航空機構造模型の振動*

On the Natural Vibration of the Aircraft Structural Models

堀 武 敏**・小 松 敬 治**

Taketoshi HANAWA, Keiji KOMATSU

Abstract

In this paper the authors applied an analytical method, which was used in the previous paper, Jour. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 15, No. 162, by means of the well-known Rayleigh-Ritz's procedure, to the analysis of the natural vibration characteristics of the aircraft structural models.

General analytical equations were formulated for these. Numerical examples were considered for models consisting of combination beam and cantilevered built-up wings, applying the formula to these special cases and a model consisting of a cylindrical fuselage and built-up wings with an aspect ratio of about 7.

At the same time, vibration test of these models were carried out. Comparisons of both results showed that there were fairly good correlations between them, though there are some troubles, which were examined numerically, in

the calculation of eigenvalues.

It is concluded that this analytical method cannot be overlooked, as it is one of the most suitable ways of predicting vibration characteristics of these structures in the earlier design phase, although the powerful finite element method is widely applied to these complicated or real airplane structures.

まえがき

通常の旅客機のように比較的アスペクト比の大きな構造翼と胴体との結合した系を想定した模型の対称および逆対称振動の数値解析と実験とをおこなったので、二三未解決の点もあるが数値解析を中心にしてまとめた。

片持構造翼の場合の振動については古くから多数の研究者¹⁾によって詳しく研究されているが、ここでは系全体の振動²⁾を中心にして吟味したものである。

第1図 梁結合航空機模型の解析用諸寸法定数

* 第15回構造強度に関する講演会, 昭和48年7月に発表, 昭和51年6月17日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所

解析は前回⁹⁾と同様に翼と胴体とを含む $x-y$ 平面を考え、この平面の撓みを仮定し、これより、ある定められた位置の線分上に断面定数があると考えられる胴体および翼の曲げと振りに関するエネルギーを計算し、エネルギー法によって振動数と振動モードを求めた。(第1図)

実験は共振法によって固有振動数と振動モードを求めて数値解析結果と比較した。

取り扱った系および問題は次の4種類である.

- (1) 第2図に示すような板厚 5 mm, 幅 30 mm の等厚梁の結合した系を考え, 胴体厚が翼板厚の2倍, 3倍と変化したときの系と, 翼と胴体が等厚で翼の後退角を変化させた系との固有振動数と振動モードの変化を数値的に求めた. 胴体厚を変化した系以外のものについては実験をおこない, 解析値と比較した.

第2図 等厚梁結合模型寸法

材料：アルミ合金

第4図 エンジン部模型寸法，（ ）は大型模型寸法

第5图 变厚片持構造翼寸法

第3図 変厚構造翼と胴体結合模型寸法

第1表 計 算 式

記	号
$w(x, y)$: 系の z 方向のたわみ関数	a : 胴体基準長, ここでは第2図で翼付根より胴体後端までを a とした
a_{mn} : $w(x, y) = \sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n$, 試験関数の $x^m y^n$ の係数, 添字 m, n は x^m, y^n の指数 m, n に対応することを示す	T_3 : 翼の曲げによる運動エネルギー
V_3 : 翼の曲げによるひずみエネルギー	ω : 角振動数
E_w, E_B : 翼材および胴体材の縦弾性係数, 材料はどこも同じとし, もし材料定数の異なる部分は断面2次モーメントの方にしむよせする	$\rho_w A_w, \rho_B A_B$: 翼および胴体の単位長さ当りの質量 $\rho_w A_w = \rho_w A_w(t)$
t : 翼の中心軸	$\rho_w A_{wm}, \rho_B A_{Bm}$: 翼および胴体の単位長さ当りの最高質量
L : 翼の中心軸の長さ	$\rho_z A_{wi}, \rho_B A_{Bi}$: 翼および胴体の i 番目分割区間での一様単位長さ当りの質量, 定数として与える
I_w, I_B : 翼および胴体の断面2次モーメント	V_4 : 翼の振りによるひずみエネルギー
I_{wm}, I_{Bm} : 翼および胴体の断面2次モーメントの最高値	G_w, G_B : 翼および胴体の剪断弾性係数
N, M : 翼および胴体の分割数	$(GK)_w, (GK)_B$: 翼および胴体の振り剛性, $GK = GK(t)$
I_{wi}, I_{Bi} : 翼および胴体の i 番目分割区間で一様断面2次モーメントの値, 定数として与える	φ : 翼の振り角
w_{it} : $w(x, y)$ の t 方向二階微分を示す	φ_t : t 方向の翼の振り角変化
J_w : t 軸に関する線積分を y 方向積分にする変換乗数, NAL-TR-291. p. 6 の J_t に相当するもの	GK_{wm}, GK_{Bm} : 翼および胴体の振り剛性の最高値
b_i : 翼の i 分割点の y 座標	T_4 : 翼の振り変位による運動エネルギー
S_w : 翼付根部中心軸の x 座標で, 原点に一致するときはゼロ	I_{0w}, I_{0B} : 翼および胴体の極慣性モーメント
P_w : 翼の軸の方程式で $x = S_w + P_w y$ の後退角に関係した値, NAL-291 p. 5	I_{0wm}, I_{0Bm} : 翼および胴体の極慣性モーメントの最高値
b, b_m : 翼先端 y 軸座標	I_{0wi}, I_{0Bi} : 翼および胴体の i 番目区間の極慣性モーメント
${}_r C_r$: ${}_r C_r = \binom{p}{r}$ 組合わせ	M_i, M_0 : エンジン質量, その最高値
γ : 90° -後退角 (α)	r_{yi} : i 番目エンジンの付根とエンジン重心との x 軸方向距離
A_{mn}, A_{rs} : $A_{mn} = a_{mn} a^m b^n$, $A_{rs} = a_{rs} a^r b^s$	r_{zi} : i 番目エンジンの付根とエンジン重心との z 軸方向距離
	J_{xi}, J_{yi} : i 番目エンジンの x 軸および y 軸回りの慣性モーメント
	E : 片翼にあるエンジン箇數

