は、 $-(1+\xi_0)/\epsilon \leq \bar{\xi} \leq -1, +1 \leq \bar{\xi} \leq (1-\xi_0)/\epsilon$ である。
これらを用いると容易に次式を得る：

$$I = \epsilon \left[2 + \ln 4 - \frac{\epsilon}{1-\xi_0^2} + O(\epsilon^2) \right] = O(\epsilon) \quad (\text{B } 2)$$

舵角 case に関しても同様の証明が可能であろうがしかし遥かに煩雑となるだろう。“相反定理+薄膜概念”を用いれば、かような証明を自動的に回避できる。

APPENDIX C 本文中に現われる積分について

本論文を完成したところに下記の論文の別刷が送付された。その付録，“線型伴流模型に用いられる積分の表”には翼理論で頻発するが、ふつうの積分公式集には洩れている公式が数多く集められているように思われる。

鈴木勝雄：前方剝離渦を伴った流れの自由流線理論による解析，防衛大学校理工学研究報告，第13巻第3号，昭和50年9月，pp. 437~455.

APPENDIX D 迎角 case と舵角 case の分類に対する補足説明

与えられた翼のキャンバー線の形状を $\zeta_c(\xi)$ としよう。これから $d\zeta_c/d\xi = \zeta'_c(\xi)$ をつくれ。そして

$$\zeta'_c(\xi) = h_G(1-\xi_0) + h(\xi)$$

で表わせ。ただし h_G は定数， $h(\xi)$ は適当に滑らかな関数である。そのとき

$$\text{迎角 case の } w = U h(\xi)$$

$$\text{舵角 case の } \beta = -h_G$$

を与える。つまり，一般の隙間つき翼は両 case に分割して解き，後にそれを重ね合わせるにより取り扱うことができる。

円錐殻の超音速パネルフラッタ（第1報）線形解析 Supersonic Flutter of Conical Shells, I: Linear Analysis.*

上 田 哲 彦**・小 林 繁 夫***
Tetsuhiko UEDA and Shigeo KOBAYASHI

Abstract

Supersonic panel flutter of truncated conical shells has been analyzed by the FEM incorporated with the conical frustum elements. The effects of the internal and external pressure on flutter as well as buckling instability are examined. Numerical calculations are performed on a conical shell with a semivertex angle of 14° having fixed ends. Results are presented for the flutter, vibration and buckling characteristics.

1. 緒 言

円錐殻はロケットのノーズおよび段間構造として用いられているにもかかわらず，円錐殻の超音速パネル・フラッタに関してこれまで発表されている論文は極めて少なく，文献 1)~4) が見られるだけである。文献 1)~3) では理論計算が，文献 4) では風洞実験結果が示されているが，理論計算値と実験値とが一致するという満足すべき研究成果は全く示されていない。この中で DIXSON & HUDSON の解析理論はフラッタ・モードを多項近似し，面内力を表わす応力関数を適合条件式をみだすよう求め，平衡方程式について

はガラーキン法を用いるというオーソドックスな解析方法で，かつフラッタの限界値に対する仮定変位の項数の影響をも明らかにしているが，仮定する撓形は両端単純支持以外では無理な形になっている。両端単純支持の場合でも満足すべきフラッタ限界値を得るのに12項程度必要とすることが示されているので，両端固定条件で精度の良い解を得るのにはかなり多数の項数を必要とするものと考えられる。最近有限要素法を板のパネル・フラッタ解析に適用した論文^{5),6)}が見られるようになったが，両端固定の境界条件をもつ円錐殻のパネル・フラッタ解析には有限要素法を用いるのが最適と考え，軸対称殻の特質を生かし円周方向波形に三角関数を用いて半解析的な処理をした有限要素法を用いてフラッタ限界値を求める方法を提案し，二三の数値例について計算してその有用性を示すとともにパネル・フラッタ限界値に対する内外圧の影響を明らかにしたものである。

2. 有限要素法による解析

2.1 基礎式 第1図に示した切頭円錐殻に分布外力 X, θ, Z が作用する系の仮想仕事は

$$\delta U = \int_{L_1}^{L_2} \int_0^{2\pi} [N_x \delta \epsilon_x + N_\theta \delta \epsilon_\theta + N_{x\theta} \delta \epsilon_{x\theta} - M_x \delta \kappa_x - M_\theta \delta \kappa_\theta - 2M_{x\theta} \delta \kappa_{x\theta}]$$

* 第17回構造強度に関する講演会（昭和50年7月）で発表 昭和51年7月1日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所

