値が得られなかった。しかし、この問題点は、煩雑ではあるが、解決可能なものと考えられる。

次の問題点は、これまでの研究^{5), 6)}と同様に、本解析においても blocking 現象によって解の発散するような状態が存在することである。2つの計算例においては、渦核半径の小さい方が、より漸近的循環値の小さい状態でこの現象を起こした。

また、管の半径を $r_0(z) = 1 + \varepsilon \sum_k b_k \sin kx$ のように FOURIER 級数で表わすことによって、一定半径から少しずれた形の任意の壁に対し、計算が可能である。

最後に、さきの第1報⁶⁾は r/r_0 を変数ととして、2次の微小項までの解を求めているが、本報告では r を独立変数として1次の微小量に対する解を求めた。

文 献

- 1) TAYLOR, G.I.: The Motion of a Sphere in a Rotating Liquid, *Pro. Roy. Soc.*, Vol. 102, A, (1922), pp. 180-189.
- 2) LONG, R.R.: Steady Motion around a Symmetrical Obstacle Moving along the Axis of a Rotating Liquid, *J. of Meteorology*, Vol. 10, (1953), pp. 197-203.
- 3) FRAENKEL, L.E.: On the Flow of Rotating Fluid past Bodies in a Pipe, *Pro. Roy. Soc.*, Vol. 233, A, (1956), pp. 506-526.
- 4) BOSSEL, H.H.: Vortex Breakdown Flowfield, *The Physics of Fluids*, Vol. 12, No. 3, (1969), pp. 498-508.
- 5) CHOW, C.Y.: Swirling Flow in Tubes of Non-uniform Cross-sections, *J. Fluid Mech.*, Vol. 38, Part 4, (1969), pp. 843-854.
- 6) 中村佳朗: 非一様断面円管内の旋回流の解析, 日本航空宇宙学会誌, 第24巻, 第273号, (1976), pp. 490-496.
- 7) VAN DYKE, M.: Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 8, Academic Press, (1964).
- 8) 寺沢寛一: 数学概論, 増訂版, 第21刷, 岩波書店, (1971), pp. 300-306.
- 9) LEIBOVICH, S. and RANDALL, J.D.: Amplification and Decay of Long Nonlinear Waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 53, Part 3, (1973), pp. 481-493.

非圧縮完全流体中で飛行方向に非一様運動を行なう薄翼の理論* Theory on Wings Doing Nonuniform Streamwise Motions in an Incompressible Perfect Fluid

安 東 茂 典**・市 川 明 夫***
Shigenori ANDO and Akio ICHIKAWA

Abstract

There are few papers for nonuniform in-plane motions of wings, practical applications of which may concern lead-lag motion of helicopter blades and motions of horizontal stabilizer in T-Tail flutter. In the present formulation Fourier-transform is used, which makes development of the theory straightforward, universal, and routine. Drag problems (on zero-lift symmetric wings) and lift problems (on zero-thickness wings) are treated for both two- and three-dimensional cases. Drag problems show a drag due to the instant acceleration, while lift problems yield and upwash dependent on the whole history of the wing motions.

1. 序 論

近年、非定常揚力面理論は著しい進歩を遂げた。しかしそれらのほとんどすべては面外変位運動を行なう

翼に関するものである。一方面内方向に非一様運動を行なう翼に関する研究の数はごく限られている。その最も有名なものは Wagner の理論¹⁾であり、静止から突然動き出す揚力翼に関する Wagner 関数は有名である。その後ヘリコプタ・ブレードの lead-lag 運動に関連して ISAACS²⁾, GREENBERG³⁾ の論文が出版されたが、著名な非定常空気力学のテキストには全然引用されてなく、あまり高く評価されていないようである。

一般に面内非一様運動の問題が面外振動のそれよりもむずかしい根本的理由は、飛行速度の微小攪乱が ω_s の角振動数をもつ調和振動であっても圧力変動のそれ ω_p は必ずしも同じ角振動に限定されないこと、つまり周波数応答の概念を適用できないところにある。

