吹出し形風洞である。一樣流中の乱れは本実験の流速 11 m/s で $1/\overline{u^2}$ が 0.2% 以下であった。突風は第5図に示されるように, 風洞測定部に振動翼列をおき, この迎角を正弦的に変動させることによって発生させた。

本実験で最も問題となるのは地面板である。地面板を振動翼列に近づけると, 突風の地面板によるはね返りによって, 測定翼近傍の流れが乱される恐れがある。ここでは図の h' を変化させて, このはね返りの

第4図 突風応答関数(3) アスペクト比: 1.0
上図: 絶対値, 中図: 実部, 下図: 虚部

第5図 実験装置概観

影響が無視できる点をさがして地面板を固定した。地面板の長さは約 1.5 m である。なお, 地面板上の境界層の影響は無視した。

次に測定翼であるが, 3種類のものについて実験をおこなった。すなわち, いずれも断面形状が NACA-0012 の矩形翼で翼弦長は 200 mm であり, 翼幅をかえることによって, アスペクト比を $2.0, 1.5$ および 1.0 とした。これら測定翼は2本のストラット(断面

は NACA-0024) によって支持する方法をとった。測定翼に働く変動力はこのストラット下部に取付けたステンレス製バランスに動歪みゲージを貼付けて測定した。問題はこのストラットの突風による影響が、測定翼の揚力に混入してくることであるが、これは後でストラットのみ突風の突風応答を測定し、これを差し引くことによって、測定翼のみの突風応答を求めた。なお、測定翼は振動翼後方約 600 mm の点に固定した。

3.2 実験方法とパラメーター 揚力は前述のように、ステンレス製バランスに歪みゲージ(4ゲージ法)を貼付けて動歪み計の出力を電磁オシログラフに記録した。突風は熱線風速計によって測定した。プローブはX型を用い、 x 方向(一様流方向)および z 方向の変動流を揚力と同時に記録した。

実験パラメーターとしては、次のものである。

測定翼アスペクト比: 2.0, 1.5, 1.0

突風の振幅: 大 (Gust 1), 小 (Gust 2) の2種類

翼の地面からの高さ: 6, 11, 20, 30, 40 cm

なお、一様流速 $U=11$ m/s で一定とした。したがって、実験は上のパラメータについて、突風の周波数を $k=0.06\sim0.17$ の間で変化させて突風応答を調べた。

3.3 実験結果および考察

3.3.1 突風 突風の測定例を第6図に示す。これを見ると、突風はほぼ正弦的に変動しているが、振幅を小さくすると (Gust 2), 波形がややくずれてくる。これは翼の地面からの高さが 20 cm ($h=2.0$) の場合であるが、他の h についても同様な結果が得られた。第7図は突風の振幅を縦軸に、 h を横軸にとって示したものである。突風の振幅が h によって受ける変化

第6図 正弦的突風 $k=0.01$

第7図 突風の振幅の変化

は、 $h<2.0$ で勾配がかなり急になっており、この領域では突風の剪断流れの影響があらわれてくると考えられる。

3.3.2 応答関数 アスペクト比 2.0, 1.5 および 1.0 の翼の突風応答関数の絶対値を, reduced frequency k を横軸にとって、それぞれ第8, 9 および 10 図に示した。先に求めた理論値を同じ図に描いて比較

第8図 (a) 突風応答関数, 実験値との比較 (1)

第8図 (b) 突風と揚力の位相差

第9図 突風応答関数, 実験値との比較 (2)

してある。これを見ると、実験値の方が理論値よりかなり大きな値となっている。特に $h=1.1$ の場合の両者の差は著しい。前にも述べたように、これらの差は低アスペクト近似によるものと考えられるが、アスペクト比が大きいくほど地面効果が顕著となっている傾向は実験値、理論値共に同様である。

このことは地面効果のない場合、すなわち $|S'(k)|_{\infty}$ と $|S'(k)|$ との比をとって地面からの高さ (h/b) に対してプロットすると一層明確となる。これを第11図に示す。(a) は Gust 1 に対するもの、(b) は Gust 2 に対するものである。この図より明らかなように、理論値と実験値はよく一致する。すなわち、本理論では応答関数の値そのものはやや小さくあらわれるが、

地面の突風応答への影響は、鏡像の理論によりかなり正確に estimate できることがわかる。

なお、第8(b)図は突風と揚力との位相差であるが、 k に対して直線的に増加している。この傾向は他の場合に対しても同様である。

4. む す び

本論文は地面近傍における翼の突風応答を、理論計算によって求め、さらに実験もおこなって両者を比較したものである。理論計算については LAWRENCE が低アスペクト比の翼が正弦振動した場合の非定常揚力を計算した方法を用いて、突風応答関数を求めた。この場合、地面効果は鏡像の理論によって揚力の増加分

第 10 図 突風応答関数, 実験値との比較 (3)

第 11 図 (a) 突風応答関数の地面効果による増大率 (1)

第 11 図 (b) 突風応答関数の地面効果による増大率 (2)

を計算した. このようにして求めた値は, 地面がない場合, FILOTAS らによって求められている高アスペクト近似による値よりやや小さい値を与える. 実験値と比較しても, 理論値は小さくなっている. しかし, 地面効果の影響を明確にするため, 地面のある場合の応答関数と, 地面のない場合の応答関数との比をとって実験値と比較すると両者はよく一致する. これは上述の理論で, 突風応答に対する地面効果の影響を, かな

りよく estimate できることを示している.

