分留意することが必要である。

- 2) 熱残留応力は繊維を中心とした同心円状に近い分布をしている。そしてこのような傾向は材料定数や、平面応力と一般化平面歪みとの相違等によりあまり影響されない。熱残留応力問題の六角形配列モデルの基礎領域は、外力の作用する問題と異なり $\theta=0\sim\pi/6$ の三角形である。
- 3) CFRP 一方向材を想定した計算結果から、繊維中では3軸圧縮、マトリックス中ではほとんどの部分で3軸引張状態が生じていることが明らかとなった。そして σ_1 の最大値は界面で発生していることも明らかとなった。
- 4) 繊維マトリックス界面では負の σ_r が発生しており、 $\tau_{r\theta}$ はこれに比べ十分小さい。

これで一方向材内部の熱残留応力についてはほぼ説明することができたと考えられる。これに、さらに外力が重畳する時の問題、強度との関連については、別の論文で述べる。

参 考 文 献

- 1) 石川隆司, 小林繁夫: 一方向繊維強化複合材料の応力解析; 第1報: 繊維に沿うせん断荷重, 日本複合材料学会誌, 2巻, 3号 (1976), p. 126.
- 2) 石川隆司, 小林繁夫: 一方向繊維強化複合材料の応力解析; 第2報, 繊維横断面内の荷重, 日本複合材料学会誌, 3巻, 4号 (1977), p. 141.
- 3) 小林繁夫, 石川隆司: 一方向繊維強化複合材料の弾性係数, 日本航空宇宙学会誌, 23巻, 256号 (1975), p. 319.
- 4) 石川隆司, 小林繁夫: 一方向繊維強化複合材料の熱膨脹係数; 第1報: 解析, 日本航空宇宙学会誌, 25巻, 283号 (1977), p. 394.
- 5) T. KOUFOPOULOS and P.S. THEOCARIS: Shrinkage Stress in Two-Phase Materials, J. Comp. Mater., Vol. 3 (1969), p. 308.
- 6) G.J. DVORAK, M.S.M. RAO and J.Q. TARN: Yielding in Unidirectional Composites under External Loads and Temperature Changes, J. Comp. Mater., Vol. 7 (1973), p. 194.
- 7) 浜本章, 金原勲, 竹鼻三雄: FRP 成形時の残留応力と白化について, 日本複合材料学会第2回復合材料シンポジウム講演要旨集, 1976, p. 48.
- 8) 石川隆司, 小山一夫, 小林繁夫: CFRP 材およびエポキシ樹脂の高温における弾性係数, 第19回構造強度に関する講演会講演集 (昭52年7月)。

地面近くの縦横比の大きな翼の揚力線近似についての一考察*

A Note of Lifting-Line Theory on Wings with High Aspect Ratio in Ground Effect

木 田 輝 彦**・宮 井 善 弘**

Teruhiko KIDA and Yoshihiro MIYAI

Abstract

A lifting-line theory is examined in detail for a wing with a high aspect ratio in the ground effect. Particularly, the method of the asymptotic expansions is applied to the integral equation given by the lifting-surface theory, unlike the method of the matched asymptotic expansions to a differential equation. Furthermore, the integro-differential equation for a rectangular plane wing is estimated analytically by calculating the distribution of the circulation round a semi-infinite wing of constant chord, and comparison of the lift coefficient with earlier works is carried out.

1. ま え が き

谷が¹⁾, プラントルの複葉翼の干渉係数を利用し, さらに揚力線近似を用いて, 翼の地面効果を解析して以来, 翼の地面効果についての研究が続けられてき

た^{2), 3), 4), 5)}. 三次元翼の地面効果を考える場合, 揚力線近似の考えは計算が簡単であるという利点を持つため, 非常に有効で, 反りのある翼や最適翼の問題に用いられている^{4), 5)}.

揚力線近似理論は, プラントルによって提案されて以後, 種々の問題に用いられ, さらに, 近年, VAN DYKE は特異摂動法 (matched asymptotic expansions) を応用し, 揚力線近似についての理論的根拠を確立した⁶⁾. 彼の結果によると, 揚力係数 C_L は, 縦横比 A の逆数について

$$C_L \sim C_{L0} + \frac{1}{A} C_{L1} + \frac{1}{A^2} C_{L2} \log A + \frac{1}{A^2} C_{L3} + \dots$$

と漸近展開できる。このように, 彼の手法を用いると, 縦横比についての性質がよく理解できる上に, 積分方程式を解く必要がないので, 縦横比の大きな種々の翼に応用されている^{7), 8)}. しかしながら, 筆者らの知るかぎり, 翼の地面効果を取り扱ったこの種の理論研究はないようである。特に, 地面効果を受ける翼で

* 昭和52年7月22日原稿受理

** 大阪府立大学工学部機械工学科

は、誘導迎角が縦横比の関数となるが、縦横比に対しこれをどのように評価するかという問題は十分に議論されていないようである。

本報の目的は、そこでまず、摂動法を用い、翼の地面効果について揚力線近似理論を導くことであり、次に、揚力係数が、縦横比に関し、どのように漸近展開されるかを調べることである。このため、誘導迎角が縦横比に対し、どのように漸近展開できるか検討し、さらに翼形状との関連を調べる。さらに進んで、矩形翼についてのプラントルの方程式に相当する微積分方程式を導き、これを解析する。ただ、本報で用いた手法は VAN DYKE と異なり、著者らが二次元地面効果翼で研究してきた摂動法³⁾を直接揚力面理論に適用したもので、VAN DYKE⁶⁾のようなマッチングを必要としないのが特色である。