WING BENDING STRAIN ENERGY

 V_3 :

$$\begin{aligned}
 V_3 &= \frac{E_w}{2} \int_0^{t=L} I_w w_{it}^2 dt \times 2 \\
 &= \frac{E_w I_{wm} J_w}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{I_{wi}}{I_{wm}} \right) \left\{ \sum_{mn} \sum_{rs} a_{mn} a_{rs} [A^2 m(m-1)r(r-1)Im+r-4, n+s \right. \\
 &\quad + ACm(m-1)s(s-1) Im+r-2, n+s-2 \quad + C^2 n(n-1)s(s-1) Im+r, n+s-4 \\
 &\quad + ABm(m-1)rs Im+r-3, n+s-1 \quad + BCn(n-1)rs Im+r-1, n+s-3 \\
 &\quad + ACn(n-1)r(r-1) Im+r-2, n+s-2 \quad + ABmnr(r-1) Im+r-3, n+s-1 \\
 &\quad \left. + BCmns(s-1) Im+r-1, n+s-3 \quad + B^2 mnrs Im+r-2, n+s-2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \sum_{i=1}^N I_{i,p,q} \\
I_{i,p,q} &= \int_{b_{i-1}}^{b_i} (S_w + \bar{P}_w y)^p y^q dy = \bar{P}_w^p \sum_{r=0}^p \frac{p C_r}{q+r+1} a^{p-r} (b_i^{r+q+1} - b_{i-1}^{r+q+1}) \\
I_{i,p,q} &= \bar{P}_w^p \sum_{r=0}^p \frac{p C_r}{q+r+1} a^{p-r} \left\{ \left(\frac{b_i}{b_m} \right)^{r+q+1} - \left(\frac{b_{i-1}}{b_m} \right)^{r+q+1} \right\} b_m^{p+q+1} \\
I_{i,p,q} &= b_w^{p+q+1} U_{i,p,q}, \quad U_{i,p,q} = 2 \bar{P}_w^p \sum_{r=0}^p \frac{p C_r}{q+r+1} a^{p-r} \{ (\eta_i)^{r+q+1} - (\eta_{i-1})^{r+q+1} \} \\
a &= s/\bar{P}_w, \quad s = S_w/b_m, \quad \eta_i = b_i/b_m \\
V_3 &= \frac{E_w I_{wm} J_w}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{I_{wi}}{I_{wm}} \right) \Sigma \Sigma AmnArs F_1(U_{i,p,q}) a^{-(m+r)} b^{-(n+s)} b^{m+n+r+s-3} \\
\therefore V_3 &= \frac{E_w I_{wm} J_w}{2} b^{-3} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{I_{wi}}{I_{wm}} \right) \Sigma \Sigma AmnArs \{ F_1(U_{i,p,q}) \} k^{-(m+r)} \right] \\
A &= \cos^2 \gamma, \quad B = 2 \sin \gamma \cos \gamma, \quad C = \sin^2 \gamma \\
J_w &= \frac{1}{\sin \gamma}, \quad A_{mn} = a_m n a^n b^n, \quad k = a/b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(U_{i,p,q}) &= [A^2 m(m-1)r(r-1) U_{i,m+r-4,n+s} \\
&\quad + ACm(m-1)s(s-1) U_{i,m+r-2,n+s-2} \quad + BCn(n-1)rs \quad U_{i,m+r-1,n+s-3} \\
&\quad + ABm(m-1)rs \quad U_{i,m+r-3,n+s-1} \quad + ABmnr(r-1) U_{i,m+r-3,n+s-1} \\
&\quad + ACn(n-1)r(r-1) U_{i,m+r-2,n+s-2} \quad + BCmns(s-1) U_{i,m+r-1,n+s-3} \\
&\quad + C^2 n(n-1)s(s-1) U_{i,m+r,n+s-4} \quad + B^2 mnrs \quad U_{i,m+r-2,n+s-2}]
\end{aligned}$$

WING BENDING KINETIC ENERGY

T₃:

$$\begin{aligned}
T_3 &= \frac{\omega^2}{2} \int_0^L \rho_w A_w w^2 dt \times 2 \\
&= \frac{\omega^2 (\rho A)_{wm} J_w b}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_w A_{wi}}{\rho_w A_{wm}} \right) \Sigma \Sigma AmnArs \{ F_2(U_{i,p,q}) \} k^{-(m+r)} \\
F_2(U_{i,p,q}) &= U_{i,m+r,n+s}
\end{aligned}$$

