- 76) EAST, L. F.: Computation of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers (Euromech 60), FFA TN AE-1211 (1975).
- 77) PATEL, V. C.: A Simple Integral Method for the Calculation of Thick Axisymmetric Turbulent Boundary Layers, Aero. Quart., Vol. XXV (1974), pp. 47-58.
- 78) MYRING, D. P.: R. A. E. TR 72234 (1972).
- 79) CHAM, T. S. and HEAD, M. R.: Turbulent Boundary-Layer Flow on a Rotating Disk, J. Fluid Mech., Vol. 37, Part 1 (1969), pp. 129-147.
- 80) REEVES, B. L.: A Two-Layer Model of High-Speed, Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer and Supercritical Boundary Layer-Inviscid Flow Interactions, AGARD CP-93 (1971), pp. 6-1~6-A 2-2.
- 81) MYRING, D. P.: The Effect of Sweep on Conditions at Separation in Turbulent Boundary-Layer/Shock-Wave Interaction, Aero. Quart., Vol. XXVIII (1977), pp. 111-122.
- 82) SMITH, P. D.: An Integral Prediction Method for Three-Dimensional Compressible Turbulent Boundary Layers, A. R. C. R & M 3739 (1972).
- 83) LUDWIG, H. and TILLMAN, W.: Investigations of the Wall-Shearing Stress in Turbulent Boundary Layers, NACA TM 1285 (1950).
- 84) FERNHOLZ, V. H.: Halbempirische Gesetze Zur Berechnung Turbulenter Grenzschichten nach der Methode der Integralbedingungen, Ingenieur-Archiv, Band XXXIII (1964), pp. 384-395.
- 85) JOHNSTON, J. P.: The Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer, M. I. T. Gas Turbine Lab., Rep. No. 39 (1957).

微分法による乱流境界層計算法の展望*

廣 瀬 直 喜**

1. 序

CHAPMAN らの論文、「空力シミュレーションにおける計算機対風洞」¹⁾ は空気力学研究者、技術者に強い衝撃を与えた。計算機の急速な進歩は空気力学の研究手法に革命的变化をもたらした、いわゆる計算空気力学 (Computational aerodynamics) の発達の結果、「計算機風洞」 (Computer wind tunnel) が空気力学試験における従来の風洞にとって代わることも夢ではないかの感を受ける^{2), 3)}。事実、航空機設計の初期の段階では、すでに非粘性流近似の各種計算法や境界層計算法が大いに利用され、風洞試験に取り代わりつつある。しかし、計算空気力学が風洞試験と十分対比しうる成果をもたらすためには、乱流を含む NAVIER-STOKES 方程式 (NS 式)*** が妥当な時間と精度で計算可能となる時代を待たねばならない。解法のアルゴリズムとスーパー・コンピュータ (Super computer) の発達の面からは、この時代の到来もきわめて近い将来であろうと考えられる。ところが、ここに残る最も重要な未解決課題がある。それが乱流輸送現象の評価である。最近では、乱流運動そのものを NS 式より直接、数値的に求める方法も試みられ、その発展も著しい。しか

し、近い将来、それが工学的に用いられると予想するのはむずかしい。したがって、実務計算では、乱流輸送効果をなんらかの形で巨視的に評価し、計算に組み込むモデル化が避けられない。

乱流輸送に関する現象論的仮説には古い歴史があるが、近年発展したものに微分法 (Differential method) による乱流輸送解析法がある。微分法では、時間平均化 NAVIER-STOKES 方程式 (Time-averaged NAVIER STOKES equations, TANS 式)、やその境界層近似である乱流境界層方程式 (Turbulent boundary layer equations, TBL 式) を偏微分方程式の形で、直接、数値的に扱う。従来からの積分法 (Integral method) が、乱流輸送効果を巨視的に、速度分布族 (Velocity profile family) 等の実験法則の形でモデル化するのに対して、微分法では、乱流輸送現象を渦粘性係数のような微視的立場 (積分法に比してであって乱れ運動に比しては巨視的なものはいくまでもない) からモデル化する。このため、微分法は、モデルに対する仮定の成立する範囲が積分法より一般に広く、より広範囲の種類の流れにも適用されよう。最近では、REYNOLDS 応力 (REYNOLDS stress, Re 応力) に関する輸送方程式を加えた高次のモデル化も試みられ、その発展性が期待される。

さて、工学における乱流モデル (正確には「乱流輸送モデル」というべきだが慣例に従う) の目的は乱流輸送効果の評価を正確、かつできるだけ容易に行ない、設計に寄与することにある。これは、乱流を対象とする自然科学である「乱流研究」とは、密接な関係

* 昭和 54 年 4 月 6 日、日本航空宇宙学会第 10 期年会シンポジウムにて講演。昭和 54 年 7 月 31 日原稿受理 A Review on the Calculation of Turbulent Boundary Layers by Differential Methods

** 航空宇宙技術研究所 Naoki Hirose

*** 英語と、略記号のあるものはそれを括弧内に示し、本文中では略記号を用いる。

はあっても、まったく異質な哲学に基づいている。本論文は、前者、工学の立場より、航空空気力学応用のための乱流境界層計算法の現状を調べ、今後、計算を手がける実務家への参考の指針とするとともに、その問題点、残された研究課題を明らかにし、将来への展望とする。この目的のため、乱流輸送計算法開発過程の4要素：乱流モデル、計算法、基本実験、検証、そして応用例につき、できる限り多くの文献を引用することとした。モデル間の長短、特色、具体的計算上の問題点等は、本シンポジウムの各論文に譲ることにした。なお、門外漢である筆者には、独断や理解の足りない部分も無きにしもあらずで、その点をご指摘いただければ幸いである。

