二次元翼まわりの非粘性圧縮流の数値計算*

石 黒 登 美 子**

1. ま え が き

1970 年ごろから二次元遷音速翼まわりの非粘性圧縮流の数値計算が次の二種類の方法で行なわれて来た。

- A. 定常流の速度ポテンシャルの方程式を差分近似し緩和法を用いて解を求める。
- B. 非定常 Euler 方程式の漸近的定常解を LAX-WENDROFF 法のような双曲型差分法によって求める。

A は MURMAN, COLE, STEGER, LOMAX, BAUER, GARABEDIAN, KORN, JAMESON ら^{1)~6)}によって、また、B は MAGNUS, YOSHIHARA, BURSTEIN ら^{7)~9)}によって開発されて来た。Aが必要とする計算時間は1ケースにつき約5分 (CDC 6600) で B (約3.5時間, CDC 6400) に比べ大幅に少なくすみコストの点で大変有利である。しかし、衝撃波の捕獲に対し、Bには保存形表示の Euler 方程式の弱解は衝撃波の jump 条件を満たすという裏付けがあるがAにはこのような理論的裏付けがない。実際、MAGNUS-YOSHIHARA¹⁰⁾は計算結果を比較して、Bの方がAより正確に衝撃波を捉えることを確かめている。

本論文では遷音速翼に限らず超音速翼にも適用できる計算法について記述する。本方法では上流無限遠と下流無限遠条件を別々に計算に組み入れられるように座標変換に工夫を凝らし、変換された座標系でエントロピー変化を含む Euler 方程式を差分法で解く。そしてこのBに属する方法によって遷音速翼や超音速翼まわりの流れの数値計算を行なう。

本論文では二次元 (x, y) 空間を取り扱おうのでいわゆる翼面は翼曲線というのが正しいが以下では習慣に従い“翼面”を使用する。

2. 計 算 法

2.1 計算座標系 翼面および無限遠条件を正確に数値計算に組入れるために、物理面に置かれた翼とその外部を矩形とその内部に写像し計算の対象領域とす

第1図 写像

る。この座標系を計算面と呼ぶ。この計算面は後に述べる写像を三回連続的に施すことによって得る。第1図に示すようにこれらの写像によって得られた矩形の底辺は物理面における翼面、後縁および後縁から発する線に対応する。次に、無限遠について調べるために計算面における三つの直線 $\xi = \pm a, \eta = b$ が物理面においてどのような曲線に対応するかを第1図に示す。この図から a を2に、 b を1に近づけて行くことによって矩形の上辺は物理面の上流無限遠に、二つの側辺は下流無限遠に対応することがわかる。こうして翼まわりの流れの計算に関してはすべての境界条件つまり翼面、後縁、無限遠条件は矩形の四辺で与えられる。

写像1 後縁から最も離れた位置にある翼面上の点を前縁と呼び、原点に取る。これと後縁を結ぶ直線

* 昭和51年4月6日 日本航空宇宙学会年會にて講演 昭和51年6月30日原稿受理 Numerical Calculation of Compressible Inviscid Flows about Airfoils

** 航空宇宙技術研究所 Tomiko Ishiguro

を x 軸に取る. 次に JAMESON⁵⁾ に従って物理面 ($z = x - iy$) における後縁角 ε をもつ翼とその外部を $\sigma (=re^{i\theta})$ 面における単位円とその外部に等角写像する. この写像関数は, ε に関して SCHWARZ-CHRISTOFFEL の公式を用いると次の形で表わされる.

$$\frac{dz}{d\sigma} = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)^{1-\varepsilon/\pi} \exp\left(\sum_{n=0}^K \frac{C_n}{\sigma^n}\right) \quad (1)$$

この関数を決めるには, 係数 C_n を翼面の形状から以下のように求めなければならない. まず, CAUCHY の留数定理から $C_1 = 1 - \varepsilon/\pi$ を求める. 次に翼面を後縁からの弧長 s および接線と x 方向のなす角 θ (第1図) で与えると翼面と単位円は等角関係の下に次のように対応づけられる.

$$\log \frac{ds}{d\omega} + i\left(\theta - \omega - \frac{\pi}{2}\right) = \log \frac{dz}{d\sigma}$$

この右辺に (1) 式を代入して実数部と虚数部に分割し二つの三角多項式を作り, 三角多項式特有の反復法を適用すれば係数 C_n が求まる.