WING TORSION STRAIN ENERGY

V₄:

$$\begin{aligned}
V_4 &= \frac{G}{2} \int_0^L K(\varphi_i)^2 dt \times 2 = \frac{G K_{wm}}{2} \int_0^L \left(\frac{K_{wi}}{K_{wm}} \right) \varphi_i^2 dt \times 2 = \frac{G K_{wm}}{2} \int_0^L \left(\frac{K_{wi}}{K_{wm}} \right) \left(\frac{\delta^2 w}{\delta n \delta t} \right)^2 dt \times 2 \\
&= \frac{G K_{wm}}{2} \int_0^L \left(\frac{K_{wi}}{K_{wm}} \right) \left\{ \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} D + \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} E + \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} F \right\}^2 dy \times 2 \\
V_3: \quad A &\longrightarrow D, \quad B \longrightarrow E, \quad C \longrightarrow F \\
V_4 &= \frac{G K_{wm} J_w}{2} b^{-3} \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{K_{wi}}{K_{wm}} \right) \Sigma \Sigma AmnArs \{ \bar{F}_1(U_{i,p,q}) \} k^{-(m+r)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\bar{F}_1(U_{i,p,q}) = F_1(U_{i,p,q})$$

$$ABC \longrightarrow DEF$$

$\bar{F}_1$ は (2) 式の関数 F_1 の中の A, B, C を下の D, E, F に変えた関数である。

$$D = -\sin \gamma \cos \gamma, \quad E = -\sin \gamma + \cos^2 \gamma, \quad F = \sin \gamma \cos \gamma$$

WING TORSION KINETIC ENERGY

T₄:

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{\omega^2 (\rho_w I_{0w})_m}{2} \int_0^L \left(\frac{\rho_w I_{0i}}{\rho_w I_{0wm}} \right) \varphi_i^2 dt \times 2 = \frac{\omega^2 (\rho_w I_{0w})_m J_w}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{\rho_w I_{0i}}{\rho_w I_{0wm}} \right) \Sigma \Sigma AmnArs F_3(U_{i,p,q}) k^{-(m+r)} \right\} \\
F_3(U_{i,p,q}) &= [mrG^2 U_{i,m+r-2,n+s} + nsH^2 U_{i,m+r,n+s-2} \\
&\quad + (ms+nr)G.H.U_{i,m+r-1,n+s-1}] \\
G &= -\sin \gamma, \quad H = \cos \gamma
\end{aligned}$$

BODY BENDING STRAIN ENERGY

 V_7 :

$$V_7 = \frac{1}{2} \int_{x_1}^a E_B I_B w_{xx}^2 dx = \frac{(EI)_{Bm}}{2a^3} \sum_{i=1}^M \frac{(EI)_{Bi}}{(EI)_{Bm}} \sum \sum A_{m0} A_{r0} \frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3} \{\xi_i^{m+r-3} - \xi_{i-1}^{m+r-3}\} \quad (6)$$

$$\xi_i = x_i/a$$

BODY BENDING KINETIC ENERGY

 T_7 :

$$T_7 = \frac{\omega^2 (\rho A)_{Bm} a}{2} \sum_{i=1}^M \frac{(\rho A)_{Bi}}{(\rho A)_{Bm}} \sum \sum A_{m0} A_{r0} \frac{1}{m+r+1} \{\xi_i^{m+r+1} - \xi_{i-1}^{m+r+1}\} \quad (7)$$

BODY TORSION STRAIN

 V_8 :

$$V_8 = \frac{(GK)_{Bm}}{2ab^2} \sum_{i=1}^M \frac{(GK)_{Bi}}{(GK)_{Bm}} \sum \sum A_{m1} A_{r1} \frac{mr}{m+r-1} \{\xi_i^{m+r-1} - \xi_{i-1}^{m+r-1}\} \quad (8)$$

BODY TORSION KINETIC

 T_8 :

$$T_8 = \frac{\omega^2 (\rho I_{0B})_{Bm}}{2b^2} \sum_{i=1}^M \frac{(\rho I_{0B})_{Bi}}{(\rho I_{0B})_{Bm}} \sum \sum A_{m1} A_{r1} \frac{1}{m+r+1} \{\xi_i^{m+r+1} - \xi_{i-1}^{m+r+1}\} \quad (9)$$