2. 一般的参考文献

本論に入る前に、乱流研究、モデルに関する教科書、研究集会、計算法の一般的参考文献を掲げておく。

2.1 教科書 乱流現象全般については、ROTTA⁴⁾、HINZE⁵⁾、剪断流は TOWNSEND⁶⁾、統計理論は MONIN-YAGLOM⁷⁾、LESLIE⁸⁾ の成書がある。全般的展望は BRADSHAW⁹⁾、FROST-MOULDEN¹⁰⁾ が新しい。乱流輸送の物理的解説は BRADSHAW¹¹⁾、¹²⁾、輸送モデルの解説は、2方程式モデル (Two equation model, 2Eq. モデル) までを LAUNDER-SPALDING¹³⁾、REYNOLDS¹⁴⁾ が行ない、1972 年までの主要論文収録を HARLOW¹⁵⁾ が行なった。その後の発展を含むものは、REYNOLDS¹⁶⁾、大路¹⁷⁾、¹⁸⁾、圧縮流モデルとその計算法は MARVIN¹⁹⁾、RUBESIN²⁰⁾ が扱う。乱流モデルの利用といっても、流れの物理的構造の知識は不必要ではない。乱流関係の実験、理論への関心が望まれる。参考に以下の解説を掲げる。圧縮剪断流 (BRADSHAW²¹⁾)、非定常および3次元効果 (BRADSHAW²²⁾)、乱流の新構造 (LAUFER²³⁾)、境界層理論の歴史 (TANI²⁴⁾)、安定性と遷移 (RESHOTKO²⁵⁾)。

2.2 研究集会 1968年にいわゆる「KLINEのオリンピック」とよばれる非圧縮乱流境界層計算法の研究集会 (Stanford 会議²⁶⁾) があり、30種類のさまざまな計算法が同一の流れ場に対して試みられ、各手法の特徴が比較された。そのうち、微分法は9種 (平均流場法 (Mean Velocity Field method, MVF 法) 5種、平均乱流場法 (Mean Turbulent Energy method, MTE 法) 4種) にすぎなかった。同年末に、主として高速空気力学応用を中心とした圧縮乱流境界層に関する会議が開かれ²⁷⁾、平均 Re 応力方程式モデル (Mean REYNOLDS stress equation model, MRS モデル) が提案された。その後の乱流輸送に関連する空気力学研究集

会は、乱流剪断流²⁸⁾ (1971)、自由乱流剪断流²⁹⁾ (1972)、粘性流³⁰⁾ (1976)、境界層³¹⁾ (1976)、遷移³²⁾ (1977)、3次元、非定常剝離³³⁾ (1978)、高 Re 流研究³⁴⁾ (1977)、乱流剪断流³⁵⁾ (1977)、乱流構造³⁶⁾ (1977)。Stanford 会議より4年後の29)では2Eq. モデルが中心となり、35)ではNS式直接計算が実用計算との関連をもって語られるなど、最近の発展は目覚ましい。なお直接計算は微分法の範ちゅうではなく、詳細は ORSZAG-ISRAELI³⁷⁾ の解説を参照されたい。

2.3 計算法 微分法解析では、乱流モデルを用いて TANS 式、TBL 式を解くわけで、それに必要な計算アルゴリズムは初期値境界値問題の数値解法的应用である。とくに境界層型問題に帰着する多くの問題では、以下の成書が各著者のモデルと計算法を詳細に解説しており実用的である：PATANKAR-SPALDING³⁸⁾、SPALDING³⁹⁾、CEBECI-SMITH⁴⁰⁾、CEBECI-BRADSHAW⁴¹⁾。計算法解説論文としては、各自の方法を中心とした BLOTTNER⁴²⁾、⁴³⁾、KRAUSE⁴⁴⁾、KELLER⁴⁵⁾、⁴⁶⁾、圧縮 TBL 計算法文献を網羅した BUSHNELL-CARY-HARRIS⁴⁷⁾、航空機応用中心の NASH-PATEL⁴⁸⁾ がある。また文献49)~56)はNS式解法を含む計算流体力学 (Computational fluid dynamics, CFD) 手法の全般的紹介である。なお、原著論文の発表誌として以下を掲げる。隔年開催の AIAA-CFD 会議⁵⁷⁾、ICFD 会議⁵⁸⁾、AIAA J. とペーパー、J. Comp. Phys., J. Fluid Mech., Int. J. Heat & Mass Transfer.