写像 2 σ 面における単位円とその外部を関数 $w = \sqrt{\sigma} + 1/\sqrt{\sigma}$ を用いて $w (=x' + iy')$ 面の上半面 ($y' \geq 0$) に等角写像する. 尖点状後縁 ($\varepsilon=0$) は σ 面では特異点であるがこの写像によって特異性がなくなる.

写像 3 この上半面を次の関数を用いて計算面 ($\xi = \xi + i\eta$) における矩形 ($|\xi| \leq 2, 0 \leq \eta \leq 1$) に写像する.
 $\xi = 2(1 + 1/x')$ as $x' \leq -2$, $\eta = y'/(1 + y')$ as $0 \leq y'$.
 $= -x'/2$ as $|x'| < 2$,
 $= 2(-1 + 1/x')$ as $x' \geq 2$,

2.2 基礎方程式 物理面における二次元 Euler 方程式は一様流の密度, 一様流の速度および翼弦長を基

準にして無次元化すると次のような保存形で表わされる. ($\gamma=1.4$ とする.)

$$W_t + F_x(W) + G_y(W) = 0 \quad (2)$$

ここに

$$W \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad F \equiv \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{pmatrix}, \quad G \equiv \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1) \{e - \rho(u^2 + v^2)/2\}.$$

ただし, ρ は密度, p は圧力, u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分, e は単位体積あたりの全エネルギーを示す. 一方, 計算面における Euler 方程式は (2) 式を変換して次式で表わされる.

$$W_t + F_\xi(W)\xi_x + G_\eta(W)\eta_y + F_\eta(W)\eta_x + G_\xi(W)\xi_y = 0 \quad (3)$$

ここで微係数 $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ は chain rule を用いて写像関数から導出する.

2.3 格子 基礎方程式 (3) を差分法で解くためにあらかじめ, 格子線が矩形の四辺と一致するように幅 $\Delta\xi, \Delta\eta$ をもつ一様な格子網を計算面に張る. たとえば, GARABEDIAN-KORN 翼¹⁰⁾ に対する幅 $\Delta\xi = 4/237$, $\Delta\eta = 1/60$ をもつ一様な格子網は物理面においては第2図のような直交曲線網に対応する. ここで翼面に近くなるほど, また, 前縁に近くなるほど網目が細かくなっていることがわかる. このような格子点の分布は SELLS¹¹⁾ に従って GARABEDIAN-KORN⁹⁾ が使用したものと同様であり, 翼まわりの流れを適確に与えてくれると考えられる. さて, (ξ, η) 面における格子点座標を (i, j) とする. ただし, $(0, 0)$ は $\xi = -2, \eta = 0$ に対応させる. また, time cycle 数 N のときの (i, j)

第2図 物理面における格子網 (GARABEDIAN-KORN 翼)

点における差分分解を $W_{i,j}^N$ で表わす。

2.4 差分法 基礎方程式(3)を解くための差分法として人工粘性つき二段階 LAX-WENDROFF 法を採用する。ここでは計算の使用メモリの節約のために時間分割の技法¹²⁾を用いる。(本来、この技法はベクトル計算を高速処理できるアレイプロセッサ用に開発されたものである。)すなわち、(3)式を ξ 方向の一次元微分方程式 $W_t = F_\xi \xi_x + G_\xi \xi_y$ と η 方向のもの $W_t = F_\eta \eta_x + G_\eta \eta_y$ に分割し、おのおのに関する一次元差分演算子をその精度が保たれるように適当に組合わせて(3)式に対する二次元差分演算子を作る。

さて、ここでは、矩形内部の全格子点における差分分解を一次元積分演算子 L_ξ, L_η および一次元人工粘性演算子 V_ξ, V_η を使って次式で求める。

$$\begin{aligned} W_{i,j}^{N+1} &= L_\eta L_\xi W_{i,j}^N, \\ W_{i,j}^{N+2} &= V_\eta V_\xi L_\xi L_\eta W_{i,j}^{N+1} \end{aligned} \quad (4)$$