*** 東京大学工学部航空学科

第1図 座標と記号

$$-(X\delta u + \theta\delta v + Z\delta w)]x \sin \alpha d\theta dx \quad (1)$$

と表わされる。\$\alpha\$ は円錐の半頂角を表わす。ここで円錐殻の \$x=L_1, L_2\$ の境界条件は斉次式で与えられることにして境界線上の積分項は0としている。\$\epsilon_x, \kappa_x\$ などの歪みおよび曲率変化は独立量ではなく DONNELL 型の理論⁷⁾ に基づく次の歪み～変位関係式を満たさなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{x} + \frac{\cot \alpha}{x} w + \frac{1}{2x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \\ \epsilon_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{x} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで \$\phi = \theta \sin \alpha\$

である。パネル・フラッタ問題では軸対称変形と円周方向波数 \$n\$ が多い (少なくとも5以上) 変形を扱うので近似的に DONNELL 型の理論で十分と考えられる。応力～歪み関係は線形関係式を用いると次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) \\ N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) \\ N_{x\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \epsilon_{x\theta} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_x + \nu \kappa_\theta) \\ M_\theta &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_\theta + \nu \kappa_x) \\ M_{x\theta} &= -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \kappa_{x\theta} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで \$E, \nu, h\$ はそれぞれ殻のヤング率, ポアソン比, 板厚を表わす。

2.2 軸対称圧による変形 まず超音速空気流中におかれた殻に軸対称な差圧 \$p\$ (内圧正) が作用したときの静的な変形を考える。この場合は軸対称変形問題になるため (2)～(5) 式により, \$\epsilon_{x\theta} = \kappa_{x\theta} = N_{x\theta} = M_{x\theta} = 0\$ となり, したがって系の仮想仕事は

$$\delta U^0 = 2\pi \sin \alpha \int_{L_1}^{L_2} [\delta \epsilon^0 \sigma^0 - Z^0 \delta w^0] x dx \quad (6)$$

と表わされる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^0 &= (\epsilon_x^0 \ \epsilon_\theta^0 \ \kappa_x^0 \ \kappa_\theta^0)^T \\ \sigma^0 &= (N_x^0 \ N_\theta^0 \ -M_x^0 \ -M_\theta^0)^T \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

であり軸対称変形問題についての諸量は指標 0 を付けて区別する。また \$T\$ は転置を意味する。(4), (5) 式は

$$\sigma^0 = D^0 \epsilon^0 \quad (8)$$

とマトリックス表示される。

ここで有限要素法を適用する。軸対称殻であることを考慮して輪切りにした要素を考え, 変位法を用いると一つの要素についてその要素内の変位 \$u^0, w^0\$ を両端の変位値 \$u, w, dw/dx\$ からなる節点変位 \$\mathbf{d}^0\$ を用いて

$$u^0 = N_u^0 \mathbf{d}^0, \quad w^0 = N_w^0 \mathbf{d}^0 \quad (9)$$

と表わす。\$u^0(x)\$ は \$x\$ につき1次式, \$w^0(x)\$ は \$x\$ につき3次式を仮定すると, 変位関数 \$N_u^0, N_w^0\$ の表示式は文献 9) の p. 243 に記されているので記載は省略する。(2)および(3)式より軸対称変形に対する歪み～変位関係式は

$$\epsilon_x^0 = \frac{du^0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^0}{dx} \right)^2, \quad \epsilon_\theta^0 = \frac{u^0}{x} + \frac{\cot \alpha}{x} w^0 \quad (10)$$

$$\kappa_x^0 = \frac{d^2 w^0}{dx^2}, \quad \kappa_\theta^0 = \frac{1}{x} \frac{dw^0}{dx} \quad (11)$$

と表わされるからこれに(9)式を代入して

$$\epsilon^0 = \mathbf{B}^0 \mathbf{d}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_n^0 \mathbf{d}^0, \quad \delta \epsilon^0 = \mathbf{B}^0 \delta \mathbf{d}^0 + \mathbf{B}_n^0 \delta \mathbf{d}^0 \quad (12)$$

となる。ここで \$\mathbf{B}^0\$ は線形項から導かれるものでその成分は \$x\$ の関数, \$\mathbf{B}_n^0\$ は非線形項から導かれるもので

$$\mathbf{B}_n^0 = \left[\left(\frac{dN_w^0}{dx} \mathbf{d}^0 \right) \frac{dN_w^{0T}}{dx} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad (13)$$

と書くことができる。

円錐流れ理論¹²⁾ の考えを導入すると, 殻の変形がないときの円錐表面上の静圧も動圧も \$x\$ に無関係に一定であるから, 一様内圧を考えると, 殻表裏の差圧 \$p\$ は一定値となる。円錐殻の変形に伴って作用する空気力には, この一定動圧を使った超音速2次元空気力を用いると^{1), 2)}, 外力 \$Z^0\$ は

$$Z^0 = p - q \frac{dw^0}{dx}, \quad q = \rho_c U_c^2 / \sqrt{M_c^2 - 1} \quad (14)$$