ENGINES KINETIC ENERGY

 T_9 :

$$\begin{aligned} \bar{u}_x: \frac{1}{2} \omega^2 M_i \bar{u}_x^2 &= \frac{1}{2} \omega^2 M_i \left\{ \gamma_{zi} \sum_{mn} a_{mn} m x_i^{m-1} y_i^n \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 M_i \gamma_{zi}^2 a b^{-3} \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} m r \xi_i^{m+r-2} \eta_i^{n+s} (b/a)^3 \\ \bar{u}_y: \frac{1}{2} \omega^2 M_i \bar{u}_y^2 &= \frac{1}{2} \omega^2 M_i \left\{ \gamma_{zi} \sum_{mn} a_{mn} n x_i^m y_i^{n-1} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 M_i \gamma_{zi}^2 a b^{-3} \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} n s \xi_i^{m+r} \eta_i^{n+s-2} (b/a) \\ \bar{u}_z: \frac{1}{2} \omega^2 M_i \bar{u}_z^2 &= \frac{1}{2} \omega^2 M_i \{w + w_y \gamma_{yi}\}^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 M_i b^3/a \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} a b^{-3} \xi_i^{m+r} \eta_i^{n+s} \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega^2 M_i \gamma_{yi}^2 b^3/a^3 \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} m r a b^{-3} \xi_i^{m+r-2} \eta_i^{n+s} \\ &\quad - \frac{1}{2} \omega^2 M_i \gamma_{yi} b^3/a^2 \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} (m+r) \xi_i^{m+r-1} \eta_i^{n+s} a b^{-3} \\ \bar{\omega}_x: \frac{1}{2} \omega^2 J_{xi} \bar{\omega}_x^2 &= \frac{1}{2} \omega^2 J_{xi} \left(\sum_{mn} a_{mn} n x_i^m y_i^{n-1} \right)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 J_{xi} b/a \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} n s \xi_i^{m+r} \eta_i^{n+s-2} a b^{-3} \\ \bar{\omega}_y: \frac{1}{2} \omega^2 J_{yi} \bar{\omega}_y^2 &= \frac{1}{2} J_{yi} \left(\sum_{mn} a_{mn} m x_i^{m-1} y_i^n \right)^2 \end{aligned}$$

となるので、全体では、

$$\begin{aligned} T_9 &= \frac{\omega^2 (EI)_{Bm} (\rho A)_{Bm}}{2a^3} \frac{2M_0}{(EI)_{Bm}} \sum_{i=1}^E \left\{ FMI(i) \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} \xi_i^{m+n} \eta_i^{r+s} \right. \\ &\quad + FMJX(i) \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} n s \xi_i^{m+r} \eta_i^{n+s-2} + FMJY(i) \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} m r \xi_i^{m+r-2} \eta_i^{n+s} \\ &\quad \left. + FMRY(i) \sum_{mn} \sum_{rs} A_{mn} A_{rs} (m+r) \xi_i^{m+r-1} \eta_i^{n+s} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

となる。

ここに、

$$FMI(i) = M_i / M_0, \quad FMJX(i) = \frac{\gamma_{zi}^2}{b^2} \left\{ 1 + \frac{J_{zi}}{M_i \gamma_{zi}^2} \right\} \frac{M_i}{M_0}$$

$$FMJY(i) = \frac{\gamma_{yi}^2}{a^2} \left\{ 1 + \frac{\gamma_{yi}^2}{\gamma_{zi}^2} + \frac{J_{yi}}{M_i \gamma_{zi}^2} \right\} \frac{M_i}{M_0}, \quad FMRY(i) = -\frac{\gamma_{yi}}{a} \frac{M_i}{M_0}$$

M_0 は i ケのエンジンの最高値

以上, 各部のエネルギーを整理すると,

$$V_3 = \frac{(EI)_{wm} J_w b^{-3}}{2} \sum_{i=1}^N \dots\dots T_3 = \frac{\omega^2 (\rho A)_{wm} J_w b}{2} \sum_{i=1}^N \dots\dots$$

$$V_4 = \frac{(GK)_{wm} J_w b^{-3}}{2} \sum_{i=1}^N \dots\dots T_4 = \frac{\omega^2 (\rho I_0)_{wm} J_w b^{-1}}{2} \sum_{i=1}^N \dots\dots$$

$$V_7 = \frac{(EI)_{Bm} a^{-3}}{2} \sum_{i=1}^M \dots\dots T_7 = \frac{\omega^2 (\rho A)_{Bm} a}{2} \sum_{i=1}^M \dots\dots$$

$$V_8 = \frac{(GK)_{Bm} a^{-1} b^{-2}}{2} \sum_{i=1}^M \dots\dots T_8 = \frac{\omega^2 (\rho I_0)_{Bm} a b^{-2}}{2} \sum_{i=1}^M \dots\dots$$

$$T_9 = \frac{\omega^2 (\rho A)_{Bm} a}{2} \sum_{i=1}^E \dots\dots$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{(EI)_{Bm} a^{-3}}{2} \left\{ P3S \cdot \sum_{i=1}^N \dots\dots - \lambda^2 a^4 \cdot R3S \cdot \sum_{i=1}^N \dots\dots + P4S \cdot \sum_{i=1}^N \dots\dots - \lambda^2 a^4 \cdot R4S \cdot \sum_{i=1}^N \dots\dots \right. \\ & + P7B \cdot \sum_{i=1}^M \dots\dots - \lambda^2 a^4 \cdot R7B \cdot \sum_{i=1}^M \dots\dots + P8B \cdot \sum_{i=1}^M \dots\dots - \lambda^2 a^4 \cdot R8B \cdot \sum_{i=1}^M \dots\dots \\ & \left. - \lambda^2 a^4 \cdot R9B \cdot \sum_{i=1}^E \dots\dots \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