ここに

$$\begin{aligned} L_\xi; L_\xi W_{i,j} &\equiv W_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \{ \tilde{F}_{i+1/2,j} \\ &\quad - \tilde{F}_{i-1/2,j} \} \xi_{x,i,j} + (\tilde{G}_{i+1/2,j} \\ &\quad - \tilde{G}_{i-1/2,j} \} \xi_{y,i,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{i+1/2,j} &\equiv \frac{1}{2} (W_{i+1,j} + W_{i,j}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2 \Delta \xi} \{ (F_{i+1,j} - F_{i,j}) \xi_{x,i+1/2,j} \\ &\quad + (G_{i+1,j} - G_{i,j}) \xi_{y,i+1/2,j} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_\xi; V_\xi W_{i,j} &\equiv W_{i,j} + \lambda_\xi \{ |U_{i,j}| \\ &\quad - U_{i,j} \} (W_{i+1,j} - W_{i,j}) \\ &\quad - |U_{i,j}| - U_{i-1,j} \} (W_{i,j} \\ &\quad - W_{i-1,j}), \end{aligned}$$

$$U^\xi \equiv u \xi_x + v \xi_y, \quad L_\eta, V_\eta \text{ も同様.}$$

この L_ξ, L_η は二次精度の二段階 LAX-WENDROFF 演算子であり、 V_ξ, V_η にはそれぞれ、 L_ξ, L_η の増幅行列の固有値である $u \xi_x + v \xi_y, u \eta_x + v \eta_y$ が組入れられている。

時間刻み Δt および人工粘性係数 $\lambda_\xi, \lambda_\eta$ は未決定要素であり、安定な数値解を得るように、つまり、数値解がオーバーフローしたり顕著な振動を伴わないように計算の際、適当に決める。ただし、 L_ξ の VON NEUMANN 条件は $\Delta t \leq \Delta \xi / (|u \xi_x + v \xi_y| + c) \equiv \Delta T_\xi$ (L_η も同様、音速 $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$) で与えられるので本論文では $\Delta t = C \Delta t \min(\Delta T_\xi, \Delta T_\eta)$ として係数 $C \Delta t$ を適当に決めるものとする。

2.5 境界の取り扱い 計算の対象領域である矩形の四辺における数値解を以下の方法で求める。

(a) 底辺の区間 $1 < |\xi| < 2$ における格子点は物理面では内点に対応するので $W(\xi) = W(-\xi)$ として前節の(4)式を用いる。

(b) 底辺の区間 $|\xi| < 1$ は翼面に対応し、そこでは翼面条件が要求される。すなわち、翼面に垂直な速度成分に対応する上述の区間での η 方向の速度成分は0でなければならない。そのために反射法を適用し、前節の(4)式において L_η のかわりに次の $\tilde{L}_\eta$ を用い V_η を省く。

$$\tilde{L}_\eta; A_i \tilde{L}_\eta W_{i,0} = \tilde{W}_{i,0} - \frac{2 \Delta t}{\Delta \eta_i} B \cdot G(\tilde{W}_{i,1/2}),$$

$$\tilde{W}_{i,1/2} = \frac{1}{2} (\tilde{W}_{i,1} + \tilde{W}_{i,0})$$

$$- \frac{\Delta t}{2 \Delta \eta_i} \{ G(\tilde{W}_{i,1}) - G(\tilde{W}_{i,0}) \},$$

$$\tilde{W}_{i,j} = A_i W_{i,j}, \quad \Delta \eta_i = \left| \frac{\cos \theta_{i,0}}{\eta_{y,i,0}} \right| \cdot \Delta \eta,$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{i,0} & -\sin \theta_{i,0} & 0 \\ 0 & \sin \theta_{i,0} & \cos \theta_{i,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) 底辺上の二点 $\xi = \pm 1$ は物理面では同一の点、後縁に対応する。後縁に、衝撃波がない場合には KUTTA 条件(後縁の上面と下面における圧力が等しい)が、衝撃波がある場合には RANKINE-HUGONIOT の関係が要求される。しかし、差分法による計算では不連続面は急な勾配をもつ連続面として取り扱かうので、ここでは便宜上、後縁に最も近い二つの格子点 $\xi = \pm \xi_T$ (ただし、 $\xi_T \geq 1$) で前節の内点に関する方法($\xi_T > 1$ のとき)、あるいは、(b)の方法($\xi_T = 1$ のとき)によって上面と下面の数値解を求めそれらの結果を平均する。なお、後縁が尖点状である場合、速度ベクトルは後縁の接線に平行にとる。