最近、面内振動は T-Tail フラッタに関して再び注目されるようになったが^{4), 5)}、ここでは2次微小量が本質的に重要な役割を演ずるというむずかしさを示している。このように面内運動の問題は未開拓の広大な分野を形成しているように思われる。

* 1976年7月29日 非定常空気力学懇談会で講演、1976年9月27日原稿受理

** 名古屋大学工学部航空学教室

*** 名古屋大学工学研究科博士課程

面内運動には x -(飛行) 方向と, y -(スパン) 方向および z -軸まわり (ω) の回転などがある. 本論文では最も基本的な, “非圧縮性完全流体中における飛行方向の面内運動” を取り扱う. 揚力を持たない対称翼および揚力をもつ薄翼に関する定式化を行ない, 飛行速度=一定の極限で従来の翼理論と一致することを示す. フーリエ変換法を用いるが, これは定式化を数学的, 公式的, ルーチンのならしめ, 流力的熟練から解放する^{7), 8)}. 従来の方法^{1), 2), 3)} に対して本質的にすぐれているのは,

- ① 3次元問題を扱い得る.
- ② 微小擾乱以外の付加的仮定を必要としない.
- ③ 圧縮性流への拡張は単なる計算技術の相異で以って可能なこと. (概念的相違ではない).
- ④ 従来の翼理論との関連が明白であること.

などの諸点である.

[注] WAGNER¹⁾ の取り扱いとは2次元翼に限られている. ISAACS²⁾ の取り扱いもそうであり, また厳密ではあるがやや難解と言えるだろう. GREENBERG³⁾ は面内・面外振動を同時に行なう2次元翼を扱うが “ $\omega \rightarrow \infty$ ならば伴流の形状が正弦的になる” という特殊仮定下の定式化を小さい $\omega b/U$ の場合に適用する荒っぽさがある. WAGNER, ISAACS および GREENBERG の全研究を通じて, 現代の翼理論の定式化との関連性が薄いという欠点をもつ.

記 号

$A \equiv \dot{U} b/U^2$, reduced acceleration

$\vec{a}'$; 固定座標に対する流体粒子の加速度ベクトル

b ; 長さを無次元化する基準長, 半弦長=1

B_n ; 係数

C ; 未定関数 (常数)

D ; 抵抗

$F_L = F_{Lp} - f_L = 0$; 翼面の方程式

$F_T = 0$; 伴流面の方程式

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; x, y, z 方向の単位ベクトル, また $i = \sqrt{-1}$

K ; kernel 関数

$k = \omega b/U$; reduced frequency

l ; 翼のセミスパン

p ; 圧力 = $p_0 + p_1$

$R = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, または $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$

$s(t) \equiv \int_{t_0}^t U(\tau) d\tau$; 翼の移動距離

T ; 無揚力翼厚問題の影響関数

t ; 時間

$\vec{U}(t)$; 固定座標系に対する動き軸の速度

$\vec{u}'$; 固定座標系に対する流体粒子の速度

$= \vec{u}_0' + \vec{u}_1'$

$\vec{u}$; 動き軸に対する流体粒子の速度

$\vec{V} = \vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$

w ; normal wash

x, y, z ; 特に断らなければ運動物体に固定された動き軸に関するもので, かつ長さ b に関し無次元化されている. x は飛行方向と逆, y はスパン方向.

α, γ ; フーリエ変換パラメータ

$\vec{r} = \vec{i} \partial/\partial x + \vec{j} \partial/\partial y + \vec{k} \partial/\partial z$

τ ; 時間に関する積分変数

ϕ ; 速度ポテンシャル

$\vec{\Omega}$; 動き軸の回転角速度

ω ; 角振動数

ξ, η ; x, y 方向の積分変数

$()'$; 固定座標系で表わされた量

$()_0$; 非攪乱流

$()_t$; 攪乱量

$()_{\pm}$; 翼または伴流の上, 下面

$(\vec{\ })$; ベクトル

$()_t$; 出発状態

$(\wedge)$; フーリエ変換された量, または複素振幅

$()_{II}, ()_{III}$; それぞれ 2, 3 次元の量を表わす.