と表わされる。\$q\$ は修正動圧で、\$\rho_c, U_c, M_c\$ はそれぞれ円錐表面に沿って流れる空気の数値、速度、マッハ数を表わす。一様流の動圧 \$q_\infty\$ と衝撃波を通過した後の円錐表面上の修正動圧 \$q\$ の変換には円錐流れ理論を用いる。

(8), (9), (12), (14) 式を (6) 式に代入すると一つの要素について

$$\delta U^{0e} = 2\pi \sin \alpha \delta \mathbf{d}^{0T} [\mathbf{K}^{0e} \mathbf{d}^0 + q \mathbf{A}^{0e} \mathbf{d}^0 + \mathbf{K}_n^{0e} \mathbf{d}^0 - \mathbf{f}^{0e}] \quad (15)$$

を得る。ここで

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}^{0e} &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^{0T} \mathbf{D}^0 \mathbf{B}^0 x dx, \\ \mathbf{A}^{0e} &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}_w^{0T} \frac{d\mathbf{N}_w^0}{dx} x dx \\ \mathbf{K}_n^{0e} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\mathbf{B}_n^{0T} \mathbf{D}^0 \mathbf{B}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{0T} \mathbf{D}^0 \mathbf{B}_n^0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{B}_n^{0T} \mathbf{D}^0 \mathbf{B}^0 \right) x dx \\ \mathbf{f}^{0e} &= p \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}_w^{0T} x dx \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

で \$x_1, x_2\$ は要素境界の \$x\$ 座標、\$\mathbf{K}_n^{0e}\$ の成分は \$\mathbf{d}^0\$ の関数である。各要素についてこの仮想仕事を加え合わせ系全体について仮想仕事の原理 \$\delta U^0 = 0\$ を適用すると、全体の節点変位 \$\mathbf{u}^0\$ について

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{u}^0 + q \mathbf{A}^0 \mathbf{u}^0 + \mathbf{K}_n^0 \mathbf{u}^0 - \mathbf{f}^0 = 0 \quad (17)$$

となり、この連立方程式を解くことにより差圧 \$p\$ が作用する場合の超音速流中での静的な変位 \$\mathbf{u}^0\$ が定まる。

2.3 フラッタ 上記静的な軸対称変形からの振動変位を \$u^*\$ などと記し、\$u = u^0 + u^*\$, etc. なる変形状態を考える。これに伴い歪みや応力もそれぞれ \$\epsilon_x = \epsilon_x^0 + \epsilon_x^*\$, \$N_x = N_x^0 + N_x^*\$, etc. と表わす。この系についての仮想仕事は

$$\begin{aligned} \delta U^* &= \int_{L_1}^{L_2} \int_0^{2\pi} [(N_x^0 + N_x^*) \delta \epsilon_x^* \\ &\quad + (N_\theta^0 + N_\theta^*) \delta \epsilon_\theta^* + N_{x\theta}^* \delta \epsilon_{x\theta}^* \\ &\quad - (M_x^0 + M_x^*) \delta \kappa_x^* - (M_\theta^0 + M_\theta^*) \delta \kappa_\theta^* \\ &\quad - 2 M_{x\theta}^* \delta \kappa_{x\theta}^* - \{ X^* \delta u^* + \Theta^* \delta v^* \\ &\quad + (Z^0 + Z^*) \delta w^* \}] x \sin \alpha d\theta dx \end{aligned} \quad (18)$$

と表わされる。(2), (3) 式より歪み~変位関係式は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^* &= \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_\theta^* &= \frac{1}{x} \frac{\partial v^*}{\partial \phi} + \frac{u^*}{x} + \frac{\cot \alpha}{x} w^* + \frac{1}{2x^2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \phi} \right)^2 \\ \epsilon_{x\theta}^* &= \frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{v^*}{x} + \frac{1}{x} \frac{\partial u^*}{\partial \phi} + \frac{1}{x} \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$+ \frac{1}{x} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial \phi}$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x^* &= \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \\ \kappa_\theta^* &= \frac{1}{x} \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \phi^2} \\ \kappa_{x\theta}^* &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial w^*}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となり(7)式と同様に

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^* &= (\epsilon_x^* \quad \epsilon_\theta^* \quad \epsilon_{x\theta}^* \quad \kappa_x^* \quad \kappa_\theta^* \quad \kappa_{x\theta}^*)^T \\ \sigma^* &= (N_x^* \quad N_\theta^* \quad N_{x\theta}^* \quad -M_x^* \quad -M_\theta^* \quad -2M_{x\theta}^*)^T \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