記 号

A	: 縦横比
A_0	: $A_0 = C_t^{(2)}/8\pi$
$A_c(\omega, \alpha_0)$	: $A_c(\omega, \alpha_0) = i[g(z_f) - g(\varepsilon_f)]/\pi$
a_0	: $a_0 = 2\varepsilon Z_0$
B	: ベータ関数
b	: 局所半翼幅長さ
C_L	: 揚力係数
$C_t^{(2)}$	: 局所揚力傾斜
$c(y)$	: 局所翼弦長さ/ ε
C_i, s_i	: 積分余弦関数, 積分正弦関数
$f_0(y)$	: $f_0(y) = 1 - \Gamma_r(\varepsilon y)/[\alpha C_t^{(2)}/2]$
$f(y)$	: (22)式で定義された関数
$F_+(\omega)$	: (25)式で定義された $f(y)$ のフーリエ変換関数
$g(y)$	: (21)式で定義された関数
$g(z_f)$	: (27)式で定義された関数
$G_0(\omega, \alpha_0)$	: $G_0(\omega, \alpha_0) = \omega/(\omega^2 + \alpha_0^2)^{1/2} - A_c(\omega, \alpha_0)$
$H(\omega, \alpha_0)$	: (28)式で定義された関数
h	: $h = Z_0/c(0)$
J	: (8)式で定義された関数
K_1	: 1次のオーダの変形ベッセル関数
k	: $k = 4/B\left(\frac{1}{2}, n+1\right)$
$L_{\pm}(\omega, \alpha_0)$	: $L_{\pm}(\omega, \alpha_0)/L_{-}(\omega, \alpha_0) = 1 + \pi A_0 \omega G_0(\omega, \alpha_0)$
$M_{-}(\omega, \alpha_0)$	: フーリエ変換により生じた未知関数
n	: 翼形状を表わすパラメータ
R, R_1, R_2	: $R = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z+z_0)^2]^{1/2}$, $R_1 = [(1+y)^2 + a_0^2]^{1/2}$, $R_2 = [(1-y)^2 + a_0^2]^{1/2}$
r	: $r = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$

S	: 翼面
t	: 実変数
u, ζ	: 積分変数
w	: z 方向の擾乱速度
X_T	: 前縁までの x 座標/ ε , 第1図参照
X, X', X_0, X_1	: $X = x/\varepsilon$, $X' = X - X_T$, $X_0 = X - X_1$, $X_1 = x_1/\varepsilon$
x, y, z	: 座標系
x_1, y_1	: 積分変数
x_0, y_0	: $x_0 = x - x_1$, $y_0 = y - y_1$
$\bar{y}$	: $\bar{y} = (1+y)/2$
z_0	: 翼の地面からの高さ
Z_0	: $Z_0 = z_0/\varepsilon$
z_c, z_f	: $z_c = y + ia_0$, $z_f = Z_0(\alpha_0 + i\omega)$
ε	: $\varepsilon = 1/A$
γ	: 翼面上の渦分布
$\Gamma(y)$	: (7)式で定義された循環分布
$\Gamma_r(\bar{y})$	: $\Gamma_r(\bar{y}) = \Gamma(-1+2\bar{y})$
φ	: 擾乱速度ポテンシャル
α	: 翼迎角
α_w	: 局所翼迎角
α_0, δ	: 微少なパラメータ
β	: $\beta = (1-n) \left[\tan^{-1} \frac{a_0}{1+y} - \tan^{-1} \frac{a_0}{1-y} \right]$
添字	
+	: $I_m \omega > -\alpha_0$ で正則な関数
-	: $I_m \omega < \alpha_0$ で正則な関数

2. 基礎式

座標系 (x, y, z) を第1図のように取り、速度は一樣流れの速度で、また、長さは半翼幅長さで無次元化する。また、この図に示すように、翼前縁までの長さを $\varepsilon X_T(y)$ とし、翼弦長さを $\varepsilon c(y)$ とする。ここで、 ε は縦横比 A の逆数である。

$$\varepsilon = 1/A \quad (1)$$

翼面上の渦分布を $\gamma(x, y)$ で表わすと、擾乱速度ポテンシャル $\varphi(x, y, z)$ は⁹⁾

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(z-z_0)\gamma(x_1, y_1)}{r[r-(x-x_1)]} dx_1 dy_1 - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(z+z_0)\gamma(x_1, y_1)}{R[R-(x-x_1)]} dx_1 dy_1, \quad (2)$$

ただし、

$$r = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2},$$

$$R = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z+z_0)^2]^{1/2},$$

であり、積分領域 S は翼面全体である。また、 z_0 は翼の地面高さであり、谷¹⁾と同じく $1/4$ 翼弦長での地面高さとした [本報で取り扱っている線形理論の範囲

第1図 物理面と座標系

内では、 z_0 は翼面の任意の位置の高さでよいが、上述のように定めた。

翼面上の z 方向の擾乱速度 $w(x, y)$ は、線形理論では、(2)式を z で微分し、 $z=z_0$ と置けばよい。そこで、(2)式を z で微分し、 $z=z_0$ と置き、さらに部分積分を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} w = & -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \gamma(x_1, y_1)}{\partial y_1} \frac{1}{y_0} \\ & \times \left[1 + \frac{(y_0^2 + x_0^2)^{1/2}}{x_0} \right] dx_1 dy_1 \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \gamma(x_1, y_1)}{\partial y_1} \frac{y_0}{y_0^2 + 4z_0^2} dx_1 dy_1 \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \gamma(x_1, y_1)}{\partial y_1} \frac{x_0}{x_0^2 + 4z_0^2} \\ & \times \frac{y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2)^{1/2}} dx_1 dy_1 \\ & + \frac{1}{8\pi} \iint_S \frac{\partial^2 \gamma(x_1, y_1)}{\partial y_1^2} \frac{x_0}{|x_0|} \\ & \times \log \left[\frac{(x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2)^{1/2} - |x_0|}{(x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2)^{1/2} + |x_0|} \right] dx_1 dy_1, \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $x_0 = x - x_1$ 、 $y_0 = y - y_1$ である。