$()_w$; 壁面上の値, p_w としてのみ用いる.

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$; それぞれフーリエ変換, 逆変換オペレータ

$\Re, ()$; 実数部分

2. 動き軸に関する空気力学の基本公式

2.1 最も一般的な公式 文献 6) には次のようにまとめられている;

$$\left. \begin{array}{l} \text{運動方程式} \quad \rho \vec{a}' + \nabla p = 0 \\ \text{連続の式} \quad (\partial \rho / \partial t) + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \text{barotropic} \quad p = f(\rho) \end{array} \right\} \quad (1)$$

翼面上での境界条件

$$F_L(x, y, z, t) = 0, \quad (\partial F_L / \partial t) + \vec{u} \cdot \nabla F_L = 0 \quad (2)$$

伴流面上での境界条件

$$\left. \begin{array}{l} F_T(x, y, z, t) = 0, \quad (\partial F_T / \partial t) + \vec{u}_t \cdot \nabla F_T = 0, \\ p_+ = p_- \end{array} \right\} \quad (3)$$

ただし,

$$\vec{a}' = (\partial \vec{u}' / \partial t) + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}' + \vec{\Omega} \times \vec{u}' \quad (4)$$

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{u} + \vec{V} \quad (5)$$

$$\nabla = \vec{i} \partial/\partial x + \vec{j} \partial/\partial y + \vec{k} \partial/\partial z$$

ここで “動き軸” について少し説明しておこう. それは元来運動物体と共に運動する座標系である. これを用いれば物体の占める空間領域は時間に無関係とな

り、接線流の境界条件の定式化が容易となる。

ただし本報告において考えられる問題は、

あまり厚くない翼が面内方向に非一様運動を行なうと同時に微小な面外変位(定常)または面外振動(非定常)を行なう

という場合のそれである。このような場合に面外変位・振動を無視し、面内運動のみを実際の翼と同じくする“基本翼面”を考え、これに固定された座標軸を動き軸としてよい。

2.2 一様自由流、線形化、速度ポテンシャルの導入 次の量を一次微小量と考える、

$$\begin{cases} f_L; \text{翼面の形状に関連して与えられる既知量} \\ \phi, p, \nabla\phi; \text{未知の攪乱量} \end{cases}$$

そしてこれらの積は2次の微小量として無視する。ここで翼面の方程式は $F_L = F_{Lp} - f_L = 0$ で、また前述の基本翼面は $F_{Lp} = 0$ で与えられる。境界条件は翼上の代わりに基本翼面上で適用される。また自由流が一様であれば、非粘性の仮定と相まって速度ポテンシャルが存在するので、基礎の諸式は次のようになる：

支配的微分方程式

$$a_0^2 \nabla^2 \phi = (\partial/\partial t + u_0' \partial/\partial x - \vec{V} \cdot \nabla)^2 \phi \quad (6)$$

圧力の式、

$$\frac{p_i}{\rho} = \vec{V} \cdot \nabla \phi - \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0' \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi \quad (7)$$

接線流の条件 ($F_{Lp} = 0$ で)

$$\vec{u}_i' \cdot \nabla F_{Lp} + \vec{V} \cdot \nabla f_L - \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0' \frac{\partial}{\partial x} \right) f_L = 0 \quad (8)$$

ただし u_0' は固定座標の x' 軸方向を向いた一様自由流々速であり、 a_0 は自由流音速である。式(6)、(7)、(8)はそれぞれ文献6)の式(20)、(19)、(21)に対応するものである。以後、攪乱量を表わす添字()_iは省略する。