を定義すると(4), (5) 式は線形関係であるから

$$\sigma^* = \mathbf{D} \epsilon^* \quad (22)$$

と表わすと \$\mathbf{D}\$ は \$6 \times 6\$ の定数マトリックスとなる。そこで \$\epsilon^0, \sigma^0\$ も \$\epsilon_{x\theta}^0 = 0\$ などの \$0\$ の値の要素を付加して(21)式と同様に \$6\$ 要素のベクトルに拡張して再定義すると(18)式は

$$\begin{aligned} \delta U^* &= \int_{L_1}^{L_2} \int_0^{2\pi} [\delta \epsilon^{*T} \sigma^0 - Z^0 \delta w^*] x \sin \alpha d\theta dx \\ &\quad + \int_{L_1}^{L_2} \int_0^{2\pi} [\delta \epsilon^{*T} \sigma^* - (X^* \delta u^* + \Theta^* \delta v^* \\ &\quad + Z^* \delta w^*)] x \sin \alpha d\theta dx \end{aligned} \quad (23)$$

と表わされる。

円錐殻の線形理論では円周方向変数 \$\theta\$ についての変位を Fourier 級数で表わすと、それぞれの波数 \$n\$ について独立して扱うことができることが知られているから、フラッタ問題の場合、変形も変形に伴う外力も円周方向に \$\cos n\theta\$ のように \$n\$ 波 (\$n=0\$ を含む) の波形で表わされることを考えて、要素内の変位を両端の変位値、\$\bar{u}, \bar{w}, \partial \bar{w} / \partial x, \bar{v}\$ からなる節点変位 \$\mathbf{d}^*\$ を用いると

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \bar{u}(x, t) \cos \mu \phi = \mathbf{N}_u \Phi \mathbf{d}^* \\ v^* &= \bar{v}(x, t) \sin \mu \phi = \mathbf{N}_v \Phi \mathbf{d}^* \\ w^* &= \bar{w}(x, t) \cos \mu \phi = \mathbf{N}_w \Phi \mathbf{d}^* \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

と表わされる。ここでマトリックス \$\Phi\$ は節点変位に対応して、\$\bar{u}, \bar{w}, \partial \bar{w} / \partial x\$ に関する成分には \$\cos \mu \phi\$, \$\bar{v}\$ に関する成分には \$\sin \mu \phi\$ を対角成分として持つ対角マトリックスで、また \$\mu = n / \sin \alpha\$ である。\$\bar{u}, \bar{v}\$ は \$x\$ につき 1 次式、\$\bar{w}\$ は \$x\$ につき 3 次式を仮定すると \$\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_w\$ の式はそれぞれマトリックスの大きさを拡張した \$\mathbf{N}_x^0, \mathbf{N}_\theta^0\$ と同じになる。\$\mathbf{N}_v\$ も配列順序が変わっているだけで本質的には \$\mathbf{N}_x^0\$ と同じである†。(12) 式と同様に(19), (20) 式より

$$\epsilon^* = \mathbf{B} \mathbf{d}^* + \frac{1}{2} \mathbf{B}_n \mathbf{d}^*, \quad \delta \epsilon^* = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}^* + \mathbf{B}_n \delta \mathbf{d}^* \quad (25)$$

と書くことができ、ここで \$\mathbf{B}\$ は(19)式の線形項およ

† 文献 9) の旧版 p. 144 参照のこと。

よび(20)式から構成され、 B_n は(19)式の実線形項から出てくるものである。上記のように N_w^0, N_w^0 を拡張再定義すると

$$N_u = N_u^0, N_w = N_w^0 \quad (26)$$

であるから(10), (11), (19), (20), (24)式より

$$B = (B^0 + B_n^0)\phi + B' \quad (27)$$

となる。ここで B^0, B_n^0 は(12)式の B^0, B_n^0 を 6×8 に拡張したものであり、 B' は B の成分のうち $\varepsilon_{x\theta}^*$, $\kappa_{x\theta}^*$ に対応する項および $\varepsilon_\theta^*, \kappa_\theta^*$ の変位表示式の ϕ についての微分項からでてくる成分を示す。(25), (27)より

$$\delta \varepsilon^{*T} = \delta d^{*T} [\phi (B^0 + B_n^0)^T + B'^T + B_n^T] \quad (28)$$