本報では、縦横比 A の大きい場合を取り扱うので、(1)式から ε は微量な量となる。 $c(y)$ は ε に関しオーダー1の y の関数であるので、(3)式の x_1 に関する積分領域は ε のオーダーになる。また、 w に関する境界条件 [翼面に沿って流れるという条件] から、 x もまたオーダー ε の範囲である。そこで、次のように x 座標を拡大しよう。

$$x = \varepsilon X, \quad x_1 = \varepsilon X_1, \quad (4)$$

さらに、翼の地面高さ z_0 も、翼弦長さとほぼ同じとすると、

$$z_0 = \varepsilon Z_0, \quad (5)$$

とおくことができ、 Z_0 も ε に関し1のオーダーとなる。

以上の考察から、 $\gamma(X, y)$ に関する基礎式は、(3)式に(4)、(5)式を代入し、次式の境界条件とから求められる。

$w(X, y) = -\alpha_w(X, y)$; $X_T(y) \leq X \leq c(y)$, $|y| \leq 1$,
ただし、 α_w は局所迎角で、反りのない平板翼の場合には $\alpha_w = \alpha$ で、 α は翼迎角である。

筆者らが二次元翼の問題に提案した手法³⁾を用い、(3)式の右辺を ε で漸近展開しよう。まず、 y_1 に関する積分領域を $(-b, y-\delta)$, $(y-\delta, y+\delta)$, $(y+\delta, b)$ に分ける。ただし、 b は第1図に示す局所半翼幅長さで X_1 の関数である。また、 δ は $0(1) > 0(\delta) > 0(\varepsilon)$ を満足する任意の微小量である。ここでは、(3)式の右辺の第3項のみを詳説するが、他の第1, 4項に関しても同様に行なうことができる。

$X_0 = X - X_1$ とすると、 $0(\delta) > 0(\varepsilon)$ より、

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-b}^{y-\delta} + \int_{y+\delta}^b \right) \frac{\partial \gamma(X_1, y_1)}{\partial y_1} \\ & \times \frac{y_0}{(\varepsilon^2 X_0^2 + y_0^2 + 4\varepsilon^2 Z_0^2)^{1/2}} dy_1 \\ & \approx \left(\int_{-b}^{y-\delta} + \int_{y+\delta}^b \right) \frac{\partial \gamma(X_1, y_1)}{\partial y_1} \frac{y_0}{|y_0|} \\ & \times \left[1 - \frac{\varepsilon^2 X_0^2 + 4Z_0^2}{2y_0^2} + \dots \right] dy_1. \end{aligned}$$

上式に部分積分を利用し、翼端で $\gamma(X, y)$ および $\gamma(X, y)$ の y に関する微分が零であること [これは、積分領域を翼面より無限小だけ拡大したと考えればよい; Ref. 9, p. 132] から、上式は

$$\begin{aligned} & \approx 2\gamma(X_1, y) + \delta^2 \frac{\partial^2 \gamma(X_1, y)}{\partial y^2} \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} (X_0^2 + 4Z_0^2) \left\{ -2(1 - \log \delta) \frac{\partial^2 \gamma(X_1, y)}{\partial y^2} \right. \\ & \left. - \int_{-b}^b \frac{\partial^3 \gamma(X_1, y)}{\partial y_1^3} \log |y_0| \operatorname{sgn}(y_0) dy_1 \right\}. \end{aligned}$$

さらに、 $y-\delta \leq y_1 \leq y+\delta$ で $\gamma(X_1, y_1)$ が、 y_1 について解析関数であると仮定 [VAN DYKE の地面効果のない通常翼の場合⁶⁾ の翼形状が翼幅方向変化が滑めらかであるという仮定と同じ] すると、

$$\begin{aligned} & \int_{y-\delta}^{y+\delta} \frac{\partial \gamma(X_1, y_1)}{\partial y_1} \frac{y_0}{(\varepsilon^2 X_0^2 + y_0^2 + 4\varepsilon^2 Z_0^2)^{1/2}} dy_1 \\ & \approx -\delta^2 \frac{\partial^2 \gamma(X_1, y)}{\partial y^2} - \varepsilon^2 (X_0^2 + 4Z_0^2) \frac{\partial^2 \gamma(X_1, y)}{\partial y^2} \\ & \times \left[\frac{1}{2} - \log \delta + \log \varepsilon - \log 2 \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\log(X_0^2+4Z_0^2)\Big].$$

したがって、(3)式の右辺の第3項は、

$$\begin{aligned} &\approx 2\gamma(X_1, y) + \varepsilon^2(X_0^2 + 4Z_0^2) \left[\frac{\partial^2 \gamma(X_1, y)}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} + \log 2 - \log \varepsilon - \frac{1}{2} \log(X_0^2 + 4Z_0^2) \right\} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{-b}^b \frac{\partial^3 \gamma(X_1, y_1)}{\partial y_1^3} \log |y_0| \operatorname{sgn}(y_0) dy_1 \right]. \end{aligned}$$

同様に、(3)式の右辺の第1, 4項を ε で展開することができる。ここで、 $X = X_T(y) + X'$ と新しい変数 X' を導入し、その後再び X' を X と書き改める。これらの結果を整理すると、(3)式は、

$$\begin{aligned} w(X, y) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{c(y)} \frac{\gamma(X_1, y)}{X_0} dX_1 \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{c(y)} \frac{X_0}{X_0^2 + 4Z_0^2} \gamma(X_1, y) dX_1 + \varepsilon J \\ & + \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_0^{c(y)} \frac{\partial^2 \gamma(X_1, y)}{\partial y^2} \left\{ Z_0 \tan^{-1} \frac{X_0}{2Z_0} \right. \\ & \left. + \frac{X_0}{8} \log \left(\frac{X_0^2 + 4Z_0^2}{X_0^2} \right) \right\} dX_1, \quad (6) \end{aligned}$$

$$w(X, y) = -\alpha_w; \quad 0 \leq X \leq c(y),$$

ただし、

$$c(y) \Gamma(y) = \int_0^{c(y)} \gamma(X_1, y) dX_1, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} J(X, y) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial y_1} \{c(y_1) \Gamma(y_1)\} \\ & \times \left(\frac{y_0}{y_0^2 + 4\varepsilon^2 Z_0^2} - \frac{1}{y_0} \right) dy_1. \quad (8) \end{aligned}$$