3. NAVIER-STOKES 方程式

時間依存圧縮流保存則 (Conservation law of time-dependent compressible fluid flow) を時間平均化操作 (Time-averaging) すると、 Re 応力 R_{ij} を含む TANS 式を得る⁴⁰⁾。圧縮流では R_{ij} は密度変動項を含み、非圧縮乱流モデルの議論をそのまま適用できない。そこで、質量加重平均速度 (Mass-weighted average velocity) $\bar{u}_i = \overline{\rho u_i} / \bar{\rho}$ を用いて再構成すると、TANS 式は元の NS 式と形式的に同一に表現されたとともに、 R_{ij} も非圧縮形と同一になる。すなわち、

$$\bar{\rho},_{,i} + (\bar{\rho} \bar{u}_i),_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$(\bar{\rho} \bar{u}_i),_{,i} + [\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \delta_{ij} \bar{p} - (\bar{\tau}_{ij} + R_{ij}),_{,j}] = 0 \quad (2)$$

$$(\bar{\rho} \bar{H} - \bar{p}),_{,i} + [\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{H} + (\bar{q}_i + \overline{\rho u_j' h'}) - \bar{u}_i (\bar{\tau}_{ij} + R_{ij}),_{,j}] = 0 \quad (3)$$

$$R_{ij} = - \overline{\rho u_i' u_j'} = \varepsilon (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\varepsilon \bar{u}_{k,k} + \bar{\rho} \bar{k}) \quad (4)$$

ここで(4)式の第2式は R_{ij} の定義であり、一方、第3式は渦粘性モデルの一般形の場合の定義である。粘性応力 $\bar{\tau}_{ij}$ は μ の、そして R_{ij} は ρ の変動を含む

から、表現上の簡単化は形式的にすぎないとして、BRADSHAW²¹⁾ は質量加重平均の意義を認めないが、この表現は、実務計算においては、層流計算コードが、粘性係数の変更のみで乱流計算に適用できる点で重要である。高次モデルでは R_{ij} , 乱流エネルギー (turbulent energy), $\bar{k} = \overline{\rho u_i' u_j'} / 2\rho$, 乱流特性長 (length scale) l に関する輸送方程式が必要で、それらは NS 式, TANS 式より導かれる (ROTTA⁴⁾). REYNOLDS^{14), 16)} は非圧縮流モデルの統一的記述を与えた。圧縮流での高次モデル定式化に関しては CEBECI-SMITH⁴⁰⁾, RUBESIN-ROSE⁵⁹⁾, SISLIAN⁶⁰⁾ が与えた。エネルギー式 (3) における乱流伝達項 $\overline{\rho u_j' h'}$ は、乱流 PRANDTL 数 $Pr_t = \varepsilon / \varepsilon_h$ を仮定し、 Re 応力と関連づけるのが通例だが⁴⁰⁾, 厳密には Pr_t は一定ではない⁴⁷⁾。MRS モデルでは $\overline{\rho u_j' h'}$ に関する輸送方程式を使う。

TANS 式は相当複雑なので、その近似方程式が扱われることが多い。高 Re 数では応力項の主流方向成分は法線方向に比べ無視でき、薄層近似⁶¹⁾ (Thin-layer approximation) や、それに定常流を仮定した放物化 NS 近似⁶²⁾ (Parabolized NAVIER-STOKES approximation), そしてよく使われる境界層近似⁴⁰⁾ (Boundary layer approximation) が解析の対象とな

る。これらの近似の間では近似の適用範囲に大きな開きがあるほか、問題を解くに要する計算時間の長短等の計算効率にも差がある (Computational efficiency)。境界層近似は法線方向運動量式を無視するが、高 Mach 数では、変動成分 v' のために法線方向圧力勾配 $\partial p / \partial y$ を無視できなくなることを注意したい⁴⁷⁾。

4. 非圧縮乱流輸送モデル^{14), 16)} (第 1 表)

Re 応力を既知の量で表現し、方程式を完結させる最も簡単な考えは BOUSSINESQ の渦粘性概念 (Eddy viscosity concept, (4) 式) である。PRANDTL は混合長 (Mixing length, ML) 仮定により、粘性係数 μ に模した渦粘性係数 (Eddy viscosity coefficient) ε を平均流変数で表現した：

$$R_{xy} = -\rho \langle u' v' \rangle = \varepsilon \partial \bar{u} / \partial y \quad (5)$$

$$\varepsilon = \rho l_m^2 |\partial \bar{u} / \partial y| \quad (6)$$

l_m : 混合長

これを平均流場法 (MVF), あるいは代数モデル (Algebraic model), 零-方程式モデル (Zero-equation model) ともいう。乱流境界層の実用モデルとしては、境界層断面の外部領域に対しては、CLAUSER⁶³⁾ や ESCUDIER⁶⁴⁾ の後流法則、壁近傍の内部領域では VAN

