有限要素法による矩形板の2次座屈解析*
A Secondary Buckling Analysis of a Rectangular Plate
 by the Jeinite Element Method

平 田 隆 教**
 Takamori HIRATA

Abstract

The purpose of this paper is to describe the secondary buckling analysis of rectangular plates under axial compression by the finite element method. This method, which is proposed by the author et al., is a kind of lagragian formulation, and is very convenient for the nonlinear analysis of beams and plates.

In this paper, as typical examples of this method, the results of uniformly compressed square plates with four types of boundary conditions is presented. In detail, the post-buckling path of the square plates is calculated, and also the secondary buckling value and the deformation mode are calculated, which is obtained when the deformation after the buckling becomes large and unstable again.

Finally, this method is available for the analysis of rectangular plates with initial imperfection or reinforced members, but is not used for such cases in this paper because of the shortage of page.

1. は し が き

1軸圧縮荷重を受ける矩形板は、1次座屈後も耐荷能力を持つことが SCHUMANN¹⁾らの実験、あるいは SCHNADEL²⁾の理論計算により明らかとなり、KÁRMÁN³⁾らによる有効幅の理論が生まれた。その後、MARGUERRE⁴⁾らがこの問題に対して有限変形理論を適用し、エネルギー法を用いて近似計算したのに端を発し、数多くの研究^{5)~8)}がなされている。また最近では、矩形板は1次座屈後も耐荷能力をもつが、荷重の増加とともに再び不安定となり、さらに高次の波形へと座屈する現象(2次座屈)が注目され、STEIN⁹⁾により棒とバネ系のモデルで解析された。その後、エネルギー水準を考え、2次座屈前後の基準波形と高次波形とで等しくなる軸圧縮応力値が存在することから、2次座屈現象の可能性を説明した近藤、林の研究¹⁰⁾、全ポテンシャル・エネルギーの第2変分による植村の

方法¹¹⁾を用いて、2次座屈の必然性を座屈後の平衡状態の安定判別から解析した植村、辺の研究¹²⁾がある。さらに微小撓乱波形を多数項で表わし、初期撓みの影響をも含めて解析し、実験結果と比較した辺、植村の研究¹³⁾もある。その他1軸圧縮以外の場合では、フラッター解析から2次座屈現象の必然性を説明した小林の研究^{14)~15)}があり、また初期撓みがある値になると、2次座屈の起こりうることを説明した SUPPLE の研究¹⁶⁾もある。

さて、本論文では筆者らの提案した^{17)~19)}有限要素法による方法を用いて、矩形板の2次座屈現象について検討を行うこととするが、その特色は次の4つ、すなわち、

- (1) 従来の解析的研究では、微小撓乱波形の与え方に限界があり、必ずしも最小の2次座屈値が求められないが、本論文の方法ではこの点が大幅に改良される。
- (2) 境界条件が複雑な場合でも適用できる。
- (3) 初期撓み、および補強材がある場合も極めて簡単である。
- (4) 2次座屈後の平衡状態も求められる。

にある。

2. 矩形板の1次座屈後の様相と2次座屈現象

ここでは、1軸圧縮荷重を受ける矩形板の1次座屈後の平衡曲線を求めるとともに、座屈後の変形がかなり大きくなると再び不安定となり、2次座屈現象が起こることについて述べる。この場合、境界条件としては次の4つ、すなわち、

- (a) 周辺が固定であり、面内境界条件としては、断面力 N_{yy} が $y=b/2, -b/2$ で $N_{yy}=0$ の場合(第1図)。
- (b) 周辺が固定であり、面内境界条件としては y 方向の変位 v_y が $y=b/2, -b/2$ で $v_y=0$ の場合。
- (c) 周辺が単純支持で、面内境界条件が(a)の場合。
- (b) 周辺が単純支持で、面内境界条件が(b)の場合。

* 昭和50年11月7日日本航空宇宙学会西部支部において講演、昭和51年5月20日原稿受理

** 東洋工業株式会社

第1図 1軸圧縮荷重を受ける矩形板 (周辺が固定で面内境界条件が $N_{yy}=0$ の場合)

合.