と表わすことができるからこれを(23)式に代入すると、一要素について

$$\begin{aligned} \delta U^{*e} = & \delta d^{*T} \iint \phi [(B^0 + B_n^0)^T \sigma^0 \\ & - N_w^0 Z^0] x d\phi dx \\ & + \delta d^{*T} \iint B'^T \sigma^0 x d\phi dx \\ & + \delta d^{*T} \iint B_n^T \sigma^0 x d\phi dx \\ & + \iint [\delta \varepsilon^{*T} \sigma^* - (X^* \delta u^* + \Theta^* \delta v^* \\ & + Z^* \delta w^*)] x d\phi dx \end{aligned} \quad (29)$$

となる。このうち第1項は全要素について合成すると軸対称圧についての釣り合式(17)により消えるものであり、第2項も B' の成分で $\varepsilon_{x\theta}^*, \kappa_{x\theta}^*$ に対応する項はそれと対応する σ^0 の成分が0のため消え、また $\varepsilon_\theta^*, \kappa_\theta^*$ の ϕ についての微分項に対応する成分も σ^0 が ϕ に無関係だから ϕ について積分することにより消える。第3項は(19), (20), (25)より B_n^T が

$$\begin{aligned} B_n^T = & \left[\cos^2 \mu \phi \left(\frac{dN_w}{dx} d^* \frac{dN_w}{dx} \right)^T \right. \\ & \sin^2 \mu \phi \left(\frac{\mu^2}{x^2} N_w d^* N_w \right)^T \\ & - \sin \mu \phi \cos \mu \phi \frac{\mu}{x} \left(\frac{dN_w}{dx} d^* N_w \right. \\ & \left. \left. + N_w d^* \frac{dN_w}{dx} \right)^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \end{aligned} \quad (30)$$

と表わされるから

$$\begin{aligned} \delta d^{*T} \iint B_n^T \sigma^0 x d\phi dx \\ = \pi \sin \alpha \delta d^{*T} \left[\left[N_x^0 \frac{dN_w^T}{dx} \frac{dN_w}{dx} \right. \right. \\ \left. \left. + N_\theta^0 \frac{\mu^2}{x^2} N_w^T N_w \right] x dx d^* \right. \\ \left. \equiv \delta d^{*T} K_e \cdot d^* \right] \end{aligned} \quad (31)$$

となる。第4項については d^* が微小変形として d^*

についての非線形項を省略すると(29)式は結局次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta U^{*e} = & \delta d^{*T} (K^e + K_{e^*}) d^* \\ & - \iint (X^* \delta u^* + \Theta^* \delta v^* + Z^* \delta w^*) x d\phi dx \end{aligned} \quad (32)$$

$$K^e = \iint B^T D B x d\phi dx \quad (33)$$

殻に作用する付加外力(慣性力と空気力)は空気力を準定常二次元空気力で近似して

$$\left. \begin{aligned} X^* = & -\rho h \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = -\rho h \cos \mu \phi N_u d^* \\ \Theta^* = & -\rho h \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} = -\rho h \sin \mu \phi N_v d^* \\ Z^* = & -\rho h \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - q \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{1}{U_e} \frac{M_e^2 - 2}{M_e^2 - 1} \frac{\partial w^*}{\partial t} \right) \\ = & -\rho h \cos \mu \phi N_w d^* - q \cos \mu \phi \frac{dN_w}{dx} d^* \\ & - \frac{q}{U_e} \frac{M_e^2 - 2}{M_e^2 - 1} \cos \mu \phi N_w d^* \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left(\cdot = \frac{d}{dt}, t \text{ は時間} \right)$$

と表わされる。 ρ は殻の密度を表わす。これらを(32)式に代入すると

$$\delta U^{*e} = \delta d^{*T} [(K^e + K_{e^*} + q A^e) d^* + C^e d^* + M^e d^*] \quad (35)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A^e = & \pi \sin \alpha \int N_w^T \frac{dN_w}{dx} x dx \\ C^e = & \frac{q}{U_e} \frac{M_e^2 - 2}{M_e^2 - 1} \pi \sin \alpha \int N_w^T N_w x dx \\ M^e = & \rho h \pi \sin \alpha \int (N_u^T N_u + N_v^T N_v \\ & + N_w^T N_w) x dx \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

で A^e, C^e は空気力のマトリックス、 M^e は質量マトリックスである。要素を加え合わせ系全体について仮想仕事の原理を適用すると全体の節点変位ベクトル u^* に対する振動方程式

$$(K + K_e + q A) u^* + C \dot{u}^* + M \ddot{u}^* = 0 \quad (37)$$

が導かれる。 A は非対称となる。

静的な問題の場合(37)式より

$$|K + K_e + q A| = 0 \quad (38)$$

が安定限界を与える式として導かれる。この根は、 q 一定として外圧 ($-p$) を増したとき得られる限界値が空気力作用下での座屈圧力で、一方圧力を一定に保って q を増したとき得られる限界値がダイバージェンス動圧である。(37)式の解を

$$u^* = \bar{u} \cdot e^{i\omega t} \quad (39)$$

として代入すると次式を得る。

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_s + q\mathbf{A} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (40)$$