第 1 表 主な乱流輸送モデルの分類

モ デ ル			非 圧 縮 流		圧 縮 流	
			2 次 元	3 次 元	2 次 元	3 次 元
平均流場法	代数モデル		CEBECI-SMITH ⁴⁰⁾ NITUCH ⁶⁸⁾	CEBECI ¹¹²⁾ MELLOR-HERRING ¹¹³⁾ ROTTA ²⁴⁵⁾	CEBECI-SMITH ⁹⁹⁾ BALDWIN ^{61), 103)}	
	代数緩和モデル		HUNG ⁷⁰⁾ GLOWACKI ⁹⁹⁾		HUNG ¹⁰⁰⁾ SHANG ¹⁰¹⁾ HORSTMAN ¹⁰²⁾	HUNG ¹⁰⁴⁾
平均乱流エネルギー散型法	対流輸送型	1 Eq. モデル	BRADSHAW ⁷²⁾	BRADSHAW ¹¹⁶⁾ NASH ¹¹⁴⁾	BRADSHAW ^{106), 248)}	
	勾配	1 Eq. モデル	NEE-KOVASZNAVY ⁷³⁾ GLUSHKO ^{71), 249)}		RUBESIN ¹⁰⁵⁾	
	拡散	2 Eq. モデル	HARLOW-NAKAYAMA ⁷⁴⁾ RODI-SPALDING ⁷⁵⁾ NG-SPALDING ⁷⁶⁾ JONES-LAUDER ⁷⁷⁾ SAFFMAN ⁷⁸⁾ SAFFMAN-WILCOX ⁷⁹⁾ WILCOX-TRACI ⁸⁰⁾	LAUNDER-SPALDING ¹¹⁵⁾	WILCOX ^{87), 107)} WILCOX-RUBESIN ¹⁰⁸⁾ WILCOX-TRACI ⁸⁰⁾ WILCOX-CHAMBERS ¹⁰⁹⁾	
	MRS モデル		ROTTA ⁶⁸⁾ DAVYDOV ⁸⁹⁾ DALY-HARLOW ⁹⁰⁾ HANJALIĆ-LAUDER ⁹¹⁾ LAUNDER-REECE-RODI ⁹²⁾	DONALDSON ⁹³⁾ SAFFMAN ⁹⁴⁾ ROTTA ⁹⁵⁾	VARMA ¹¹⁰⁾ WILCOX-ALBER ¹¹¹⁾ SAFFMAN ⁹⁴⁾ WILCOX-RUBESIN ¹⁰⁸⁾	

DRIEST⁶⁵⁾ の減衰係数を含む混合長モデルを組み合わせた CEBECI-SMITH⁶⁶⁾ (CSモデル), 「STAN-5」⁶⁷⁾ モデルがあり, これらでは圧力勾配や表面吹出しの効果も考慮されている. NITUCH⁶⁸⁾ は強圧力勾配への拡張を行ない, GLOWACKI⁶⁹⁾, HUNG⁷⁰⁾ は緩和モデル (Relaxation model) により上流からの影響を取り入れた.

代数モデルは実用的で広く利用されているが, 外部流乱れ, 表面曲率, 遷移等は扱えず, 強圧力勾配, 剝離点近くでは良い結果を得ない. そこで ε にその構成量 ($\bar{k}, l$ 等) の平均流による力学輸送効果を輸送方程式として考慮した平均乱流エネルギー法 (MTE 法) が提案された. GLUSHKO^{71), 249)}, BRADSHAW⁷²⁾ は $\bar{k}$ を, NEE-KOVASZNAVY⁷³⁾ は ε 自身を輸送量とした 1 方程式モデル (One-equation model, 1 Eq. モデル) を扱う. BRADSHAW (B) モデルは $\langle u'v' \rangle \propto a\bar{k}$ の対流輸送を仮定し, 方程式は双曲型となるが, 他は $\langle u'v' \rangle \propto \partial \bar{u} / \partial y$ の勾配拡散型で放物型となる. 一般に ε の次元は速度 $\times$ 長さ, またはエネルギー/周波数と二つのパラメータで表わされるから, 2 個の輸送方程式で ε の輸送効果を示したほうが好ましく, 多くの 2 方程式モデル (2 Eq. モデル) が唱えられた: HARLOW-NAKAYAMA⁷⁴⁾, RODI-SPALDING⁷⁵⁾, NG-SPALDING⁷⁶⁾, JONES-LAUENDER⁷⁷⁾, SAFFMAN⁷⁸⁾, SAFFMAN-WILCOX⁷⁹⁾, WILCOX-TRACI⁸⁰⁾. これらのうち, 代表的なモデルは NG-SPALDING (NS) モデル, JONES-LAUENDER (JL) モデル, SAFFMAN-WILCOX (SW) モデル, WILCOX-TRACI (WT) モデルである. CHAMBERS-WILCOX⁸¹⁾ はこれらが統一的に記述でき, 本質的には同一なことを示した. 2 Eq. モデルでは外部流乱れ⁸⁰⁾, 遷移^{82), 84)}, 表面粗さ⁸⁵⁾, 吹出し⁸⁰⁾, 曲率効果⁸⁶⁾, 剝離⁸⁷⁾ に対しても, 現象論的に適用できる特徴がある.

3 次元流等の非平衡な流れでは, スカラ量の ε では満足な結果が得られない. ROTTA⁸⁸⁾ は渦粘性の代りに, 直接, 平均 Re 応力輸送方程式 (Mean REYNOLDS stress transport equations) を解く平均 Re 応力 (Mean REYNOLDS stress, MRS) モデルを示し, DAVYDOV⁸⁹⁾, DALY-HARLOW⁹⁰⁾, HANJALIĆ-LAUENDER⁹¹⁾, LAUNDER-REECE-RODI⁹²⁾ (LRR モデル) も 2 次元流モデル, DONALDSON⁹³⁾ (D モデル), SAFFMAN⁹⁴⁾ (S モデル), ROTTA⁹⁵⁾ が 3 次元流モデルを発表した. DONALDSON⁹⁶⁾, ROTTA⁴⁾ は MRS モデルの極限として混合長モデルが導かれることを示した. なお, すべての MRS モデルが任意の初期境界条件に対して必ずしも解を与えぬことを SCHUMANN⁹⁷⁾ は指摘している. MRS モデルは経験的パラメータが多いうえ, 3~10 個以上の連立方程式を解く必要から, 計算量が著しく

増加する欠点があり, 実用にはほど遠いが, モデルの適用範囲が低次モデルより広いとみられ, その普遍性への期待がある.