とし、断面力 N_{xy} は (a), (b), (c), (d) とともに $x=a/2, -a/2$, および $y=b/2, -b/2$ で $N_{xy}=0$ とする。

また、荷重条件としては、荷重辺の変位が一定の条件を用いることとする。

なお、板要素の分割数としては、1次座屈値の精度と計算時間を考慮して、 16×16 分割とするが、1次座屈波形、および2次座屈波形が y 方向には対称性を有するため、上半分で計算を行った。

2.1 1次座屈後の平衡曲線 ここでは、前述した各種の境界条件 ((a), (b), (c), (d)) の下での1次座屈後の平衡曲線、および撓み波形の変化、断面力の変化等について述べる。この場合、荷重の無次元量としては、平均軸応力 $\sigma = (P/bt)$ を無次元化した

$$\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_e$$

を用いることとする。ここで σ_e は、

$$\sigma_e = E\pi^2 t^2 / 12(1-\nu^2)b^2$$

である。また、変位 (w) の無次元量としては、

$$\bar{w} = w/t$$

を用いることとする。なお、 w_0 は中央点の変位の無次元量を表わす。

(a)の場合 周辺が固定で、面内境界条件が $N_{yy}=0$ の場合には、1次座屈値 (第2図の●印) $\bar{\sigma}_{cr}$ が $\bar{\sigma}_{cr}=9.62$

となり、座屈後の平衡曲線は第2図の(a)如く求められた。また、第2図の①, ②, ③点での中央断面 ($x=0$, および $y=0$) 上の撓み波形の変化が第3図に、 $x=0, -a/4, -a/2$ での断面力 ($\bar{N}_{xx}=N_{xx}/\sigma_e t$) の変化が第4図に示されている。

(b)の場合 周辺が固定で、面内境界条件が $v_y=0$ の場合には、1次座屈値 $\bar{\sigma}_{cr}$ が

$$\bar{\sigma}_{cr}=7.9$$

となり、座屈後の平衡曲線は第2図の(b)の如くなった。またこの場合には、第2図の平衡曲線 (a), (b) が接近していることから分かる如く、撓み波形の変

第2図 1次座屈後の平衡曲線

第3図 撓み波形の変化 ((a)の場合)

第4図 断面力の変化 ((a)の場合)

化、および断面力の変化は前述した第3図、および第4図とほとんど同様であった。

(c)の場合 周辺が単純支持で、面内境界条件が $N_{yy}=0$ の場合には、1次座屈値 $\bar{\sigma}_{cr}$ が

$$\bar{\sigma}_{cr}=3.96$$

となり、座屈後の平衡曲線は第2図の(c)の如くなった。また、第2図の①, ②, ③, ④, ⑤点での中央断面の撓み波形の変化が第5図に、断面力の変化が第6図に示されている。この場合には、撓み波形および断面力の変化とともに、(a), (b)の場合と著しく異なり、座屈後にかなりの大変形を起こすこととなった。

第5図 撓み波形の変化 ((c)の場合)

第6図 断面力の変化 ((c)の場合)

第7図 撓み波形の変化 ((d)の場合)

(d)の場合 周辺が単純支持で、面内境界条件が $v_y=0$ の場合には、1次座屈値 σ_{cr} が $\sigma_{cr}=3.09$

となり、座屈後の平衡曲線は第2図の(d)の如くなった。また、第2図の①、②、③、④点での中央断面上の撓み波形の変化は第7図の如くなり、(a)、(b)、(c)の場合とは著しく異なる結果となった。しかし、断面力の変化は(c)の場合と同様の結果が得られた。

2.2 2次座屈値と座屈波形 第2図に示された1次座屈後の平衡曲線は安定であるが、変形が大きくなると、 $\bar{D}$ および $\bar{D}^*$ (全剛性マトリックスの Determinant) が減少し (第8図)、 $\bar{D}=\bar{D}^*=0$ となると再び不安定となり、2次座屈を起こすこととなる。

各種境界条件での2次座屈値 σ_{cr} (第2図の×印)

第8図 $\bar{D}$ & $\bar{D}^*$ の変化 ($N_{yy}=0$ の場合)

第9図 2次座屈波形 ((a)の場合)

第1表 2次座屈値と座屈波形

周辺条件	固定	単純支持
面内条件		
$N_{yy}=0$	17.2 (2半波1半波)	28.1 (x, y 方向共3半波と1半波の重畳した波形)
$v_y=0$	17.8 (2半波1半波)	18.8 (同上)

および座屈波形 (第9図、第10図の破線) が第1表に示されている。

なお、(d)の場合には $\bar{D}=0$ となるが、 $\bar{D}^*\neq 0$ となり(a)、(b)、(c)の場合の如く分岐座屈タイプではなく、飛び移り座屈タイプの2次座屈現象を呈した。

計算結果の検討 周辺が固定の場合には、面内境界条件が $N_{yy}=0$ (a)、 $v_y=0$ (b)の場合ともに、2半波1半波の典型的な2次座屈を起こした (第9図)。

また、2次座屈値は $v_y=0$ の場合が少し高くなり、1次座屈値とは全く逆の結果となったが、これは $v_y=0$ の場合には2軸圧縮荷重が作用することとなり、1半波1半波 (1次座屈波形) は起こり易いが、2半波1半波 (2次座屈波形) は起こりにくくなるためと思われる。