3. 積分 J の評価

ここで、(8)式で定義された J について考えてみよう。翼面を一本の直線に置きかえられたとすると、実翼と鏡像翼とからの自由渦による翼に生じる誘導迎角は、ちょうど εJ である。したがって、翼を一本の束縛渦で置きかえて考えると、 εJ は誘導迎角と考えることができよう。

一方、自由表面下の超空洞翼の線形理論の中に、 J に相当する誘導迎角をさらに ε で展開している論文もある¹⁰⁾。つまり、 J も被積分関数の中に ε を含んでいるので、 ε で展開しようとする考えである。この考えによると、 J は、

$$J \approx \varepsilon \frac{Z_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{c(y) \Gamma(y)\}, \quad (9)$$

と展開できる。

さて、今 J が(9)式のように展開され得たとすると、(6)式から渦分布 $\gamma(X, y)$ は、

$$\gamma(X, y) \approx \gamma_0(X, y) + \varepsilon^2 \gamma_1(X, y) + \dots,$$

と表わされる。この結果、平板翼の場合には、

$$\begin{aligned} -\alpha_n = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{c(y)} \frac{\gamma_n(X_1, y)}{X_0} dX_1 \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{c(y)} \frac{X_0}{X_0^2 + 4Z_0^2} \gamma_n(X_1, y) dX_1, \quad (10) \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha_0 = \alpha$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{Z_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{c(y) \Gamma_0(y)\} \\ & + \frac{Z_0}{\pi} \int_0^{c(y)} \frac{\partial^2 \gamma_0(X_1, y)}{\partial y^2} \tan^{-1} \frac{X_0}{2Z_0} dX_1 \\ & + \frac{1}{8\pi} \int_0^{c(y)} \frac{\partial^2 \gamma_0(X_1, y)}{\partial y^2} X_0 \log \left(\frac{X_0^2 + 4Z_0^2}{X_0^2} \right) dX_1, \quad (11) \end{aligned}$$

となる。ここで、 Γ_0 は循環 $\Gamma(y)$ の第1次近似で、

$$\Gamma(y) = \Gamma_0(y) + \varepsilon^2 \Gamma_1(y) + \dots,$$

$$c(y) \Gamma_n(y) = \int_0^{c(y)} \gamma_n(X, y) dX; \quad n=0, 1, \dots$$

(10)式と二次元地面効果翼との関連から、筆者らの二次元地面効果翼の結果⁹⁾を用いることができる。それによると、地面高さが比較的高い場合 ($Z_0 \geq 0.3 c(0)$),

$$\gamma_0(X, y) \sim \alpha \{(c-X)/X\}^{1/2}, \quad \Gamma_0(y) \sim 2\pi\alpha, \quad (12)$$

と表わされる。

今ここで、翼形状が

$$c(y) = k(1-y^2)^n, \quad k=4/B\left(\frac{1}{2}, n+1\right); \quad n>0, \quad (13)$$

と表わされる場合を考えてみよう。VAN DYKE⁹⁾の結果によると、ある与えられた $c(y)$ に対し、渦分布 $\gamma_n(X, y)$ の翼弦方向の積分により得られる循環分布 $\Gamma_n(y)$ が、例え翼端で($y=\pm 1$)発散しても、揚力係数を求める積分 $\int_{-1}^1 c(y) \Gamma_n(y) dy$ が発散しないならば、これにより求められた揚力係数は妥当な値となっていることを示唆している。そこで、この点について考えてみよう。(13)式の $c(y)$ に対し(11)式から

$$\alpha_1 \sim 0[(1-y^2)^{n-2}]; \quad y \rightarrow \pm 1,$$

となる。よって、 $\Gamma_1(X, y) \sim 0[(1-y^2)^{n-2}]$ となるので、(11)式の右辺の第1項による $\int_{-1}^1 c \Gamma_1 dy$ が発散しないためには、 $2n-2 > -1$ 、つまり、 $n > 1/2$ でなければならない。もし、 $n > 1/2$ ならば、したがって、(9)式の展開は可能で、オーダー ε^2 までの揚力係数を求めることができる。なぜなら、(11)式の右辺の残りの項も $y \rightarrow \pm 1$ に対し、 $0[(1-y^2)^{2n-2}]$ となっているので、 $3n-2 > -1$ 、つまり $n > 1/3$ であれば、この項による $\int_{-1}^1 c \Gamma_1 dy$ もまた求めることができるからである。以上の考察から、翼形がだ円であれば [$n=1/2$], $\int_{-1}^1 c \Gamma_1 dy$ は発散する。したがって、 $n=0$ の矩形翼