2.3 付加的単純化 次の単純化仮定を加える；

- ① 固定座標系に対する一様流々速はゼロ、 $u_0' = 0$
- ② 空気は非圧縮性である。 $a_0 = \infty$
- ③ 物体はほとんど平面的、 $F_L = z - f_L(x, y, t) = 0$
- ④ 物体は $-x$ 方向に並進運動する。

$$\vec{V} = \vec{U} = -U(t)\vec{i}$$

そのとき(6)、(7)、(8)より

支配的微分方程式

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \vec{u}' = \vec{u}_i' = \text{grad } \phi \quad (9)$$

圧力

$$p/\rho = -[\partial/\partial t + U(t)\partial/\partial x]\phi \quad (10)$$

接線流の条件 ($z=0$ で)、

$$w' = [\partial/\partial t + U(t)\partial/\partial x]f_L \quad (11)$$

この定式化を見て判ることは、

- (a) 翼が静止流中を $-U(t)$ で動く問題は、静止

する翼に $U(t)$ の自由流が流れ来る問題と同じである。

- (b) 線型問題ではあるが、時間 t に関してラブラ
スまたはフーリエ変換するには適していない。

それは $U(t)\phi(x, y, z, t)$ という積があるからである。

- (c) 座標の関数としては積の項がない。従ってフーリエ変換などを行なうに適している。

項目(b)をもっと判り易く説明しよう。今

$$U(t) \text{ の時間的変動部分を } U_0 \cos \omega_U t$$

$$\phi(t) \text{ の } \quad \quad \quad \phi_0(x, y, z) \cos \omega_\phi t$$

とすれば、 $U\partial\phi/\partial x$ の時間的変動部分は

$$\cos(\omega_U + \omega_\phi)t, \cos(\omega_U - \omega_\phi)t$$

を含み、したがって p は $\omega_\phi, \omega_U \pm \omega_\phi$ の3つの変動成分を含むことになる。したがって“周波数応答”の概念は使用できないのである。

以後 w' を単に w と書くことにする。

3. 非圧縮流中で前後方向に非一様運動を行なう3次元の対称物体

前節で述べたように座標に関してフーリエ変換法を適用することができる。フーリエ変換法の有用性は文献8)で確認済みである。それは渦、ダブレット、source, sinkなどの物理的モデルを考えるわずらわしさを排除して解法を普遍的、公式的、ルーチンのならしめる。

3.1 無限正弦波状の壁面上の流れ $z > 0$ の半無限空間の流れのみを考える。壁面の形状を

$$f_L \equiv R_e(f_L e^{iax + i\tau y}) \quad (12)$$

速度ポテンシャルを

$$\phi(x, y, z, t) \equiv R_e(\phi(x, y, z, t) e^{iax + i\tau y}) \quad (13)$$

とする。 ϕ の満たすべき式は

$$\phi_{xx} - R^2 \phi = 0, \quad R = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \quad (14)$$

この解のうち $z \rightarrow +\infty$ で収束するものは

$$\phi = C(\alpha, \gamma) \exp(-Rz) \quad (15)$$

壁面上の境界条件は

$$w(x, y, z) = R_e(\hat{w}(t) e^{iax + i\tau y}) \quad (16)$$

とおくとき

$$\hat{w}(t) = [\partial/\partial t + i\alpha U(t)] f_L(t) \quad (17)$$

よって

$$-CR = [\partial/\partial t + i\alpha U(t)] f_L(t)$$

この C を(15)へ入れると

$$\phi(x, z, t) = -(1/R) [\partial/\partial t + i\alpha U(t)] f_L(t) e^{-Rz} \quad (18)$$

次に圧力は $p \equiv R_e(\hat{p} e^{iax + i\tau y})$ とおくと、

$$\hat{p}/\rho = -[\partial/\partial t + i\alpha U(t)] \hat{\phi} \quad (19)$$

これに(18)を入れて $z=0$ とおくと壁面圧力 $\hat{p}_w$ は

$$\hat{p}_w/\rho = (1/R) (\partial/\partial t + i\alpha U) \hat{w}(t) \quad (20)$$

$$=(1/R)(\partial^2/\partial t^2+2iU\alpha\partial/\partial t-U^2\alpha^2+i\alpha\dot{U})f_L \quad (21)$$