自明でない解をもつための条件よりフラッタ方程式を得る。フラッタ振動モードは円周方向波数が多く面外振動が支配的となり、殻の面内方向慣性力の寄与分が小さいことを考えて $\mathbf{M}^s$ の式で $\mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s, \mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v$ の項を省略すると

$$\mathbf{C} = \gamma \mathbf{M} \quad (41)$$

の関係が導かれる。 γ は(36)式から導かれる空気力の減衰係数で、これを使うと(40)式は

$$\left\{ \begin{aligned} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_s + q\mathbf{A} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{M})\bar{\mathbf{u}} &= 0 \\ \frac{1}{\lambda} &= \omega^2 - i\gamma\omega \end{aligned} \right. \quad (42)$$

となり実非対称マトリックス $(\mathbf{K} + \mathbf{K}_s + q\mathbf{A})^{-1}\mathbf{M}$ の複素固有値 λ を求める問題に帰着する。ある動圧 q に対して(42)式の固有値を二段 QR 法⁹⁾を用いて解き、求められた ω の虚数部が負になるときフラッタを起こすと判定する。得られる固有値 λ は共役複素数だから

$$\lambda = \lambda_R \pm i\lambda_I \quad (\lambda_I \geq 0) \quad (43)$$

と記すとフラッタ判定条件は簡単な代数計算により $\lambda_R > 0$ のとき

$$\gamma < \lambda_I / (\sqrt{\lambda_R} |\lambda|) \quad (44)$$

であることが導かれる。なお $\lambda_R < 0$ の場合はすべて不安定な解である。

実際の計算では(42)式の固有値を求める際に $\bar{\mathbf{u}}$ のうちの面内変位等に対応する自由度の縮約⁹⁾を行なう。すなわちベクトル $\bar{\mathbf{u}}$ を消去しようとする自由度 $\mathbf{u}_2$ と残りの自由度 $\mathbf{u}_1$ とに

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

と分けて表わすと、それに対応して

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_s)\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \quad (46)$$

と書かれる。そこで(42)式から

$$\mathbf{K}_{12}^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{22} \mathbf{u}_2 = 0 \quad (47)$$

なる近似式を導いて

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{L}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{L} = -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{12}^T \quad (48)$$

と $\mathbf{u}_2$ を $\mathbf{u}_1$ で表わす。(42)式の前から $\delta\bar{\mathbf{u}}^T$ を掛けたい式の $\bar{\mathbf{u}}, \delta\bar{\mathbf{u}}^T$ に

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{u}_1 \quad (\mathbf{I} \text{ は単行行列}) \quad (49)$$

を代入すると $\delta\mathbf{u}_1^T$ の係数から

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_s + q\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} - \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}^T \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \right\} \mathbf{u}_1 = 0 \quad (50)$$

が導かれ、固有値を求めるマトリックスの次元は縮小

される。

3. 計算結果

3.1 計算精度の検討 まず計算プログラムの検討と分割数および縮約の仕方による精度の違いをみるために固有振動とフラッタについて参照する解のある二つの例題について計算を試みた。固有振動は文献 10)にある小径端固定、大径端自由の 120° 円錐台について 5~20 等分割で精度の検討を行なった。結果は第1表および第2図に示す。各節点の自由度は4であるが固有値を求める段階で縮約を行ない各節点で u, v と dw/dx を消去し w のみを残しているため分割数を N とすると境界条件を考慮して最終的な自由度は $4N$ から N に減少している。この軸方向一次の固有振動数では 15 分割と 20 分割とを比較するとその差は 3% 以下であるから 15 分割で十分収束していると考えられる。また 20 分割で1つおきに縮約して 10 自由度にしたものと 20 自由度との差は極めて少なく、縮約

第1表 円錐台の固有振動数 (Hz) の分割数による変化

n	NAU-MANN*	5分割 5自由度	10分割 10自由度	15分割 15自由度	20分割 20自由度	20分割 10自由度
2	41.8	50.0	43.9	42.7	42.2	42.3
3	23.4	32.7	25.7	24.4	23.9	24.0
4	18.4	26.9	20.4	19.3	18.9	19.0
5	21.1	27.1	22.3	21.7	21.5	21.5
6	26.9	30.6	27.6	27.2	27.1	27.1
7	33.6	36.3	34.1	33.9	33.8	33.8
8	41.0	43.3	41.5	41.3	41.2	41.2
9	49.2	51.6	49.7	49.5	49.4	49.4
10	58.1	60.8	58.7	58.4	58.3	58.4