の場合、地面効果に関する揚力線近似理論では、誘導迎角として εJ を用いた方が適切であろう。

さて、もう少し詳しく (13) 式の翼形状に対し、 J の値はどのように ε で展開されるかを考えてみよう。

(12) 式から、 $c\Gamma_0 \approx 2\pi\alpha k(1-y^2)^n$ となるので、

$$J \approx \frac{\alpha k n \pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-y_1^2)^{1-n}} \times \left[\frac{z_c}{y_1 - z_c} + \frac{\bar{z}_c}{z_1 - \bar{z}_c} - \frac{2y}{y_1 - y} \right] dy_1, \quad (14)$$

$$z_c = y + ia_0, \quad a_0 = 2\varepsilon Z_0,$$

ここで、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dy_1}{(1-y_1^2)^\delta (y_1 - z)} = \frac{e^{2\pi\beta i}}{\sin \pi\beta (z^2 - 1)^\delta},$$

$$z = x + iy,$$

を用いると、(14) 式は

$$J \approx -\frac{\alpha k n \pi}{\sin \pi n (R_1 R_2)^{1-n}} \times [y \{ \cos \beta \cos \pi n - \sin \beta \sin \pi n \} + a_0 \{ \cos \beta \sin \pi n + \sin \beta \cos \pi n \}] + \pi \alpha k n \cot \pi n \frac{y}{(1-y^2)^{1-n}}, \quad (15)$$

ただし、

$$\beta = (1-n) \left[\tan^{-1} \frac{a_0}{1+y} - \tan^{-1} \frac{a_0}{1-y} \right],$$

$$R_1 = \{(1+y)^2 + a_0^2\}^{1/2}, \quad R_2 = \{(1-y)^2 + a_0^2\}^{1/2}.$$

(12) 式から、 $\Gamma_1(y) \sim 2\pi J(y)$ となる。そこで、 β が y について奇関数であることから、 $\Gamma_1(y)$ による揚力係数を求める積分は、

$$\int_{-1}^1 c(y) \Gamma_1(y) dy \sim 4\pi^2 k^2 \alpha n \times \int_0^1 \frac{(1-y_1^2)^n}{(R_1 R_2)^{1-n}} [y \sin \beta - a_0 \cos \beta] dy.$$

ここでも、積分領域を $(0, 1-\delta)$, $(1-\delta, 1)$ とに分割し、前節と同じように ε に関し展開すると、上式は

$$\sim 4\pi^2 k^2 \alpha n \left[-\frac{a_0^{2n}}{2^{1-2n}} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\cos^n \beta \sin(1-n)\beta}{\sin^{1+2n} \beta} - \frac{1-n}{\beta^{2n}} \right\} d\beta + \begin{cases} 0(a_0); & n \neq 1/2, \\ \frac{a_0}{2} \log a_0; & n = 1/2 \end{cases} \right],$$

となる。つまり、 $a_0 \sim O(\varepsilon)$ であるので、 $n > 1/2$ ならば J は ε のオーダーとなり、 $n = 1/2$ なら、 J は $\varepsilon \log \varepsilon$ の項を含むことになる。したがって、渦分布は次のように表わすことができよう。

$$\gamma(X, y) = \gamma_0(X, y) + \varepsilon^2 \log \varepsilon \gamma_1(X, y) + \varepsilon^2 \gamma_2(X, y) + \dots; \quad n = 1/2,$$

$$\gamma(X, y) = \gamma_0(X, y) + \varepsilon^{2n+1} \gamma_1(X, y) + \varepsilon^2 \gamma_2(X, y) + \dots; \quad 1/3 < n < 1/2,$$

$$\gamma(X, y) = \gamma_0(X, y) + \varepsilon^2 \gamma_1(X, y) + \dots; \quad n > 1/2.$$

文献 3) の結果を利用し、 $Z_0 > 0.3c(0)$ の場合、だ円形翼では、 h を $Z_0/c(0)$ と定義すると、

$$C_L \approx 2\pi\alpha \left[1 + \frac{3}{128} \frac{1}{h^2} - \frac{15}{1024} \frac{1}{h^4} + \frac{32}{\pi^2} h \varepsilon^2 \log \left(\frac{8\varepsilon h}{\pi} \right) + O(\varepsilon^2) \right]. \quad (16)$$

4. 矩形翼

矩形翼では、前節で述べたように (6) 式の展開は許されない。しかし、プラントルの揚力線近似の理論が、翼の地面効果にも適用できると考えると、誘導迎角は (8) 式の J により与えられる。

したがって、二次元の地面効果翼の揚力係数を $\alpha C_L^{(2)}$ とすると、循環 $\Gamma(y)$ は、

$$\Gamma(y) = \frac{C_L^{(2)}}{2} \left[\alpha + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\Gamma(y_1)}{dy_1} \left\{ \frac{y_0}{y_0^2 + 4\varepsilon^2 Z_0^2} - \frac{1}{y_0} \right\} dy_1 \right]$$

となる [$c(y) \equiv 2$ であることから]。

さて、 $y = -1 + 2\bar{y}$, $y_1 = -1 + 2\bar{y}_1$, $\Gamma(y) = \Gamma_r(\bar{y})$ とすると、

$$\Gamma_r(\bar{y}) = \frac{C_L^{(2)}}{2} \left[\alpha + \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^1 \frac{d\Gamma_r(\bar{y}_1)}{d\bar{y}_1} \left\{ \frac{\bar{y}_0}{\bar{y}_0^2 + \varepsilon^2 Z_0^2} - \frac{1}{\bar{y}_0} \right\} d\bar{y}_1 \right], \quad (17)$$

となる。ただし、 $\bar{y}_0 = \bar{y} - \bar{y}_1$ である。また、揚力係数 C_L は、

$$C_L = 2 \int_0^1 \Gamma_r(\bar{y}_1) d\bar{y}_1. \quad (18)$$

(17) 式の $\Gamma(\bar{y})$ を解くため、 $\Gamma_r(\bar{y}) = \alpha C_L^{(2)}/2 \{ 1 - f_0(\bar{y}) \}$ と $f_0(\bar{y})$ を定義し、さらに、 $\bar{y} = \varepsilon \bar{y}$ とおき、 $\bar{y}$ を改めて y と書き表わすと、(17) 式は

$$f_0(y) = -A_0 \int_0^A \frac{f_0'(y_1) dy_1}{y_0} + A_0 \int_0^A \frac{f_0'(y_1) y_0 dy_1}{y_0^2 + Z_0^2}, \quad (19)$$