式(21)の〔 〕内の第1, 2項は面外変形運動, 第3項は定常運動, 第4項は面内運動による項である。これらが単純に加算的であるのは注目に値する。

3.2 無揚力の対称翼 この場合 $z=0$ 面のうち S (翼の存在領域) 内では $w \neq 0$, それ以外では $w=0$ で, 既知である。したがって前述の無限壁面を種々の α, γ について重ね合わせれば表現できるはずである。また無揚力問題では式(21)が示すように諸効果は単純に加算できる; したがって翼面の形状は時間的に変化しないと仮定してよい。

3.2.1 翼面上の圧力分布

(21)より,

$$\hat{p}_w/\rho=(1/R)(i\alpha\dot{U}-U^2\alpha^2)f_L$$

これに, $\hat{w}=i\alpha U f_L$ を入れると,

$$\hat{p}_w/\rho U=(1/R)(i\alpha+A)\hat{w} \quad (22)$$

この両辺をフーリエ変換する。フーリエの convolution の定理を用いると

$$p_w(x, y)=\rho U \iint_S w(\xi, \eta) T_{II}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \quad (23)$$

ここで $T_{II}(x, y)$ は次式により求められる:

$$T_{II}(x, y)=T_1+AT_2 \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} T_1(x, y) \\ T_2(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} i\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \frac{e^{i\alpha x + i\gamma y}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} d\alpha d\gamma \quad (25)$$

T_2 は $\alpha=R\cos\theta$, $\gamma=R\sin\theta$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおき θ に関してまず積分し, 次いで $\int_0^\infty J_0(z) dz=1$ を用いれば決定され, 次のようになる,

$$T_2=(2\pi r)^{-1}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2} \quad (26)$$

T_1 は $T_1=\partial T_2/\partial x$ より決定されて,

$$T_1=-x(2\pi r^3)^{-1} \quad (27)$$

となる。これは source 分布から求めたものと一致する。結局,

$$T_{II}(x, y)=-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{r^3} - \frac{A}{r} \right) \quad (28)$$

式(28)を(23)と組み合わせると, 加速度 A に比例する圧力分布の生ずることが判る。これは見かけの質量の効果である。

2次元翼に関しては, テーパーなし振り下げなしの矩形平面形の大アスペクト比翼のスパン中央断面を考えればよい。式(13)で $y=0$, $w(\xi, \eta)=w(\xi)$ とすれば,

$$\hat{p}_w(x, 0)=\rho U \int_{-1}^{+1} w(\xi) T_{II}(x-\xi) d\xi \quad (29)$$

ただし

$$\begin{aligned} T_{II}(x) &\doteq \int_{-l}^l T_{III}(x, -\eta) d\eta \\ &= 2 \int_0^l T_{III}(x, \eta) d\eta \quad (l \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l T_I(x, \eta) d\eta &= \frac{-x}{2\pi} \int_0^l \frac{d\eta}{[x^2+\eta^2]^{3/2}} \\ &\doteq \frac{-1}{2\pi x} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (l \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l T_2(x, \eta) d\eta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{d\eta}{\sqrt{x^2+\eta^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{l+\sqrt{l^2+x^2}}{x} \right| \\ &\doteq \frac{1}{2\pi} \left[\ln 2l - \ln |x| + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (l \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (32)$$

よって

$$T_{II}(x) \doteq -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{x} + A \ln |x| - A \ln 2l + O\left(\frac{1}{l^2}\right) \right] \quad (l \rightarrow \infty) \quad (33)$$