5. 圧縮乱流輸送モデル

圧縮流では基礎式にエネルギー式 (3) が付加し, R_{ij} , $\overline{\rho u' h'}$ に密度変動成分, $\bar{k}$ 輸送式には $\overline{\rho u' i'}$ が含まれる等複雑になる. 乱流境界層ではエネルギー式の代りに CROCCO 積分を使うときがあるが, 断熱壁, 弱圧力勾配流に限られる. 主流 Mach 数 5 以下の平衡境界層での実験法則として, 「乱れの基本構造は非圧縮と同じで, 密度変化は平均流での体積的效果を通してのみ表われる」という「MORKOVIN の仮定」⁴⁷⁾ はよく使われる. このときは, 圧力, 密度変動項は無視され, 20% 以下の誤差で $\overline{(\rho v) u'} \approx \overline{\rho u' v'}$ が成立する. 衝撃波境界層干渉や極超音速流ではこの仮定には無理があり, 実験データの解釈にも注意の要ところである⁹⁸⁾. この種の流れではモデル開発はもとより, モデル検証に用いるための基本実験の高品質なデータ (high quality data) にも不足している.

代数モデルでは MORKOVIN の仮定から, 長さスケールや境界層排除厚 δ^* に圧縮性は無視され, $\overline{\rho u' h'}$ は乱流 PRANDTL 数 Prt で代用される. CS モデル⁹⁹⁾ やその緩和モデル (HUNG¹⁰⁰⁾, SHANG¹⁰¹⁾, HORSTMANN¹⁰²⁾) が代表的で, BALDWIN^{103), 61)} は剝離を含む NS 式解法に適するような表現への改良を行なった. 3 次元流に対して, HUNG¹⁰⁴⁾ は ESCUDIER モデル⁶⁴⁾ を用いる. 1 Eq. モデルでは, RUBESIN¹⁰⁵⁾ が GLUSHKO (G) モデル^{71), 249)} の圧縮形へ拡張, BRADSHAW は B モデル⁷²⁾ の拡張²⁴⁸⁾, 強圧力勾配での補正¹⁰⁶⁾ を与えた. 2 Eq. モデルでは, WILCOX^{87), 107)}, WILCOX-RUBESIN¹⁰⁸⁾ (WR モデル), WILCOX-TRACI⁸⁰⁾ (WT モデル), WILCOX-CHAMBERS¹⁰⁹⁾ らが圧縮形モデルを与えた. MRS モデルでは密度変動は, 直接, 輸送方程式に含まれる. D モデル⁹³⁾ は VARMA が拡張し¹¹⁰⁾, S モデル⁹⁴⁾ は WILCOX-ALBER¹¹¹⁾, SAFFMAN⁹⁴⁾, WILCOX-RUBESIN¹⁰⁸⁾ (WR-MRS モデル) が拡張する. これらは非圧縮モデル以上に, 経験パラメータ, 境界条件設定に困難を伴うもので, 実用化が妨げられている. なお, D モデルは質量加重平均を用いてない.

6. 3 次元乱流輸送モデル

3 次元流には 3 次元コーナのような 3 次元境界領域と翼面に代表されるシート状の 3 次元境界層があり, 前者は十分研究されてない (HUNG¹⁰⁴⁾). 通常, 3 次元流とは後者を指し, その場合, 層流と異なり, R_{ij} と変形速度 S_{ij} とは必ずしも平行でなく, 横断流角程度

の方向のずれを生ずる。しかし、CEBECI¹¹²⁾ は、それを十分無視できるとして、 R_{ij} と剪断速度ベクトル S を平行とし、次のように与えた：

$$\begin{aligned} -\overline{\rho u'v'} &= \varepsilon \partial \bar{u} / \partial y, \quad -\overline{\rho v'w'} = \varepsilon \partial \bar{w} / \partial y \\ \varepsilon &= \rho l_m^2 |S(y)| \\ S(y) &= \partial |q| / \partial y = (\partial \bar{u} / \partial y, \partial \bar{w} / \partial y) \end{aligned} \quad (7)$$

さらに MELLOR-HERRING¹¹³⁾ は外部領域での ε_{outer} を修正した。上の仮定は MTE 法でも使われる。NASH¹¹⁴⁾, LAUNDER-SPALDING¹¹⁵⁾ は、それぞれ B モデル, JL モデルを 3 次元化した。一方, ROTTA²⁴⁵⁾ は代数モデルで, BRADSHAW¹¹⁶⁾ は 1Eq. モデルで、この仮定を除く改良を行なっている。当然ながら, MRS モデルではこの種の仮定は不要である。

7. 計 算 法 (第 2 表)