ここに,

$$P3S = \frac{(EI)_{wm} \left(\frac{a}{b} \right)^3}{(EI)_{Bm} \left(\frac{a}{b} \right)} J_w, \quad R3S = \frac{(\rho A)_{wm} \left(\frac{b}{a} \right)}{(\rho A)_{Bm} \left(\frac{b}{a} \right)} J_w, \quad R9B = \frac{2M_0}{(\rho A)_{Bm} \left(\frac{1}{a} \right)}$$

$$P4S = \frac{(GK)_{wm} \left(\frac{a}{b} \right)^3}{(EI)_{Bm} \left(\frac{a}{b} \right)} J_w, \quad R4S = \frac{(\rho I_0)_{wm} \left(\frac{1}{ab} \right)}{(\rho A)_{Bm} \left(\frac{1}{ab} \right)} J_w, \quad R^2 = \lambda^2 a^4 = \omega^2 \frac{(\rho A)_{Bm}}{(EI)_{Bm}} a^4$$

$$P7B = 1, \quad R7B = 1,$$

$$P8B = \frac{(GK)_{Bm} \left(\frac{a}{b} \right)^2}{(EI)_{Bm} \left(\frac{a}{b} \right)}, \quad R8B = \frac{(\rho I_0)_{Bm} \left(\frac{1}{b^2} \right)}{(\rho A)_{Bm} \left(\frac{1}{b^2} \right)},$$

加した模型の振動実験と解析およびエンジン定数を変化したときの振動数の数値解を求めた。

- (4) 計算法を吟味した例として第5図の片持翼の数値解析資料を示した。

1. 解 析

解析は翼と胴体とを変厚の梁と考えているので, 前回³⁾の計算の翼部については一本の桁の項のみを利用する。

翼と胴体との断面の中心を通る x - y 平面が撓んで式(1)のような変化をすると仮定する。翼と胴体との結合点を原点とする。

$$w(x, y) = \sum a_{mn} x^m y^n \quad (1)$$

ここに a_{mn} は未知パラメタである。このように x - y 平面の撓みを仮定すると, この平面の撓みの式から翼と胴体のある O - t 軸, x 軸上での撓みの関数が与えられるから, これから曲げと振りに関する量が求められて, それらの点での各定数が与えられれば, 歪みと運動のエネルギーが求められる。ここでは翼断面の重

心軸と弾性軸は一致している場合を取り扱った。これらの軸が一致していない場合についても同様な試験関数を用いて計算できる。

プログラム上, 無次元化の方法を少し変えているので, 梁結合系のプログラムのための解析式は第1表のとおりである。

最後の式(11)から振動数方程式が求められ, 固有振動数と振動モードが求められる。計算は対称振動と逆対称振動の場合とについて別々におこなった。計算時間は HITAC 5020 で対称振動の場合5つの固有振動数と振動モードおよび各点の傾斜を求めるのに, 式(1)の項数20項で約8分, 40項で約30分であった。

2. 数値計算結果と実験結果との比較

数値計算と実験とをまえがきのべた順序に従ってのべる。

(1) まず, 簡単な系についてこの計算方法による予備計算と実験をおこない, そのプログラムを確認するために次のような単純な模型を考えた。

第2図に示したように、板厚 5 mm, 幅 30 mm のジュラルミンの等厚梁を用いて航空機のような結合系を作る。

翼付根部は胴体とボルト・ナット数箇によって結合し、この結合は剛と考える。模型は第2図に示したように4種の後退角をもった梁と胴体部とを結合したものである。

数値計算は、

(イ) 胴体 5 mm, 翼 5 mm の板厚の結合系で、翼の後退角を、 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ および 60° と変化した4種類の系の場合。

(ロ) 翼は後退角 $\alpha=60^\circ$ ($\gamma=30^\circ$) の 5 mm 厚の梁で、胴体部梁厚が2倍、3倍……となった場合について求め、(イ)については模型の実験値と比較した。

第6図は後退角 60° の等厚梁の場合の振動数と振動モードとを示したものである。図は振動数の低い方から対称振動および逆対称振動を混合したものを順に示した。図中で実線はこの系の平面上 y 軸方向に見たときの胴体のこの平面からの変位、破線は翼の変位を示した。第6図(a)の一点鎖線は求められた振動モードを示す関数式(1)の零点を示す。右側の図は x 軸方向

に系の後端から見た場合の翼および胴体の変位を破線と実線とで示し、点線は翼の x 方向の傾斜に対応する値を示したもので、左側の図のベクトルで示した数箇の点の傾斜に対応するものである。また左図中の点線の位置は共振実験を行なったときに砂の集まった位置である。

第7図は翼厚 5 mm, 後退角 60° のもので、胴体板厚を 5 mm, 10 mm…と増した場合の振動数パラメータおよび振動モードの変化の数値計算結果を示したものである。実験値は等厚梁の系のみであるが、この値を白丸で示した。図中に実験点が多数あるが、これは加振点位置および供試体吊り位置の相違による振動数のバラツキの程度を示したものである。ただ、のちに示す構造翼やより薄い外板によって構成されている構造物の場合には、上記した加振位置および供試体吊り位置が相違しない場合にも近接した共振が生じている場合がみられた。つまり、ここで対象としたような低次の振動の場合には、全体的な振動モードは変わらないとしても、高次の振動になるにつれて、小骨と桁間の外板の個々のセルの振動が全体的な振動モードの振動と対応して、セル部分の位置の相違によって近接した