この中, $O(1/l^2)$ のみならず $\ln 2l$ も無視できる。というのは,

$$\int_{-1}^1 w(\xi) \ln 2l d\xi = \text{const} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\partial f_L}{\partial \xi} d\xi = 0$$

だからである。結局

$$T_{II}(x) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{x} + A \ln |x| \right] \quad (34)$$

3.2.2 抵抗の表現 抵抗 D は次式で表わされる

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_{III} &= \iint_S p(x, y) \frac{\partial f_L}{\partial x}(x, y) dx dy \\ &= \iint_S \frac{w}{U}(x, y) p(x, y) dx dy \\ &= \rho U^2 \iiint_S \frac{w}{U}(x, y) \frac{w}{U}(\xi, \eta) \\ &\quad \times T_{II}(x-\xi, y-\eta) dx dy d\xi d\eta \quad (35) \end{aligned}$$

これに(28)の T_{II} を入れれば $A=0$ のときの抵抗が消えることは, T_{II} が $(x-\xi)$ の奇関数となることから明らかである。かくして抵抗は T_{II} のうちの A に比例する項のみから発生する。これは見かけの質量の効果であり, 正となるであろう。2次元翼の場合も同様であって, T_{II} のうち, $A \ln |x|$ 項のみから抵抗力が生ずる。次にそれを計算してみよう。

$$\begin{aligned} D_{II} &= -\frac{2\rho U^2}{\pi} A \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{w}{U}(x) \\ &\quad \times \frac{w}{U}(\xi) \ln |x-\xi| dx d\xi \end{aligned} \quad (36)$$

$x = \cos \theta$, $f_L = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m\theta$ とかくと,

$$\begin{aligned} (w/U)dx &= (\partial f_L / \partial x)dx = (\partial f_L / \partial \theta)d\theta \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m B_m \cos m\theta d\theta \end{aligned} \quad (37)$$

となる。さらに次の公式がある:

$$\ln[4(\cos \theta - \cos \varphi)^2] = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta \cos n\varphi}{n} \quad (38)$$

これらを用いると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{w}{U} (x) \frac{w}{U} (\xi) \ln|x-\xi| dx d\xi \\ = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m B_m^2 \end{aligned} \quad (39)$$

を容易に証明することができる。よって

$$\frac{\partial D_{II}}{\partial A} = \pi \rho U^2 \sum_{m=1}^{\infty} m B_m^2 > 0 \quad (40)$$

特に第1項のみをとると扁平楕円断面のそれとなり、流体力学のテキスト⁹⁾に記載されている値と一致する。ただし現理論は線形理論であり丸い前後端をもつ物体に用いるのは無理である。したがってこの一致は幸運であろう。

4. 揚力問題

揚力問題では、 p, ϕ は z の奇関数となる。よって $z > 0$ の半無限空間の状況が判れば十分であり、再び無限波状壁面に関する解から出発できる。ただし次の注意を必要とする。i) $z=0$ 面のうち、翼面積域 S 内では w が与えられ p_w が未知である。その他では $p_w=0$ で w が未知である (混合境界値問題), ii) 無限波状壁面解から出発するならば一般に $\partial f_L / \partial t \neq 0$ である。何となれば翼面の形状そのものが時間的に変わらずとも、加速度飛行をするばあい伴流面の形状は (翼とともに動く動き軸から見ても) 時間的に変化するからである。

4.1 $w-p_w$ 間の一般的関係式 式 (20) から出発する。これを $\hat{w}(t)$ に関する時間 t の一階線形常微分方程式とみて解くと

$$\hat{w}(t) = \int_{t_0}^t \frac{\hat{p}_w(\alpha, \gamma, t_1)}{\rho} R(\alpha, \gamma) e^{i\alpha[s(t_1)-s(t)]} dt_1 \quad (41)$$