ただし、 $A_0 = C_L^{(2)}/8\pi$ 。また、 $f_0(y)$ に関する境界条件は、翼端で $\Gamma(\pm 1) = 0$ となることから、

$$f_0(0) = 1, \quad f_0(A) = 0. \quad (20)$$

ここで、(19) 式を解くため、STEWARTSON の方法¹¹⁾ を応用することにする。さて、

$$f_0(y) = [f(y) + f(A-y) + g(y)]/[1 + f(A)], \quad (21)$$

と置き、 $f(A)$ を、

$$f(y) = -A_0 \int_0^\infty \frac{f'(y_1)}{y_0} dy_1 + A_0 \int_0^\infty \frac{y_0}{y_0^2 + z_0^2} f'(y_1) dy_1,$$

$$f(0)=1, f(\infty)=0, \quad (22)$$

を満足する関数とすると, (20)式から,

$$g(0)=g(A)=0. \quad (23)$$

さらに, (21)式を(19)式に代入し(22)式の関係を用いると

$$\begin{aligned} g(y) = & -A_0 \int_0^A \frac{g'(y_1)}{y_0} dy_1 \\ & + A_0 \int_0^A \frac{y_0}{y_0^2 + Z_0^2} g'(y_1) dy_1 \\ & + A_0 \int_A^\infty f'(y_1) \left[\frac{1}{y_0} + \frac{1}{A-y-y_1} \right] dy_1 \\ & - A_0 \int_A^\infty f(y_1) \left[\frac{y_0}{y_0^2 + Z_0^2} \right. \\ & \left. + \frac{A-y-y_1}{(A-y-y_1)^2 + Z_0^2} \right] dy_1. \end{aligned} \quad (24)$$

まず, (22)式を書き改めると, $\alpha_0 \rightarrow 0$ のとき, ベッセル関数 K_1 を用いると,

$$\begin{aligned} f(y) = & A_0 \alpha_0 \int_0^\infty f'(y_1) K_1(\alpha_0 |y_1 - y|) \\ & \times \operatorname{sgn}(y_1 - y) dy_1 \\ & - A_0 \int_0^\infty f'(y_1) \frac{|y_1 - y| \operatorname{sgn}(y_1 - y)}{(y_1 - y)^2 + Z_0^2} \\ & \times e^{-\alpha_0 |y_1 - y|} dy_1, \end{aligned} \quad (22)'$$

となる. ここで, $f(y)=0; y < 0$ とし,

$$F_+(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{i\omega y} dy, \quad (25)$$

と $F_+(\omega)$ を定義し, (22)'式をフーリエ変換すると,

$$\begin{aligned} F_+(\omega) = & \pi A_0 [i - \omega F_+(\omega)] \left[\frac{\omega}{(\omega^2 + \alpha_0^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. - A_c(\omega, \alpha_0) \right] - M_-(\omega, \alpha_0), \end{aligned} \quad (26)$$

ただし,

$$A_c(\omega, \alpha_0) = \frac{i}{\pi} [g(z_f) - g(\bar{z}_f)],$$

$$g(z_f) \equiv \int_0^\infty \frac{x e^{-(x/Z_0)z_f}}{x^2 + Z_0^2} dx, \quad z_f = Z_0(\alpha_0 + i\omega).$$

また, $M_-(\omega, \alpha_0)$ は $I_m \omega < 0$ で, 解析関数となる未知関数である. 積分公式¹²⁾から, 上に定義した $g(z_f)$ は,

$$g(z_f) = -Ci(z_f) \cos z_f - Si(z_f) \sin z_f. \quad (27)$$

ここで, WIENER-HOPF の手法¹³⁾に従って, (26)式を変形すると,

$$\begin{aligned} F_+(\omega) L_+(\omega, \alpha_0) - i[1 + L_+(\omega, \alpha_0)]/\omega \\ = -M_-(\omega, \alpha_0) L_-(\omega, \alpha_0) - i[1 + L_-(\omega, \alpha_0)]/\omega \\ \equiv H(\omega, \alpha_0), \end{aligned} \quad (28)$$

ただし,

$$\frac{L_+(\omega, \alpha_0)}{L_-(\omega, \alpha_0)} = 1 + \pi A_0 \omega G_0(\omega, \alpha_0),$$

$$G_0(\omega, \alpha_0) = \frac{\omega}{(\omega^2 + \alpha_0^2)^{1/2}} - A_c(\omega, \alpha_0).$$

また, $F_+(\omega)$ が $I_m \omega > -\alpha_0$ で解析的で, $M_-(\omega, \alpha_0)$ が $I_m \omega < \alpha_0$ で解析的と仮定すると, $H(\omega, \alpha_0)$ は ω の全領域で解析関数である. 積分路 C_+ , C_- を $|I_m \omega| = \alpha_0$ を囲む領域の実軸の上側と下側とすると, 上に定義された $L_+(\omega, \alpha_0)$ と $L_-(\omega, \alpha_0)$ は

$$\left. \begin{aligned} \log L_+(\omega, \alpha_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{1}{\zeta - \omega} \log[1 + \pi A_0 \zeta G_0(\zeta, \alpha_0)] d\zeta, \\ \log L_-(\omega, \alpha_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{1}{\zeta - \omega} \log[1 + \pi A_0 \zeta G_0(\zeta, \alpha_0)] d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