第6図 等厚梁結合系の振動数および振動モード ($\gamma=30^\circ$)

第7図

第8図 等厚梁結合系の振動数変化対称振動

第9図 構造翼桁小骨構造と模型全系

共振点があるとみられる場合があった。

この実験値の白丸は厳密には、単に上記した問題だけでなく、実模型の対称からのずれによる問題があり、この場合には、梁結合、板構造翼の結合系に関係なく、近接した共振点が生じると考えられるが、ここでは実験的に深く吟味しなかった。第7図には胴体のみの振動数および翼を片持梁としたときの振動数の計

算結果も併記した。片持梁は5 mmの板厚のもので、胴体のみのものは板厚が変化したときの値を求め図中の破線で示した。

第8図は等厚梁の系、つまり胴体も翼も5 mm板厚の梁からなる系の後退角が変化した場合の対称振動の計算結果と実験結果とを示したものである。黒丸は計算値、白丸は実験値である。

第10図 第3図機型のエンジンなし系の振動数と振動モード、(a)~(c)対称振動

(2) 以上の計算と実験結果との比較により計算プログラムの妥当性を確認して次に第3図に示した変厚構造翼と円筒胴体との結合した構造模型の計算と実験とおこなった。模型の胴体は2箇のアルミ合金円筒を翼胴結合部で結合したもので、翼は第9図のような障子の棧のように、桁と小骨を一体にして削り出したスパン方向に直線的に厚さのテーパした構造部材を、

等厚の外板で覆ったもので、これを翼胴結合部を介して胴体部と結合した。計算では後退角 45° の翼について胴体定数を変化させたものおよび胴体と翼の定数は模型のもので、翼の後退角を変化させたものについて求めた。後退角 45° の系のアスペクト比、 b^2/S は約7である。計算に用いた定数では、翼は直線変厚構造翼であるので、ある仮定のもとに連続的な値として求め

用いた試験周数は

mm.	01.	03.	05.	07.
	09.	011.	11.	13.
	15.	17.	19.	21.
	23.	25.	27.	31.
	33.	35.	41.	43.

第10図 第3図模型のエンジンなし系の振動数と振動モード、(d)(e)逆対称振動

られるが、実際の計算にあたっては数箇に分割した定数が入れられるプログラムにしてあるので、胴体と同様、部分的に一定の階段的な定数に置き換えて用いた。

第10図は第3図に示したエンジンのないものの振動数と振動モードの計算値と実測値を比較した例を示したものである。胴体、翼の変位は第6図と同じ表示であるが今回は胴体および翼の変位を測定したので、これらの値も併記した。振幅は、計算で正規化したものと合わせ原点で1として比較した。図の右側には計算で求められた翼の撓みを破線で、また、 x 方向傾斜角を点線で示し、実測（胴体に平方向に3点の位置の変位測定から傾斜角を求めたもの）した x 方向傾斜角の値を◎、これから推定したものを一点鎖線で示し

た。第10図(a),(b)の左側の図中の点線は計算で求められた撓み関数の零点をプロットしたもので、小さい点の集合で示した部分は振動実験で砂の集中した様子を表わしている。

第11図は対称振動の場合、胴体定数を変化したときの振動数パラメタの変化を示したものである。

第12図は第11図の定数をもった系で翼の後退角のみを変化させたときの振動数パラメタと振動モードの変化を示したものである。実験値は後退角 45° のものの一例であるが、第11図、第12図ともこの値は白丸で示した。

(3) 第11図の定数をもつ構造翼と胴体とを結合した系の翼部に第4図に示したエンジンを模したブロックを第3図のように4箇所付加した系についておこなった計算値と実験値を第13図に示した。計算は、この4箇のエンジン重量（計算では寸法は変化しないで、ブロックの密度が変化したものとしておこなった）が模型 ($M=1$ とする) の $3/4, 1/2, 1/4$ (それぞれ $M=3/4, M=1/2, M=1/4$ と表示した) となった場合を求め、横軸にエンジン重量、縦軸に振動数パラメタをとったものである。実験値は $M=1, M=0$ の場合について白丸で示した。また、この図の左側には、この模型の翼部分のみを考えた場合の片持の系と、左右両翼が $45^\circ, 45^\circ$ の角を胴体軸に対してもっているブーメラン形翼の系との2種類の系の数値計算結果も示して、胴体のついた系の様子との比較参考とした。

振動モードの代表的な例として $M=1$ の場合を第14図に示した。

(4) 以上の結果をみると、(1)の一樣梁を結合した系では予想される結果が得られた。また、ここではのべないが、(2)の模型よりより実機に近い模型についておこなった結果についても近似の問題はあるが予想される結果が得られている。しかしながら、第8, 11, 12, 13図に記入したように、実験では発見されない計算結果が求められている。実験については詳しく論じないが、各種の方法と再度の実験においても認められないと判断したので、この実験値を正しいものと仮定して論を進める。このような余分な根と考えられる値を図には大括弧で囲って、二点鎖線または点線で示した。