これをフーリエの convolution の定理を用いて逆変換すれば,

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^t dt_1 \iint_S p_w(\xi, \eta, t_1) \\ &\quad \times \mathcal{K}(x-\xi, y-\eta, t, t_1) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (42)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, y, t, t_1) \\ = \mathcal{F}_\alpha^{-1} \mathcal{F}_\gamma^{-1} \{ R(\alpha, \gamma) e^{i\alpha[s(t_1)-s(t)]} \} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \\ &\quad \times e^{i\alpha[x+s(t_1)-s(t)] + i\gamma y} d\alpha d\gamma \end{aligned} \quad (44)$$

この逆変換は容易に評価されて⁸⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, y, t, t_1) \\ = \frac{-1}{2\pi} \{ [x+s(t_1)-s(t)]^2 + y^2 \}^{-3/2} \end{aligned} \quad (45)$$

よって

$$\begin{aligned} w(x, y, t) \\ = \frac{-1}{2\pi\rho} \int_{t_0}^t dt_1 \\ \times \iint_S \frac{p_w(\xi, \eta, t_1) d\xi d\eta}{\{ [(x-\xi)+s(t_1)-s(t)]^2 + (y-\eta)^2 \}^{3/2}} \end{aligned} \quad (46)$$

すなわち揚力問題では upwash は過去における翼の運動の全歴史により支配され、現時点における加速度 $\dot{U}(t)$ の効果を陽には含まない。これは抵抗問題との大きい相異点である。式 (46) は、翼面上の normal wash w が与えられるとき翼上の圧力 p_w を求めるための積分方程式として使用できる。これを解くことは今後の課題である。

4.2 特殊の場合への単純化

4.2.1 一定速度の飛行、かつ面外変形運動もない場合 この場合、式 (46) は次のようになる。

$$w(x, y) = \iint_S p_w(\xi, \eta) \mathbf{K}_{III}(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \quad (47)$$

ただし

$$\mathbf{K}_{III}(x, y) = \frac{-1}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^t \frac{dt_1}{\{ [x+U(t_1-t)]^2 + y^2 \}^{3/2}}$$

$x+U(t_1-t) \equiv \tau$ により積分変数を t_1 より τ へ変えれば容易に積分できて,

$$\mathbf{K}_{III}(x, y) = \frac{-1}{2\pi\rho U} \frac{1}{y^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (48)$$

これは非圧縮定常3次元の既知の kernel 関数である。

4.2.2 2次元翼の場合 式 (46) で、 $y=0$, $p_w = p_w(\xi, t_1)$ は η に無関係とし、 η で $-\infty$ から $+\infty$ にわたり積分する。そのとき

$$w(x, t) = -\frac{1}{\pi\rho} \int_{-1}^1 d\xi \int_{t_0}^t \frac{p_w(\xi, t_1) dt_1}{\{ (x-\xi)+s(t_1)-s(t) \}^2} \quad (49)$$

特に一様飛行速度で時間的に調和振動する面外運動を行なう場合には、 $t_0 \rightarrow -\infty$, $s(t_1)-s(t) = U(t_1-t)$, $p_w = p_w^* e^{i\omega t}$ などとおくことにより (49) は次のようになる:

$$w^*(x) = \frac{-1}{\pi\rho U} \int_{-1}^1 p_w^*(\xi) e^{-ik(x-\xi)} d\xi$$

$$\times \int_{-\infty}^{x-\xi} \frac{e^{ik\tau}}{\tau^2} d\tau \quad (50)$$

ここで $k \equiv \omega/U$, または最終積分は MANGLER の主値をとる. 最終積分を部分積分し, $P^* = -2p_w^*/\rho U^2$ とおけば,

$$\frac{w^*(x)}{U} = k \int_{-1}^1 P^*(\xi) K_{II}(k(x-\xi)) d\xi \quad (51)$$

ただし

$$K_{II}(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{x} - i e^{-ix} \int_{-\infty}^x \frac{e^{iu}}{u} du \right] \quad (52)$$

これは 2 次元非圧縮性流に適用された POSSIO の kernel の関数⁸⁾ に外ならない.