* 文献 10) より引用

第2図 120° 円錐台の固有振動数の分割数による変化

による誤差は十分小さいと考えられる。ここで引用している NAUMANN の RAYLEIGH-RITZ 法による解は NOVOZHILOV 型¹⁰⁾ の殻理論を用いているため本計算と完全に一致する性質のものではない。フラッタについての例題は文献 1) にある半頂角 5° 、両端単純支持 (面内力は $N_x=v=0$) の円錐殻について計算を行った。結果を第2表および第3図に比較して示す。DIXON らの解析はモード法で、流れの方向のモードを n 項の正弦波の和で表わし面内力に対して応力関数を用いて適合条件をみたすように求め平衡方程式にはガラーキン法を適用する方法で、4~12 項近似の場合の数値計算結果を示している。図の横軸で括弧のない数値は要素数で括弧内は DIXON らの用いた項数である。フラッタ問題では系が非保存系となるためモード

第3図 円錐殻のパネルフラッタ限界値の分割数による変化 (縦軸: 無次元動圧, 横軸: 分割数および Dixon の近似項数, $\alpha=5^\circ$, $l/r=8.13$, $r/h=148$, 両端単純支持)

法の解の上界性はない。DIXON らの 12 項近似と本論文の 20 分割近似の解は各円周方向波数において極めて良く一致している。この図より円錐殻のパネル・フラッタ計算では 20 分割で十分な精度をもつといえる。各分割数での自由度はこの例題についても各節点で w のみに縮約してあるため全体の自由度は $N-1$ である。また 20 分割で黒く塗り潰してある印はさらに w を一つおきに縮約した場合の結果を示し、自由度は 10 である。この自由度がガラーキン法 12 項近似の自由度より少ないことは注目に値する。そこで以下の計算では 20 要素に分割、縮約して 10 自由度を用いた。

3.2 外圧による座屈およびフラッタ 以下第4図に示す著者らの実験模型 (実験は第2報に記す) の円錐殻についての計算結果を示す。第5図(A)は板厚 0.05 mm の円錐殻の固有振動数に対する差圧の影響を表わしている。圧力 p は内圧の場合を正にとっているが内圧によって振動数は高くなり外圧があることによって下がる。また下がるとともに最低次の振動数の円周方向波数は多くなっている。これらの傾向は WEINGARTEN¹¹⁾ の結果と一致している。外圧を増加させるとある所で振動数は虚数となり解は発散解となる。すなわち外圧による座屈を起こす。第5図(B)に示すように ω^2 の値を圧力に対してプロットするとよく直線にのり、その直線と $\omega^2=0$ の横軸と交わる点が座屈値として求まる。これより座屈モードは $n=16$ で $p_{cr}=-0.0439 \text{ kg/cm}^2$ であることが見出される。またこの場合は $n=15$ でもほぼ等しい値となってい

第4図 両端固定円錐殻 ($E=1.28 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-2}$, $\nu=0.25$, $h=0.03 \sim 0.06 \text{ mm}$)

第2表 フラッタ限界値の比較 (両端単純支持)

周方向波数 n	DIXON & HUDSON ¹¹⁾ (12 項近似)	本 解 析				
		5 分 割 (4 自由度)	10 分 割 (9 自由度)	15 分 割 (14 自由度)	20 分 割 (19 自由度)	20 分 割 (10 自由度)
4	1,074	>1,380	1,300	1,130	1,080	1,082
5	590	>1,380	738	636	605	609
6	607	1,330	700	636	616	625
7	652	>1,380	821	710	675	695

第5図(A) 円錐殻の固有振動数，差圧による変化
(横軸：円周方向波数)

第5図(B) 外圧による座屈値 ($n=16$)
(ω^2 の単位は $(\text{rad/sec})^2$)

る。板厚 $h=0.03 \text{ mm}$ では $p_{cr}=-0.0124 \text{ kg/cm}^2$ ($n=17, 18$), $h=0.07 \text{ mm}$ では $p_{cr}=-0.101 \text{ kg/cm}^2$ ($n=14$) である。