これらの振動数は第11図のように胴体定数を変化した場合には変化せず、第12, 13図に示したように後退角およびエンジン重量を変化させると振動数が変化するものであった。そこで、計算を再度確認する意味で、この構造翼を片持にした場合を取り上げ、計算精度と試験関数のパラメタを変化させて種々計算したも

第11図(a) エンジンなし変厚構造翼胴結合系の胴体定数を
を変化したときの振動数 対称振動 ($r=45^\circ$)

第11図(b) エンジンなし変厚構造翼胴結合系の
の振動数 逆対称振動 ($r=45^\circ$)

第12図 第10図の後退角を変化させたときの対称振動

第13図 変厚構造翼胴結合物の振動数(計算値と実測値)
(20 TERMS)

第14図 第3図模型の振動数と振動モード、対称振動のみ

のを参考資料として次に示す。

ここで用いた方法はさきに述べたように、 $x-y$ 平面からの撓みの試験関数を用いて梁の結合した系の振動を取扱っているわけであるが、組み合わせ梁の場合は曲げと振りは達成するが、片持梁の場合は、ここで仮定したように、弾性軸と重心軸とが一致している場合には計算上は後退角があっても曲げと振りは独立しているわけである。

計算としては、試験関数の項数を変え、根の計算、つまり行列式の値を零と判定するための精度を変えた場合について、曲げと振りのエネルギーを混合した一般の式で計算した場合と、曲げエネルギーまたは振りエネルギーのみを用いて求めた解を第15図に示した。

また、代表的な計算の振動モードの例を第16図に示した。

まず、第15図について述べると、中央のグラフは曲げと振りの混合した式、MIXED、による計算で、上部のグラフは振りエネルギーのみ、TORS ONLY、下部のグラフは曲げエネルギーのみ、BEND ONLY、を用いた計算の様子である。試験関数は片持の条件の入った同じ関数である。このグラフの縦軸は傾向のみを示し、横軸は、部分的に R^2 の値を用い、グラフの値は行列式の値を示し、このグラフが横軸のそれぞれの基線を切る点がある、 R^2 を与えたとき、行列式の値が零となる点(固有値)である。曲げと振りの両方のエネルギーを用いたグラフの零点と、曲げのみ、または振りのみのグラフの零点はほぼそれぞれ一致している。このようにして求められた振動数に対応する振動モードが果たして曲げと振りのモードを表わしているか、一例を第16図に示した。第16図(a)~(e)は混合したエネルギーによるもの、第16図(f)~(j)はそれぞれ曲げエネルギーのみ、または、振りエネルギーのみによって求めたものである。おおよその様子は分かるが、より定量的に示したものが第17図である。第17図(a)は項数を変化したときの固有値の変化を示す。第17図(b)は、片持構造翼の振動モードで、求められた固有値および試験関数(振動モードを示す)の y^2 の係数を1としたときの振動変位 δ と傾斜角 θ_z の各モードでの最大値の比率を示したものである。計算はエネルギーとして曲げと振りを混合したときの計算結果で、 θ が δ に比して大きな値になるのが3番目と5番目の固有値に相当する振動モードの場合で、これは振りのみのエネルギーを用いて求められた第15、16図の値と対応している。

さて、第15図をみると、ある近似項数による解では、低次の振動において、二三の固有値が不規則に発生していることが分かる。片持の振動解においてこのような固有値が発生しているかぎり全辺自由の系の振動解においても、このような根が実験値と対応しない解を与えることが予想される。如何なる原因によるものか不明であるが最終的に固有値を求める高次のマトリックス行列式を解く場合にはこの点特に注意しないと根がバラバラ多数生じて来る場合もあるのではないかと思う。片持構造翼の実験値との比較検討は別の機会に行ないたいが、ここでは混合した MIXED の場合が傾斜角もよく近似しているようである。

3. 考 察

(1) 解析結果と実験値について 等厚梁の結合系、変厚構造翼と胴体との結合した系およびこの系の片持翼部の解析結果をみるとほぼ予想されるような合理的な解析結果が得られているが、計算の項数および

第15図 片持構造翼

(a) 片持構造翼の振動 (計算値のみ)。
 図10の系の振動計算プログラムの
 試験関数のみを変える。

第16図 片持変厚構造翼の振動数と振動モード (計算値のみ)

固有値計算例

第 17 図 片持翼の振動数計算の吟味

精度によっては、予想外の固有値が求められている。この様子は 2. に示したが恐らく計算、それも固有値計算の時に生じるもので、この原因としては、振動数方程式を与える係数（つまり、初めに選定した試験関数によるものと思われるが）により、行列式の性質が悪くなるのではないかとと思うが明らかでない。

実験値は共振法によって求めたもので、加振位置や支持の方法を変えて測定したもので、ここではこの実験値を正しいものとして計算値を吟味してきたが、実

験においても振りや高次の振動においては、確定的に論ずることのできない場合もあったことを断わって置きたい。

以上のような点に問題はあるが、数値解析結果と実験結果を比較して、ほぼ満足な対応が得られていると思う。翼と胴体とを結合した系の傾斜角の対応もかなり実験に近いものも得られている。