(d) 上流の無限遠に対応する上辺では常に一様流を与える。これは一様流のマッハ数 M_∞ と迎角 α のみで決定される。すなわち、 $\rho_\infty = 1, u_\infty = \cos \alpha, v_\infty = \sin \alpha, p_\infty = 1/(\gamma M_\infty^2)$ 。

(e) 下流の無限遠に対応する二つの側辺では一様流が亜音速の場合(d)と同様に常に一様流を与えるが、超音速の場合、矩形内部の隣の格子点における数値解をそのまま用いる。すなわち、0次精度の外挿を行なう。

3. 数値計算

前章で述べた計算法に従って数値計算を行なう。数値解に近いような初期値が用意できれば漸近的定常に達するまでに要する time cycle 数は少なくともすむ計

算コストも低くなる。以下には、そのような初期値が用意できない場合に対し、計算効率の良い方法について述べる。まず、一様流の中に衝撃的に翼を置く。ただし、前縁では速度が 0、翼面ではこれに流れの速度ベクトルが接するように、さらに、これらの付近ではこれから遠ざかるにつれて徐々に一様流に近づくように等エントロピーの関係式を使って初期値を作る。次に粗い一様な格子網 (約 $\Delta\xi \sim 4/117$, $\Delta\eta \sim 1/30$) を使って漸近的定常解 (所要 time cycle 数約 2,000~5,000) を求め、さらに解の精度を高めるためにこれを初期値にして約半分の格子幅をもつ細かい一様な格子網 (約 $\Delta\xi \sim 4/237$, $\Delta\eta \sim 1/60$) を使って漸近的定常解 (所要 time cycle 数約 500~2,000) を求め最終的な数値解とする。このような手順を踏むのは、たとえば $t=t_0$ から $t=t_1$ までの細かい格子の場合の所要計算時間は粗い格子の場合のものの約 8 倍であり、始めから細かい格子を使うとコスト高になるからである。計算機 FACOM 230-75 (OPT 2) では 30 分の計算で粗い格子の場合約 2,000 time cycles, 細かい格子の場合約 500 time cycles を消化できた。一つの問題に対する総所要計算時間は初期値と漸近的定常解の距離や λ_ξ, C_{dt} の最適値の決定等に依存し、一概にいえないが約 1~3.3 時間であった。

以下、数値計算例を紹介する。

例 1 一様流が亜音速でも超音速でも前章の方法で

第 3 図 等圧線図 (最大値 1.919, 最小値 0.466, 幅 0.0484)

解が実際に求まることを示そう。そのために次の三つのケースについて JOUKOWSKI 翼まわりの流れを計算した ($\Delta\xi = 4/237$, $\Delta\eta = 1/60$, $C_{dt} = 0.2$)。

ケース	M_∞	α	$\lambda_\xi (= \lambda_\tau)$
1	0.72	4°	0.2
2	1	10°	0.4
3	2	0°	1

この C_{dt} や λ_ξ の値は安定な計算を保持するために要したものであり、 λ_ξ は M_∞ の大きさ、つまり、衝撃波の強さとともに大きくなる。計算結果としてケース 1, 2 の等圧線および音速線 (破線) を第 3, 4 図に示す。等圧線が密集している個所は衝撃波に相当する。ケース 1 では亜音速領域の中に超音速部分があり典型

第 4 図 等圧線図 (最大値 1.416, 最小値 0.182, 幅 0.0411)

第 5 図 等圧線図 (最大値 0.882, 最小値 0.106, 幅 0.0259)

的な遷音速流のパターンが見られる。ケース2では後縁から衝撃波が発生し、後縁下流では、等圧線が滑らかであるが等密度線(第4図, 細い破線)が急変している個所があり滑り流の存在が確認できる(第4図, 黒丸点)。次に、ケース3の等圧線を第5図に、さらに、流線および音速線(破線)を第6図に示す。そこで流線が曲がっている個所が衝撃波に相当するので、前縁近辺における離れた衝撃波や後縁から発生する弱い斜め衝撃波(流れが超音速から超音速に変わる)の存在が認められる。このように前章の計算法でほぼ予想どおりの流れ場のパターンを得る。