7.1 境界層, 自由剪断流解法 定常境界層型流れでは、平均流, 補助方程式ともに、放物型 (対流輸送型である B モデルのみ双曲型となる) だから、適当な初期値分布から、境界条件に合わせて、流れの方向に差分法計算を進める前進差分法 (Marching finite difference method) が適用される。ただし、層流の場合と異なり、 $\partial \bar{u} / \partial y$ の大きな粘性底層 (Viscous sublayer) はきわめて薄く、一方境界層厚さ (Boundary layer thickness) δ は急激に発達するから、境界層型座標 (Boundary layer coordinates, たとえば MANGLER-LEVY-LEES 変換¹¹²⁾), 不等間隔格子, 壁法則 (Law of wall) による壁境界の分離⁹⁰⁾を行なうのが通例である。放物型に対する陽的差分法は安定条件が厳しく, PLETCHER¹¹⁷⁾ が DUFORT-FRANKEL⁵³⁾ (D-F) 法を用いたのみで、通常は陰的差分法の CRANK-NICOLSON (C-N) 法⁵³⁾を基本とする。無条件安定である陰的差分法でも、非線形項のため実際には無条件安定ではなく、流れ方向に任意に大きな空間格子幅はとれない。非線形項の除去と収束に必要な反復回数の低減のために多くの変形^{118), 121)}がある。一般に陰的差分法は行列変換に伴う計算容量と、反復計算のための計算時間面での欠点を伴う。なお詳細は BLOTTNER の解説^{42), 43)}を参照していただきたい。DOUGLAS-JONES¹²²⁾ は C-N 法を予測子修正子法 (Predictor-corrector method) で線形化, 半陽化した (D-J 法)。差分法変種として、積分検査面法による陰的差分法を構成する PATANKAR-SPALDING (P-S) 法^{36), 67)}と KELLER の「Box」法⁴⁶⁾が有名である。Box 法は 2 階偏微分方程式であるもとの式を連立 1 階偏微分方程式に階を落し x, y 面内にとった計算格子点の四辺形頂点で差分を構成して, NEWTON 反復法による補正項を非線形除去に導入することにより、補正項に関する線形

ブロック 3 項対角方程式に帰着させるもので, CEBECI⁴⁰⁾が使っている。BLOTTNER²⁵⁰⁾ は C-N 法が Box 法より速く、高精度と主張しているが, KELLER⁴⁶⁾ は最適アルゴリズムを使えば Box 法がよいのだと反駁している。Box 法は WORNOM¹²³⁾ が高精度化, CEBECI が非定常流¹²⁴⁾, 逆問題¹²⁵⁾への拡張を行なった。

x 方向微分のみ上流差分近似し, y 方向常微分方程式の 2 点境界値問題として解く HARTREE-WOOMERSLEY 法 (Shooting 法ともいう)¹²⁶⁾はいまはほとんど使われないが, WORTMAN¹²⁷⁾ は、この 2 点境界値問題の形式的解析解を構成し、数値的に求める半解析演算子法 (Semi-analytic operator method) を示した。積分関係法 (Method of integral relations) や, GALERKIN 近似の有限要素法 (Finite element method) も、基本的には同様の常微分方程式化の考え方に基いており、利点なく、あまり使われない^{128), 129)}。

非定常境界層については WIRZ¹³⁰⁾, 剝離は WILIAMS¹³¹⁾, BRADSHAW¹³²⁾ が解説している。非定常剝離は、定義自体、まだ曖昧だが, CEBECI¹³³⁾ は計算法的重要性を指摘している。定常剝離では、境界層方程式は剝離点に特異性をもち、前進差分法も数値的不安定が起こって、その手前で計算は発散する。しかし、剝離泡 (Separation bubble) のような下流で再び閉じる場合には、剝離泡を含む全流域を、逆解法 (表面摩擦分布を与えて圧力分布を求めるような解法) として反復的に解けば収束解を得る。KLINEBERG-STEGER¹³⁴⁾ は対流項に上流差分を CARTER¹³⁵⁾ は C-N 法差分をそれぞれ用い、逐次加速緩和法 (Successive over-relaxation, SOR) で解いた。しかし剝離泡内の逆流速度が十分小さいときは、そこでの対流項を無視して前進法を用いても実用上差つかえないことも示されている (CARTER-WORNOM^{136), 137)}, KAWAI¹³⁸⁾, CARTER¹³⁹⁾。また WERLE-VASTA¹⁴⁰⁾ は時間項を導入し、交互方向法 (Alternating direction implicit, ADI) で時間 $t \rightarrow \infty$ の漸近解を定常解として剝離泡を求めた。

強圧力勾配での境界層近似には限界があり、剝離を含む流れは一般には TANS 式を解かねばならない。計算法の精度は常に注意を要する点である。とくに乱流モデルの精度とのバランスを CASTRO¹⁴¹⁾ は指摘する。BLOTTNER¹⁴²⁾ は精度、格子数、計算費用を論ずる。高次モデルを用いた圧縮境界層計算では、ほぼ方程式の数に応じて計算量も増加し、RUBESIN¹⁴³⁾によると、代数モデル, 2Eq. モデル, MRS モデルを用いたときの計算時間: CPU 比は 1:2:5 である。