後退角、胴体定数およびエンジン位置重量の影響も各図に示した。

まず、後退角の影響であるが、これはアスペクト比の大きな翼の場合には、低次の振動ではあまり影響がない。

翼と胴体との定数比の変化は全系の振動に影響している。ただしこの場合、通常、翼を片持としてこの片持の付根の条件を変化させて翼の振動を推進する方法と、ここで行なったように胴体も含めた系の振動による解とがどの程度異なるものか比較していないのでこの点については明らかでない。

エンジンの影響については、位置と重量によって、振動の様子がどのように変化するかはより多数の資料が必要であるが、最低次の振動では、通常エンジン位置は節点近傍にあるのであまり影響されないと思う。

取付位置が弾性軸を遠く隔れている場合などは、また異なった影響があると思うが、この問題は、弾性軸と重心軸とが一致しない場合の連成振動として論ずる必要もあると思うので、この点に関してはのちの機会に論じたい。もちろんエンジン位置と重量の影響は一般に高次振動には影響して来るであろう。平板翼にエンジンを付加した実験が文献 4) にあるので参照していただきたい。

(2) その他 今回は $x-y$ 平面の撓みを仮定して、この撓みから、この面内にある直線部分にのみ分布す

る定数からなる系の振動解析をエネルギー法で解析したが、低次の振動については、ほぼ実用的な解が得られることが分かる。実際の初期設計の振動推定に利用できるのではないと思われる。

しかしながら、実機に应用する場合問題となる点について、二ふれておくことにする。

まず、第13図をみると、エンジンのついた系の振動実験において、エンジンの系の振動が生じている。模型のエンジンの付加方法は翼の小骨に第4図のようなエンジン重量をつけているので、この系が一つの振動系をなしていることは当然で、解析では、このエンジン支持部は剛であるとして、小骨部の撓み関数からエンジン重心部の変位を求め、エンジン部は単に慣性項に入ると仮定して計算を進めて来ている。このため解析では、実験で求められたようなエンジン部の振動が主要なモードは得られなかった。実機でもエンジン部分系の振動が比較的低次のところに生じるものもあると聞くので、考慮すべき点であろう。

次に、実機では、さきにもふれたように、翼の弾性軸と重心軸とは一致せず、また直線的でもない。集中荷重的に、ある点で重心が弾性軸から遠ざかっている場合には、この集中質量と弾性軸間とが剛であると仮定すれば、ここであつかったエンジンの慣性項のようにして扱えるが、分布的に弾性軸から離れたところにある慣性を考える場合には、弾性軸と重心軸とが一致しない連成振動の問題として解く必要があろう。この場合にも、ここで用いた方法が利用できる。方法としては、(1)式と同じ試験関数を用いて、弾性エネルギーの計算は弾性軸についておこない、慣性エネルギーは重心軸についておこなえば同様に求められる。

今回の計算では、軸対称な形状の系についておこなったので、数値解析は試験関数を対称振動と逆対称振動を表わす関数に分離して別々に求めたが、系が軸対称でない場合には(1)式の一般式を用いる必要がある。

最近の人工衛星の近似的な振動解析については、ここで対象とした系の胴体を集中慣性項のみとし、これに大きなパネルが対称に付いた系の解析と考え、先の

三角構造翼の付いた胴体の解析³⁾を合わせて利用すれば、ソーラーセルの回転慣性項などを追加することによって、この方法が直接用いられるのではないかと思う。

ま と め

胴体と構造翼の結合した航空機構造模型の振動解析と実験をおこない、翼と胴体とを含む $x-y$ 平面の撓みを $\sum a_{mn} x^m y^n$ と仮定したエネルギー法による解法が、初期設計時に必要なおおよその固有振動数および振動モードの推定に充分利用できることを示した。

計算例は模型の実測値と比較したが、低次の固有振動数および振動モードについてはかなりよい近似値が得られることが分かった。また片持変厚構造翼を例に、この方法による計算実例の資料を示すとともに、より複雑な実機構造を解析する場合に必要な種々の問題点についてもふれて置いた。

実機の詳しい資料を求める場合には有限要素法によるのが最近の傾向であると思うが、初期設計時における概略値の推定には、ここで述べた方法も計算機を使用する解法として多少便利になっていると思う。

最後に今回の研究を進めるにあたって、種々御指導いただいた航空宇宙技術研究所機体第二部の中井部長および御協力いただいた構造研究室の各位に対して心から感謝の意を表わすとともに前回と同様固有値計算プログラムを使用させていただいた長崎大学工学部の築地教授に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 例えば、小林繁夫：“箱型後退翼の振動特性” 航空宇宙学会誌，第17巻，第184号，1969年5月。
- 2) 妹沢克惟，渡辺 亘：“主翼および胴体の連成振動” 航研集報，第160号，昭和13年1月。
- 3) 堀，林，多田，戸田，日下：“自由飛行構造模型の振動” 航空宇宙学会誌，第27巻，第266号，1976年3月。
- 4) 中井，森田，高木：“薄い片持後退角の翼遷音速フラッタ特性におよぼす集中質量の位置の影響について” その1，その2，航空宇宙学会誌，第18巻，第194号，1970年3月，第200号，1970年9月。