したがって, $L_+(0, \alpha_0) = -1$ とし, (29)式から $L_+(\omega, \alpha_0); \alpha_0 \rightarrow 0$ は

$$\left. \begin{aligned} L_+(it) &= -\exp \left[A_0 \int_0^\infty \tan^{-1} \frac{t}{\zeta} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1 - e^{-Z_0 \zeta} + Z_0 \zeta e^{-Z_0 \zeta}}{1 + \pi A_0 \zeta (1 - e^{-Z_0 \zeta})} d\zeta \right], \quad t; \text{実数}, \\ L_+(\omega) &= -\exp \left[\frac{\pi A_0}{2} \int_0^{|\omega|} \frac{1 - e^{-Z_0 \zeta} + Z_0 \zeta e^{-Z_0 \zeta}}{1 + \pi A_0 \zeta (1 - e^{-Z_0 \zeta})} d\zeta \right. \\ &\quad \times \left. \frac{i A_0}{2} \oint_0^\infty \log \left(\frac{\omega + \zeta}{\omega - \zeta} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1 - e^{-Z_0 \zeta} + Z_0 \zeta e^{-Z_0 \zeta}}{1 + \pi A_0 \zeta (1 - e^{-Z_0 \zeta})} d\zeta \right], \quad \omega; \text{実数}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

積分記号 $\oint$ はコーシ型の積分を意味する. したがって, $|\omega| \rightarrow \infty$ のとき, $L_+(\omega) \sim |\omega|^{1/2}$ となる. (22)式の $f(0)=1$ から, $\omega \rightarrow \infty$ で $\omega F_+(\omega) \sim i$. したがって, $H(\omega, \alpha_0) \equiv 0$ となる. この結果,

$$\begin{aligned} F_+(\omega) &= i[1 + L_+(\omega, \alpha_0)]/\omega, \\ M_-(\omega, \alpha_0) &= -i[1 + L_-(\omega, \alpha_0)]/\omega. \end{aligned}$$

次に, $y \rightarrow \infty$ での $f(y)$ の性質を調べてみよう. コーシの積分定理を用いると, (27)式の $g(z_f)$ の性質から, $\alpha_0 \rightarrow 0$ で,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{i}{\omega} \left[1 + \frac{1}{L_+(\omega, \alpha_0)} \right] e^{-i\omega y} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty i + 0}^{-\alpha_0 i + 0} \frac{i}{\omega} \frac{e^{-i\omega y}}{L_+(\omega, \alpha_0)} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty i - 0}^{-\alpha_0 i - 0} \frac{i}{\omega} \frac{e^{-i\omega y}}{L_+(\omega, \alpha_0)} d\omega. \end{aligned}$$

(28), (30)式を用いると,

$$\begin{aligned} f(y) &= A_0 \int_{-\infty}^0 \frac{(1 - \cos Z_0 \zeta) e^{\zeta y}}{\pi^2 A_0^2 \zeta^2 (1 - \cos Z_0 \zeta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{(1 - \pi A_0 \zeta \sin Z_0 \zeta)^2} \\ &\quad \times \exp \left[A_0 \int_0^\infty \tan^{-1} \frac{\zeta}{u} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1 - e^{-Z_0 u} + Z_0 u e^{-Z_0 u}}{1 + \pi A_0 u (1 - e^{-Z_0 u})} du \right] d\zeta, \end{aligned}$$

となり、 $y \rightarrow \infty$ では、 $f(y) \sim A_0 Z_0^2 / y^3$ となる。このことと(24)式とから、 $g(y) \sim O_1(A^{-3})$ となる。 O_1 は A の対数項も含むことを意味している。

この結果、揚力係数は(18)と(21)式および上の結果とから、

$$C_L \approx \alpha C_L^{(2)} \left[1 - 2\varepsilon \int_0^\infty f(y) dy + O_1(\varepsilon^2) \right]. \quad (31)$$

上式の [] の第2項の積分は、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(y) dy &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty f(y) e^{-ty} dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[1 + \frac{1}{L_+(it, \alpha_0)} \right] \\ &= A_0 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-Z_0 \zeta} + Z_0 \zeta e^{-Z_0 \zeta}}{\zeta [1 + \pi A_0 \zeta (1 - e^{-Z_0 \zeta})]} d\zeta. \end{aligned} \quad (32)$$

以上の結果と筆者らの二次元地面効果翼の結果⁹⁾ とを用い、揚力傾斜 C_L/α を求めたのが第2図である。二次元解 $C_L^{(2)}$ は、地面高さが比較的高い場合の値⁹⁾ を用いた。このため、第2図の数値結果は、地面高さの小さい場合には適用できない。また、この図に、ASHLEY & LANDAHL のテキスト⁹⁾ から、揚力面による数値結果と実験結果および谷の実験結果¹⁾ をあわせて示した。本報の結果は、揚力面理論より少し大きな値を示すが、翼中央の弦長に対する地面高さ $h (\equiv Z_0/2)$ が0.4以上であれば、ほぼ h による傾向は同じで、さらに h が大きくなるにつれて両者の値は接近する。したがって、本理論は微積分方程式を数値的に解く必要

がなく、また、揚力面理論に比べ計算が非常に容易であるので、翼の地面効果を解析する一近似法として有効であろう。ただ、筆者らは、だ円形翼の地面効果を取り扱った論文を見出せなかったので、この翼形状についての比較検討を行っていないが、地面効果のない翼の結果から類推すると、本理論は矩形翼よりだ円形翼の方が、より精度の高い近似になっていると思われる。

5. 結 論

縦横比の大きな三次元翼の地面効果について、摂動法を用い揚力面理論から揚力線近似理論を導いた。さらに、揚力係数の縦横比についての漸近展開式を求め、また、それと翼形状との関連を明らかにした。ここで得られた主な結論は次のとおりである。

(1) 地面効果による誘導迎角は、矩形翼のように、翼端付近で、翼幅方向の翼形状変化の著しい場合、(8)式で定義された J を用いるべきである。

(2) だ円形翼では、揚力係数を縦横比の逆数で漸近展開したとき、(16)式に示すようになり、その第2次近似は $\log(A)/A^2$ のオーダーである。

(3) だ円形翼より翼端付近での翼幅方向の形状変化の小さい翼の揚力係数は、縦横比の対数項を含まず、その第2次近似は $1/A^2$ のオーダーである。この場合、誘導迎角としては、(8)式の J を ε で展開した(9)式を用いることが出来よう。