例2 実験では風洞壁干渉や粘性の影響があり、我々の計算条件とは少し異なるが、次の三つの遷音速翼について数値計算を行ない($\Delta\xi, \Delta\eta, C_{dt}$ の値は例1

第6図 流線図

第7図 弦長に対する翼面上の圧力係数の変化

と同じ), 実験結果と比較しよう。

翼型	M_∞	α	$\lambda_f (= \lambda_s)$
NACA 0015	0.729	4°	0.2
NACA 64 A 410	0.72	4°	0.2
衝撃波のない翼	0.75	0°	0.1

各翼について計算によって得た弦長に対する翼面上の圧力係数の変化を GRAHAM ら¹³⁾, STIVERS¹⁴⁾, KACPRZYNSKI ら¹⁰⁾による実験結果とともに第7, 8, 9図に、また、計算による等圧線を第10, 11, 12図に示す。NACA 0015, NACA 64 A 410 については実験と計算の結果が衝撃波の根元付近を除いて良い一致を

第8図 弦長に対する翼面上の圧力係数の変化

第9図 弦長に対する翼面上の圧力係数の変化

第10図 等圧線図 (最大値 1.879, 最小値 0.522, 幅 0.0452)

第12図 等圧線図 (最大値 1.856, 最小値 0.781, 幅 0.0358)

第11図 等圧線図 (最大値 1.941, 最小値 0.525, 幅 0.0472)

示す。実験ではこの根元付近で衝撃波と境界層の干渉により λ shock の出現や境界層の剝離現象が起こって衝撃波の幅が広がっており、非粘性計算とかなりの差があっても不思議ではない。なお、第7図における破線は STEGER-LOMAX²⁾ がポテンシャル流の方程式を解いて得たものであり、我々のものの方が実験結果に近い。第8図における破線は MAGNUS-YOSHIHARA⁷⁾ が Euler 方程式を解いて得たものであ

り、我々のものと良い一致を示すが上面に関して前縁近辺や衝撃波付近で我々のものより少し滑らかさに欠ける。

ここで採用した衝撃波のない翼は KACPRZYNSKI ら¹⁰⁾ がホドグラフ法による GARABEDIAN-KORN⁴⁾ の作成方法に従ってデザインしたものである。第9図では、デザイン、実験、計算による結果にはいずれも衝撃波が存在しないし、下面ではこれらは良い一致を示すが上面では区間 $0.1 \leq x \leq 0.6$ においてずれが認められる。我々の計算とデザインでは基礎方程式と打ち切り誤差が異なる。また、実験と計算では粘性の有無、風洞壁の有無、迎角や一様流マッハ数の小差のような条件的な違いがある。これらのうちのどれが上面で解の大差を生み出すのか明確にできないが、KACPRZYNSKI らが述べているように、衝撃波のない翼の上面の圧力分布は条件の小さな変化に非常に敏感であることがわかった。

4. む す び

本論文では二次元翼まわりの非粘性圧縮流の計算法を提示した。この方法を適用して遷音速翼と超音速翼の数値計算を行ない、その結果、非粘性流の計算としては一応妥当とみなせる数値解を得ることができた。予期されたことであるが、Euler 方程式を使ったこの計算は1ケースにつき1時間以上の計算時間を必要としかなりコスト高につくが、近い将来、数倍の速さをもつ計算機(例、アレイプロセッサ)の使用によりこ