ただ, 地面近傍では, 突風が剪断流れとなっていること, 揚力の増加は線型理論では求められないこと, などを考えると, perturbation theory を基礎とした非定常翼理論で扱うのは, これ以上無理であろう.

文 献

- 1) HORLOCK, J. H.: Fluctuating Lift Forces on Aero-

- foils Moving through Transverse and Chordwise Gusts, Trans. ASME, 494, 1968.
- 2) FILotas, L. T.: Approximate Transfer Functions for Large Aspect Ratio Wings in Turbulent Flow, Jour. Aircraft, Vol. 8, No. 6, 1971.
 - 3) 前田, 小早川: 翼の突風応答に関する研究, 第4報, 日本航空宇宙学会誌, 第20巻, 第220号, 1972.
 - 4) 前田, 小早川: 同上, 第5報, 日本航空宇宙学会誌, 第19巻, 第211号, 1971.
 - 5) CHU, S. & WIDNALL, S. E.: Prediction of Unsteady Airloads for Oblique Blade Gust Interaction in Compressible Flow, AIAA Jour., Vol. 12, No. 9, 1974.
 - 6) CHU, S. & WIDNALL, S. E.: Lifting Surface Theory for a Semi-Infinite Wing in Oblique Gust, AIAA Jour., Vol. 12, No. 12, 1974.
 - 7) REISSNER, E.: The Effect of Finite Span on the Airload Distribution for Oscillating Wings, Pt. I & II, NACA TN 1194 & 1195, 1947.
 - 8) LAWRENCE, H. R.: The Lift Distribution of Low-Aspect-Ratio Wings at Subsonic Speeds, Jour. Aero. Sci., Vol. 18, No. 10, 1951.
 - 9) LAWRENCE, H. R. & GERBER, E. H.: The Aerodynamic Forces on Low-Aspect-Ratio Wings Oscillating in an Incompressible Flow, Jour. Aero. Sci., Vol. 19, No. 11, 1952.

自由飛行構造模型の振動*

Natural Vibrations of the Free-Flight Structural Models

堀 武 敏**・林 洋 一**・多 田 保 夫**

Taketoshi HANAWA, Yōichi HAYASHI, Yasuo TADA,

戸 田 勸**・日 下 和 夫**

Susumu TODA and Kazuo KUSAKA

Abstract

In this paper the authors applied the well-known RAYLEIGH-RITZ's procedure to the analysis of natural vibration characteristics of plate beam combination structures.

General analytical equations were formulated for the structures which consisted of built-up wings and a fuselage. The vibration tests were done on the cantilevered wing, freely suspended built-up delta wing and the built-up delta wings with the fuselage which structurally simulated free-flight model FFM-10²⁾ designed to investigate the dynamic characteristics in supersonic flight. The results of the tests were compared with the results obtained from analysis formulated.

It was found that both results were in good agreements. It may be concluded that this analytical method is one of the usefull methods for predicting the natural vibration characteristics of such structures.

ま え が き

先に板の振動の近似解法と実例を示したが¹⁾ 今回はこの方法を利用した高速航空機の代表的な形状の構造物の振動解析の近似解法を示し、模型について数値解析と実験とをおこなった。高速機模型としては昭和44年に航空宇宙技術研究所が秋田県においておこなった自由飛行模型機²⁾ による飛行実験に使用したものを参考とした。

振動解析はエネルギー法によったもので、翼および胴体の中心を通る平面の撓みを仮定した試験関数を用い、この式からひずみおよび運動のエネルギーを計算し、ポテンシャル・エネルギーが停留値をとる条件から振動数および振動モードを求めた。

振動実験は共振法により、電磁加振器で試験体を加振し、共振動数を求め、このとき試験体に砂を散布して共振動時モードのノード・ラインを求めた。

1. 解 析

解析は前論文¹⁾ p. 235 (1) 式において用いた方法を利用するため、実際は複雑な構造物の変形について粗い仮定を置き、構造翼の場合に拡張したものである。今回の場合はエネルギーを計算する項が前回より多くなるだけで、計算方法は前回と同じである。

一般式を求めるため胴体と構造翼を結合したモデルとして第1図に示すような構造物を考える。胴体は部分的に剛性および質量の一樣な段付梁と考え、翼は翼厚がスパン方向に直線的に変化し、桁、小骨および補強材のない等厚外板とによって構成されているものとした。

座標原点を胴体の中心軸と翼前縁の延長線との交点にとった。翼および胴体の中立面を通る xy 平面からの z 方向の撓みを試験関数として、

$$w(x, y) = \sum a_{mn} x^m y^n \quad (1)$$

の形のべき級数で仮定したことは前回と同様である¹⁾。

³⁾ この関数から、胴体の曲げおよび振り、桁および

* 昭和50年7月25日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所