(4) 矩形翼において、プラントルの方程式に相当する微積分方程式が導かれ、これを解析した。この結果、揚力係数の $1/A$ に関する第2次近似は、 $1/A$ のオーダーで、揚力面理論による数値計算結果に比べ、少し大きい値を示すが、地面高さによる傾向はほぼ同じである。

参 考 文 献

- 1) 谷一郎：翼の地面効果に就いて、日本航空学会誌，第4巻，第26号，(1937)，論 175-190。
- 2) WINDNALL, S.E. & BARROWS, T.M.: An analytic solution for two- and three-dimensional wings in ground effect. J. Fluid Mech., Vol. 41, (1970), pp. 769-792.
- 3) KIDA, T. & MIYAI, Y.: An Alternative Analytical Method for Ground-Effect Aerofoils. Aeronautical Quarterly, Vol. 27, (1976), pp. 292-308.
- 4) 安東茂典，屋代春樹他2名：小さい翼端隙間を有する非平面 GEW の最小誘導抵抗(II)，日本航空宇宙学会誌，第24巻，第271号，(1976)，pp. 399-407。
- 5) MASKEW, B.: On the Influence of Camber and Non-planar Vortex Wake on Wing Characteristics in Ground Effect. A.R.C., C.P. No. 1264, (1971).
- 6) VAN DYKE, M.: Perturbation Methods in Fluid Mechanics, The Parabolic Press, Stanford, California, 1975.

第2図 矩形翼の揚力傾斜 C_L/α と地面高さ h ,
[h =地面高さ/翼弦長さ]

- 7) VAN HOLTEN, T.H.: Some notes on unsteady lifting-line theory, J. Fluid Mech., Vol. 77, (1976), pp. 561-579.
- 8) TOKUDA, N.: An asymptotic theory of the jet flap in three dimensions, J. Fluid Mech., Vol. 46, (1971), pp. 705-726.
- 9) ASHLEY, H. & LANDAHL, M.: Aerodynamics of Wings and Bodies, Addison-Wesley Pub. Co. Inc., Reading, Massachusetts, 1965.
- 10) FURUYA, O.: Three-dimensional theory on supercavitating hydrofoils near a free surface, J. Fluid Mech., Vol. 71, (1975), pp. 339-359.
- 11) STEWARTSON, K.: A note on lifting line theory, Quart. Journal Mech. and Applied Math., Vol. 13, (1960), pp. 49-56.
- 12) ABRAMOWITZ, M. & SEGUN, A.I. (ed.): Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Pub. Inc., New York, 1965.
- 13) CARRIER, G.F., KROOK, M. and PEARSON, C.E.: Functions of a complex variable theory and technique, McGraw-Hill, Inc., 1966.

アダプティブ・オブザーバ設計とその VTOL 機飛行制御系への適用*

On the Design of an Adaptive Observer and its Application to VTOL Flight Control System

金 井 喜美雄**・出 川 喬 庸**

Kimio KANAI, Tadayasu DEGAWA

塚 原 鶴 夫**

and Tsuruo TSUKAHARA

Abstract

The subject of modern control theory has received increased interest in recent years, partly because of its importance as an analytical tool for the study of advanced control technology such as CCV, and of the corresponding active control approaches. However, the main disadvantage of the modern control technique is its dependence on the accessibility of all the state variables and parameters of the plant to be controlled or identified. In this report, an adaptive observer scheme is developed to estimate the state vector and to identify all the parameters of a single-input single-output n -th order linear system where only the input and output can be observed, and is based on the new canonical form method without LIAPUNOV's direct method. The approach is proved to be asymptotically stable and thus ensuring the convergence of the identification algorithm.

Numerical computations are done for the parameter identification and state estimation problems of VTOL aircraft and for the synthesis of a state feedback controller.

1. ま え が き

系の望ましい応答を得る制御方式として状態フィードバック制御が多く用いられるが、本来、フィードバ

ック・ゲインを決定するための安定微係数等の系のパラメータは既知であり、かつ迎角、速度等のすべての状態量が測定できる場合のみ実現可能なものである。

したがって、系のパラメータが未知であったり、すべての状態は測定できない場合には観測可能は入出力情報から必要な未知量を同定および推定し、この結果にもとづいて閉ループ系を構成する方式に頼らざるを得ない。著者¹⁾らはパラメータ変動を伴うアダプティブ制御系のシンセシスを検討したがパラメータが完全に未知である場合にはアダプティブ・オブザーバ問題として定式化しなければならない。この問題に関しては種々の方式^{2),3)}が提案されているが、具体的な制御系に適用するにはオブザーバの構造が複雑でかつ収束の速さも保証されていないという難点がある。これを改善するために、次数がわかっている線形固定係数系について、入出力信号のみを利用してパラメータの同定と状態量の推定を同時に実行できるアダプティブ・オブザーバを新形式による設計法を提案した⁴⁾。本論文では著者らの手法の概要を述べ、これを用いて望ましい極の配置によって指定された応答特性を満足する状態フィードバック制御系の構成法を考察する。

VTOL 機の縦運動安定増大装置設計への適用に関し、不安定な開ループ系に対して入出力情報とから安定微係数・コントロール微係数の同定および状態量推定のシミュレーションを実行し、つぎに望ましい飛行性を満足するような最適制御法則になるように安定微係数等のパラメータおよび状態量の同定および推定をオ

* 昭和50年11月10日飛行機シンポジウムおよび昭和51年4月5日第7回年会で発表、昭和52年2月23日原稿受理

** 防衛大学校航空工学科