の難点も解決されよう。

最後に本研究を行なうにあたり、資料の提供、討論、および激励をして下さった航空宇宙技術研究所の神谷信彦室長、三好甫室長、河合伸坦研究員に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) MURMAN, E.M. and COLE, J.D.: Calculation of Plane Steady Transonic Flows, AIAA J., Vol. 9, No. 1 (1971), pp. 114-121.
- 2) STEGER, J.L. and LOMAX, H.: Numerical Calculation of Transonic Flow about Two-Dimensional Airfoils by Relaxation Procedures, AIAA Paper No. 71-569, (1971).
- 3) GARABEDIAN, P.R. and KORN, D.G.: Analysis of Transonic Airfoils, Comm. Pure. Appl. Math., Vol. 24, (1971), pp. 841-851.
- 4) BAUER, F., GARABEDIAN, P. and KORN, D.: Supercritical Wing Sections, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 66, Springer-Verlag, New York, (1972).
- 5) JAMESON, A.: Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings, Including Flows at Mach 1, Comm. Pure. Appl. Math., Vol. 27, (1974), pp. 283-309.
- 6) BAUER, F., GARABEDIAN, P., KORN, D. and JAMESON, A.: Supercritical Wing Sections II, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 108, Springer-Verlag, New York, (1975).
- 7) MAGNUS, R. and YOSHIHARA, H.: Inviscid Transonic Flow over Airfoils, AIAA J., Vol. 8, No. 12, (1970), pp. 2157-2162.
- 8) MAGNUS, R. and YOSHIHARA, H.: Steady Inviscid Transonic Flows over Planar Airfoils-A Search for a Simplified Procedure, NASA CR-2186, (1973).
- 9) BURSTEIN, S.Z. and MIRIN, A.A.: Time Dependent Calculations for Transonic Flow, Proc. 3rd Int. Conf. on Num. Math. in Fluid Dynamics, (1972), pp. 48-59.
- 10) KACPRZYNSKI, J.J., OHMAN, L.H., GARABEDIAN, P.R. and KORN, D.G.: Analysis of the Flow past a Shockless Lifting Airfoil in Design and Off-Design Conditions, Aeronautical Report LR-554, National Research Council of Canada, (1971).
- 11) SELLS, C.C.: Plane Subcritical Flow past a Lifting Aerofoil, Proc. Roy. Soc. A., Vol. 308, (1968), pp. 377-401.
- 12) TURKEL, E.: Phase Error and Stability of Second Order Methods for Hyperbolic Problems. I, J. Comp. Phys., Vol. 15, (1974), pp. 226-250.
- 13) GRAHAM, D.J., NITZBERG, G.E. and OLSON, R.N.: A Systematic Investigation of Pressure Distributions of High Speeds over Five Representative NACA Low-Drag and Conventional Airfoil Sections, NACA Rep. 832, (1945).
- 14) STIVERS, L.: Effects of Subsonic Mach Number on the Forces and Pressure Distribution of Four NACA 64 A-Series Airfoil Sections, NACA TN 3162, (1954).

極超音速希薄流における Navier-Stokes 方程式の差分計算*

桜 井 晃**

1. ま え が き

希薄な超音速または極超音速流中に置かれた平板の上では、十分下流では流れは境界層、非粘性層および衝撃波から成っているが、先端近くでは急速に成長しつつある境界層と衝撃波との干渉が生じ、いわゆる干渉領域が形成される。一方先端のごく近傍では気体はもはや連続体として取り扱うことはできず、分子運動論による手法で解明されなければならない。この2つの領域の間では、散逸効果によって生じる有限の厚さを持つ衝撃波と十分発達していない境界層とが部分的にまたは完全に融合して merged layer と呼ばれる粘性圧縮層を形成し、また平板表面におけるすべりな

どの分子流的効果が顕著に現われる中間的な領域が存在する。

この領域においては分子運動論的な取り扱いが最も正常なものと考えられ、各種の手法によって研究が行なわれているが^{1), 2)}、まだ完全な成功は得られていない。一方連続流モデルによってもいくつかの近似理論が提出されている³⁾⁻⁵⁾。このような希薄流では連続流モデルが正当に適用できるという保証はなく、むしろ得られた結果が実験や分子運動論による解とどのように一致するかによって、連続流モデルの適用の妥当性が判定されると考えることができる。したがってこのためには、近似のない Navier-Stokes 方程式 (以下 N-S 式と略す) そのものを差分解法によって解いて他のデータと比較することが必要となる。

この問題の差分解法は計算上も困難な問題を含んでいるため、実験やその他の理論解などと比較できるような流れについての計算例がまだ数少ない⁶⁾⁻⁹⁾。筆者は陰的な性質を有する能率的な計算手法を開発し、広

* 昭和51年4月6日 日本航空宇宙学会第7回年会講演会にて講演 昭和51年11月22日原稿受理 Finite-Difference Calculations of the Navier-Stokes Equations in Hypersonic Rarefied Flows

** 九州大学工学部航空工学科 Akira SAKURAI