7.2 TANS 解法 非圧縮流では従来から低 REYNOLDS 数の円柱まわりの流れの計算に見られるような

第2表 おもな計算法と適用例

計 算 法	適 用 例
I. 境界層方程式	
A. 前進解法 (Marching Procedure)	
1. 特性曲線法 (BRADSHAW 法モデルのみ)	2次元付着流 (BRADSHAW ⁷²⁾)
2. 陽的差分法 (Explicit Finite Difference Method)	2次元付着流 (PLETCHER ¹¹⁷⁾)
a. DuFORT-FRANKEL 法 ⁵²⁾	3次元付着流 (EAST ¹⁷⁶⁾)
b. その他の陽的差分法	3次元付着流 (NASH ^{48), 114), 520), SINGLETON¹⁸⁰⁾)}
3. 陰的差分法 (Implicit Finite Difference Method)	2次元付着流 (PRICE ^{118), ANDERSON¹¹⁹⁾)}
a. CRANK-NICOLSON 法 ^{42), 43), 53)}	2次元剥離流 (CARTER ^{136), 137), 139), KAWAI¹³⁸⁾)}
b. Predictor-Corrector CRANK-NICOLSON 法 (DOUGLAS-JONES ¹²²⁾)	3次元付着流 (KARABELAS ^{178), DWYER^{241), HARRIS²⁴³⁾)}}
c. Mehrstellen 法 (KRAUSE ¹⁷⁹⁾)	3次元付着流 (松野 ¹⁷⁹⁾)
d. ADI 法	2次元付着流 (KRAUSE ¹⁷⁵⁾)
e. その他の陰的差分法	3次元付着流 (KRAUSE ^{177), KORDULLA²²⁷⁾)}
4. 陰的差分法変種 (Variant of Implicit Finite Difference Method)	3次元付着流 (NASH ⁴²⁾)
a. Integral Control Volume 法 (PATANKAR-SPALDING ⁸⁸⁾)	3次元付着流 (KENDALL ²⁴⁴⁾)
b. Box 法 (KELLER ⁴⁶⁾)	2次元付着流 (PATANKAR ^{88), CRAWFORD⁸⁷⁾)}
c. 4次精度 Box 法 (WORNOM ¹²³⁾)	3次元付着流 (PATANKAR ⁸²⁾)
5. 微分差分法 (Differential Difference Method)	2次元付着流 (CEBECI, <i>et al.</i> ^{40), 66)})
a. Shooting 法 (HARTREE-WOOMERSLEY 法 ¹²⁶⁾)	2次元非定常流 (CEBECI ¹²⁴⁾)
6. 解析関数による常微分方程式化法	2次元非定常剥離流 (CEBECI ¹²³⁾)
a. Semi-Analytic Operator 法 (WORTMAN ¹²⁷⁾)	2次元逆問題 (CEBECI ¹²⁵⁾)
b. Method of Integral Relations	3次元付着流 (CEBECI ^{89), 174)})
c. 有限要素法	1次元相似解 (TAYLOR ¹²⁸⁾)
B. 大域的反復法 (Global Iteration Method)	3次元付着流 (BAKER ¹²⁹⁾)
1. 陰的差分法	2次元剥離泡 (KLINEBERG ^{134), CARTER¹³⁵⁾)}
a. SOR 法	2次元剥離泡 (WERLE ¹⁴⁰⁾)
b. ADI 法	
II. 放物化 NS 方程式	
A. 前進解法	
1. 陰的差分法	3次元管内流 (BRILEY ¹⁵³⁾)
a. ADI 法	3次元噴流 (McDONALD ¹⁵⁴⁾)
b. Predictor-Corrector 法	3次元超音速コーナ一流 (RUBIN-LIN ¹⁵⁵⁾)
2. 陰的差分法変種	3次元管内流 (PATANKAR ⁸²⁾)
a. Integral Control Volume 法	
III. NS 方程式	
A. 定常流解法	
1. 非圧縮流差分解法	2次元剥離泡 (GHIA ¹⁵¹⁾)
a. 渦度・流線関数表示	
i. ADI 法	
b. 原始変数表示	
2. 圧縮流差分解法	
B. 非定常流解法	
1. 非圧縮流差分解法	2次元剥離泡 (BRILEY ^{149), 150)})
a. 渦度・流線関数表示	2次元翼 (MEHTA ^{147), 148)})
i. ADI 法	
ii. その他の陰的差分法	
2. 圧縮流差分解法	
a. 保存則時間依存差分法	
i. 陽的差分法	
イ. BRAILOVSKAYA 法	2次元剥離泡 (CARTER ¹⁵²⁾)

第2表. (つづき)

計 算 法	適 用 例
ロ. LAX-WENDROFF 法	2 次元衝撃波境界層干渉 (ISHIGURO ¹⁵⁶⁾)
ハ. MacCORMACK 法	2 次元衝撃波境界層干渉 (MacCORMACK ^{158,160})
ニ. Finite Volume 法	2 次元遷音速翼 (DEIWERT ¹⁶¹)
ホ. SAULEV 法	2 次元前縁問題 (SAKURAI ¹⁵⁷)
ii. 陽陰混合法 (Hybrid Method)	
イ. Li の方法	2 次元衝撃波境界層干渉 (Li ¹⁶²)
ロ. SHANG の方法	2 次元衝撃波境界層干渉 (SHANG ¹⁶³)
ハ. MacCORMACK Rapid Solver	2 次元衝撃波境界層干渉 (MacCORMACK ¹⁶⁴) 2 次元遷音速翼 (DEIWERT ¹⁶⁹) 2 次元鈍頭問題 (TANNEHILL ¹⁷⁰) 3 次元超音速コーナ流 (HUNG ¹⁸³ , SHANG ¹⁸⁴)
iii. 陰的差分法	
イ. ADI 法 (BRILEY ¹⁶⁵)	2 次元遷音速翼 (STEGER ¹⁶⁷)
ロ. Implicit Approximate Factorization (IAF) 法 (BEAM-WARMING ¹⁶⁶)	3 次元半球円柱流 (PULLIAM ¹⁸⁵)