このように本論文で提出された定式化は, 飛行方向の非一様運動をカバーし, しかもそれが無いときには従来の面外運動の定式化に帰着されるので, きわめて自然な一般化であるといえる.

[注] (52) の $K_{II}(x)$ をさらに変形すれば

$$K_{II}(x) = \frac{1}{2\pi x} - \frac{ie^{-ix}}{2\pi} \left\{ C_i(x) + i \left[S_i(x) + \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} C_i(x) &= - \int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du \\ S_i(x) &= \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} + s_i(x) \\ s_i(x) &= - \int_x^\infty \frac{\sin u}{u} du \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

と書くことができる.

5. 結論的考察

面内非一様運動する翼理論の第一歩として, 非圧縮ポテンシャル流中の問題を選んだ. しかし圧縮性流の問題へ拡張することは, 計算技術を複雑化するのみであり, 概念的進歩を要求しないであろう.

方法として座標に関するフーリエ変換法を選んだのは, これが面外変位運動の場合に有効であることが立証されていること, ならびに公式的, ルーチン的解法をもたらすからである⁹⁾ (時間に関する変換は有用ではない).

無限波状壁の問題をまず解き, それを重ね合わせることで無揚力対称翼の問題, 厚さのない揚力問題を定式化した. 無揚力問題では, 面外運動, 面内運動, 定常運動の効果は単純に加算的な形となり, 現時点の瞬間的状況のみで決定され, 過去の翼運動の歴史

は関与しない. これに反して揚力問題では過去の翼運動の全歴史が関与し, 諸々の効果を単純に分離しえない.

こういうことは 2 次元物体については既に周知のことである⁹⁾. しかし本論文では, 微小擾乱の枠内ではあるが, 3 次元物体について定式化された. しかもその方法は圧縮性流へ拡張する場合にも基本的には変わらないであろう.

無揚力抵抗問題では, 飛行加速度に比例する抵抗が現われる. 2 次元の場合には, 加速度があるとき正の抗力が生じ, その値は楕円断面に関してチェックされた.

翼厚のない揚力問題では, 飛行加速度の効果が陽に発現しないことは過去の多くの研究^{1), 2), 3), 9)} と同じである. しかし, 本研究においては 3 次元翼に関して定式化されている点, 面内運動が一樣であるばあい既存の定式化に容易に帰着されう点, 定式化の方法が普遍的である点, において過去の多くの方法よりも優れている.

参考文献

- 1) WAGNER, H.: Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 5, Ende Februar 1925, Heft 1. Seite 17-35.
- 2) ISAACS, R.: Airfoil theory for flows of variable velocity, Journal of the Aeronautical Sciences, Jan. 1945, pp. 113-117.
- 3) GREENBERG, M.: Airfoil in sinusoidal motion in a pulsating stream, NACA TN 1326, 1946.
- 4) ISOGAI, K. and ICHIKAWA, T.: Lifting-surface theory for a wing oscillating in yaw and sideslip with angle of attack; AIAA Journal, Vol. 11, No. 5, May 1973, pp. 599-606.
- 5) ISOGAI, K.: Lifting-surface theory for an oscillating T-Tail, AIAA Journal, Vol. 12, No. 1, Jan. 1974, pp. 28-37.
- 6) REISSNER, E.: Boundary value problems in aerodynamics of lifting surfaces in non-uniform motion, Bull. of the American Math. Soc. 1949, Vol. 55, pp. 825-850.
- 7) VENTRES, C. S.: Shear flow aerodynamics: Lifting surface theory, AIAA Journal, Vol. 13, No. 9, Sept. 1975, pp. 1183-1189.
- 8) 安東茂典, 市川明夫: フーリエ変換法の揚力面理論への適用について, 日本航空宇宙学会誌, 第 25 巻第 280 号, 1977, pp. 238-243.
- 9) 今井功: 流体力学 (前編), 裳華房, 1975, pp. 404-415.