第6図は圧力 $p=0$ のときのフラッタ限界値の板厚による変化を示す。図中の数値 19 などはフラッタ・モードの円周方向波数，括弧内の数値 1,910 などはフラッタ振動数をヘルツで示したものである。当然予想されるように板厚の増加とともにフラッタ限界値は高くなってフラッタは起こりにくくなりフラッタ振動数も高くなっている。なお本論文で用いられている衝撃波後流の円錐表面上の修正動圧 q と衝撃波前方一様流中の動圧 $q_\infty = (1/2)\rho_\infty U_\infty^2$ との関係は，円錐流れ理論¹²⁾より $M_\infty=2$ で半頂角 $\alpha=14^\circ$ の場合 $q=1.56 q_\infty$ で与えられる。 q_∞ に換算した座標を図中右に示す。ここで $\rho_\infty, U_\infty, M_\infty$ はそれぞれ衝撃波前方の一様流の

第6図 円錐殻のパネルフラッタ限界値，
板厚による変化 ($p=0$)

第7図 円錐殻のパネルフラッタ限界値，
差圧による変化

密度，速度，マッハ数を示す。

第7図は差圧によるフラッタ限界値の変化を示している。フラッタ限界値は内圧がかかると高くなり外圧がかかると低くなる。この板の気流のないときの外圧による座屈値は $p=-0.0439 \text{ kg/cm}^2$ であるがこの付近までの外圧によるフラッタ限界値の低下は $p=0$ の

ときの約 12% であまり大きく変化しない。しかしフラッタ振動数は 30% 程減少していることがわかる。また圧力によってフラッタ限界となる円周方向波数もわずかわわっている。

4. 結 論

円錐殻の超音速パネル・フラッタ限界値を有限要素法によって求める方法を提案し、具体例について数値計算を行なって次の結論を得た。

1) 20 要素に分割、縮約を行なって 10 自由度にする程度で十分精度の良い値が得られ、どのような境界条件をも扱うことができ、かつ計算プログラムはモード法の場合よりも簡単なので、円錐殻のパネル・フラッタ限界値を求める方法として有限要素法が非常に有効な手段であると考えられる。

2) 半頂角 14° の円錐殻について固有振動に対する差圧の影響、外圧による座屈値、フラッタ限界値、および差圧のフラッタ限界値に対する影響などを明らかにすることができたものと考えられる。フラッタ限界値に対し、内圧はフラッタ動圧を高め、外圧は下げるが、本論文の計算例では座屈を起す外圧よりもわずかな小さい外圧で、圧力の作用していない場合のフラッタ動圧よりも 12% 低下する程度である。

なお第2報に風洞実験結果と本解析法による計算値との比較を示す。

参 考 文 献

- 1) DIXON, S.C. & HUDSON, M.L.: Flutter, Vibration and Buckling of Truncated Orthotropic Conical Shells with Generalized Elastic Edge Restraint, NASA TN D-5759, 1970.
- 2) LIBRESCU, L., VASILIEV, G.V. & BADOIU, Tr.: Super-

sonic Flutter of Truncated Multilayered Orthotropic Conical Thin Shells, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl., Tome 18, N° 1, 1973, pp. 127-160.

- 3) DIXON, S.C. & HUDSON, M.L.: Supersonic Asymmetric Flutter and Divergence of Truncated Conical Shells with Ring-Supported Edge, NASA TN D-6223, 1971.
- 4) MISERENTINO, R. & DIXON, S.C.: Vibration and Flutter Test of A Pressurized Thin-Walled Truncated Conical Shell, NASA TN D-6106, 1971.
- 5) OLSON, M.D.: Some Flutter Solutions Using Finite Elements, AIAA J. Vol. 8, No. 4, 1970, pp. 747-752.
- 6) BON, C. & GARADIN, M.: On The Numerical Solution of Large Eigenvalue Problems Arising in Panel Flutter Analysis by The Finite Element Method, Computers & Structures, Vol. 4, 1974, pp. 1223-1250.
- 7) SEIDE, P.: A Donnell Type Theory for Asymmetrical Bending and buckling of Thin Conical Shells, J. Appl. Mech., Vol. 24, 1957, pp. 547-552.
- 8) PARLETT, B.N.: The LU and QR Algorithms, Mathematical Methods for Digital Computers, Vol. 2, John Wiley & Sons' Inc., New York, 1967.
- 9) ZIENKIEWICZ, O.C.: The Finite Element Method in Eegineering Science, McGraw-Hill, London, 1971.
- 10) ADELMAN, H.M., CATHARINES, D.S. & WALTON, W.C., Jr.: A Method for Computation of Vibration Modes and Frequencies of Orthotropic Thin Shells of Revolution Having General Meridional Curvature, NASA TN D-4972, 1969.
- 11) WEINGARTEN, V.I.: The Effect of Internal or External Pressure on the Free Vibrations of Conical Shells, Int. J. Mech. Sci., Vol. 8, 1966, pp. 115-124.
- 12) KRASNOV, N.K.: Aerodynamics of Bodies of Revolution, American Elasevier Pub., New York, 1970.