周辺が単純支持の場合は、面内境界条件が $N_{yy}=0$ (c)、 $v_y=0$ (d)の場合ともに、3半波と1半波の重畳波形の2次座屈を起こした (第10図)。

また、2次座屈値は周辺固定の場合に比べて高くなり、1次座屈値とは全く逆の結果となったが、これは

第10図 2次座屈波形 ((c)の場合)

周辺が単純支持の場合には、1半波1半波は起こり易いが、座屈後の大撓み変形状態での曲げ変形も大きくなるため、周辺が固定の場合の如く2半波1半波とはなりにくく、より高次の3半波と1半波の重量波形で2次座屈を起こすためと思われる。

周辺が単純支持の場合には、 $N_{yy}=0$ の場合の方が $v_y=0$ の場合より2次座屈値が高くなったが、これは1次座屈値の場合と同様であり、 $v_y=0$ の場合には2軸圧縮荷重を受けるため、1半波1半波、および3半波と1半波の重量波形共に起こり易くなるものと思われる。

また、周辺が単純支持で、 $v_y=0$ の場合(d)には、(a), (b), (c)の場合とは全く異なり、分岐座屈タイプではなく飛び移り座屈タイプの2次座屈現象を呈したが、これは、3半波と1半波の重量波形が極めて起こり易いために、わずかの計算誤差からくる攪乱撓みにより、分岐座屈現象が起こらず、飛び移り現象になるものか、あるいはまた、理論的な現象であるかについてはまだ明らかではなく、さらに詳細な研究が必要と思われる。この点については続報で述べる初期撓みを有する矩形板の2次座屈現象についての研究で明らかとしたい。

3. 結 び

本論文では有限要素法を用いて、矩形板の1次座屈後の平衡曲線を求めるとともに、座屈後の変形がかなり大きくなると再び不安定となり、2次座屈現象を起こすことが分かった。

また、本論文の方法では、境界条件の複雑な場合、あるいは初期撓み、および補強材のある場合にも、容

易に適用でき、良好な結果が得られたがここでは割愛した。

終わりに臨み、本研究の御指導をいただいた東大宇宙航空研究所、植村益次教授に厚く感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) L. SCHUMANN and G. Back: Strength of Rectangular Flat plates under Edge Compression, NACA TR No. 356, 1930.
- 2) G. SCHNADEL: Über die Knickung von Platten, Jb. Schiffbt. Ges. 30 (1929), S. 170-194.
- 3) Th. V. KÁRMÁN, E. E. SECHLER and L. H. DONNELL: The Strength of thin plate in Compression, Trans. ASME, 54, 1932, p. 53-56.
- 4) K. MARGUERRE: Die Mittragende Breite der gedrückten platte, Lufo., Bd. 14, Nr. 3, 1937.
- 5) 鶴野正敬: 平板の大撓み、圧縮板とその有効幅、航空学会誌, 6 (1939), p. 589-607.
- 6) H. L. Cox: The Buckling of Thin Plate in Compression, R. & M., A. R. C., No. 1554, 1933.
- 7) N. J. HOFF: Instability of Monocoque Structures in pure Bending, J. Róy. Aero. Soc., 42, 1938, p. 291-346.
- 8) 吉村慶丸: 圧縮された矩形平板の超安定限界状態の逐近似解法, 東大理工研報告, 2, 9 (1949).
- 9) M. STEIN: NASA TR 39.
- 10) 近藤恭平, 林毅: 平板の2次座屈について, 東大理工研報告, 2, 9 (1949).
- 11) 植村益次: 日本機械学会論文集, 26巻164号, 30巻215号, 35巻276号.
- 12) 植村益次, 辺 吾一: 第13回構造強度に関する講演論文集前刷, 1972.
- 13) 辺 吾一, 植村益次: 平板の1軸圧縮による2次座屈現象の検討, 日本機械学会, 第50期全国大会講演前刷, No. 720-10, 1972.
- 14) 小林繁夫, 浅井貞重: 周辺固定矩形板の超高速パネルフラッター限界値, 日本航空宇宙学会誌, 16, 174 (1968), p. 10.
- 15) S. KOBAYASHI: Flutter of Simple Supported Rectangular Panels in a Supersonic Flow., Trans. JAS Vol. 5, No. 8, 1962.
- 16) W. J. SUPPLE: Int. J. Solid Stru., Vol. 6.
- 17) 平田隆教, 白沢和夫: 有限要素法による円形アーチの非線形解析, JSSC, 第7回大会研究集会論文集, 1973, p. 341.
- 18) 平田隆教: 有限要素法による梁及び板の非線形解析, 日本機械学会論文集, 42巻357号, 1976, p. 1365.
- 19) 平田隆教: はりおよび板殻の座屈安定解析, 日本機械学会誌, 79巻691号, 1976, p. 539.