各種 NS 解法が試みられており、それを乱れた高 REYNOLDS 数流に適用できない理由はひとつもない。それにもかかわらず、それらがほとんど使われないのは、高 Re 数での飛躍的計算量増加に研究者が躊躇したのであろうか。TANS 解法の解説は WIRZ-SMOLDEREN¹⁴⁴、LUGT¹⁴⁵、PEYRET-VIVIAND¹⁴⁶ が行なっている。MEHTA^{147,148} は $Re=1 \times 10^4$ で、定常、振動中の翼まわりの粘性流を計算したが、CDC 7600 で 10 時間/ケースを要した。これは層流計算だったが、解法はそのまま乱流にも適用されうる。境界層剥離泡といった局所現象に限れば NS 式を解くにもそれほど時間を要しない。BRILEY^{149,150}、GHIA¹⁵¹ が ADI 法、CARTER¹⁵² が BRAILOVSKAYA 法で扱っている。彼らは外部流境界条件の接続に大域的反復法 (Global iteration) を用いる。放物化 NS 近似の場合には、主流方向圧力勾配項を分離して、前進差分法が適用可能となり計算量は大幅に減る (PATANKAR-SPALDING⁶²、BRILEY¹⁵³、MCDONALD-BRILEY¹⁵⁴、RUBIN-LIN¹⁵⁵)。この近似では逆流部分には適用できないが、工学的には使える分野は少なくない。

圧縮流には、LAX-WENDROFF 法に代表される保存則時間依存差分法 (Time-dependent finite difference method for conservation laws) が適用できる (ISHIGURO¹⁵⁶、SAKURAI¹⁵⁷、MacCORMACK^{158,160}、DEIWERT¹⁶¹) が、応力項の保存型差分のとり方に注意を要す。高 Re 数で境界層内の模様をよい精度で求めるには、格子 Re 数 $Re_\Delta = \nu \Delta y / \nu$ がオーダー 1 の必要がある。このため、空間、時間格子幅はきわめて小さな値に制限され、計算時間が膨大となる。その解決策としては陰陽混合法 (Hybrid method) (Li¹⁶²、SHANG¹⁶³、MacCORMACK¹⁶⁴)、陰法 (Implicit method) (BRILEY-MCDONALD¹⁶⁵、BEAM-WARMING¹⁶⁶) がある。

また薄層近似で計算量減少を試みるもの (STEGER¹⁶⁷) や、計算領域を分割し、近似レベルを局所的に変えるパッチング法 (Patching method) (MURPHY²⁴⁶、SEGINER²⁴⁷) も対策のひとつである。一般にこれら最近の方法の特徴は座標自動形成¹⁸⁶ (Automatic grid generation)、陰化¹⁶⁶、分演算子化¹⁶⁸ (Fractional step) を採用、差分スキームの安定条件の緩和と、スーパー・コンピュータ構造 (Super computer architecture) への最適性を旨とすることである。その結果、 $Re=2 \times 10^7$ の遷音速翼乱流計算も可能となった¹⁶⁹。しかし、現状では、陰化による計算効率改善度も陽法の 2~3 倍にすぎず¹⁷⁰、ベクトル計算アルゴリズムの開発は今後とも大いに期待される^{3),171)~173)}。

7.3 3次元流 3次元境界層では座標系の工夫が重要で、物体適合座標^{112),174)} (Body-fitted coordinates)、流線座標¹⁷⁴⁾ (Streamline coordinates)、後退翼の前縁斜交座標⁹⁹等が採用される。また3次元境界層流では依存域、影響域があり、その関係を考慮するように、境界層座標系のみならず、解法とその差分掃査方向のアルゴリズムに注意を要する (KRAUSE¹⁷⁵、BLOTTNER⁴³)。EAST¹⁷⁶ は D-F 法、CEBECI^{99,174} は Box 法、PATANKAR-SPALDING⁶² は P-S 法、KRAUSE¹⁷⁷ は自分の「Mehrstellen」法、KARABELAS¹⁷⁸ は C-N 法、松野¹⁷⁹ は D-J 法、WORTMAN¹²⁷ は半解析演算法の3次元化を示した。SINGLETON-NASH¹⁸⁰ は 1 Eq. モデルに対する陽的差分法を3次元化した。なお、3次元翼前縁での乱流判定には、経験則^{181,182} が用いられる。ほかに、DWYER²⁴¹、NASH-SCRUGGS²⁴²、HARRIS-MORRIS²⁴³、KENDALL²⁴⁴ らも3次元境界層計算法を試みている。TANS 解法では、HUNG¹⁸³、SHANG¹⁸⁴ の3次元コーナ流、PULLIAM-STEGER¹⁸⁵ の半球円筒流、THOMPSON^{186,187} の座標形成法が注目

される程度で、本格的計算は今後待たねばならない。

8. 実験との検証 (第3表)

8.1 実験 乱流モデルによる計算法が空力解析の設計道具として活用されるには、まず、モデルの適用範囲、精度、計算効率に関する既存実験データによる検証が不可欠である。モデルは実験データの内挿式にすぎないから、実験で保証された範囲の Re 数、Mach 数を逸脱するときには、新たに対応する基本的実験と

それによる検証が必要である。航空機に予測される REYNOLDS 数 $Re \leq 10^8$ 、Mach 数 $M=0.3 \sim 10$ の信頼できる実験データ、なかでも高次モデル検証に必要な REYNOLDS 応力分布等の詳細情報はきわめて少ない。アメリカ合衆国航空宇宙局 (NASA) はモデル開発と併行し、組織的実験計画を進めている (MARVIN¹⁹⁾)。NASA では、新しい計測技術の開発^{188)~191)}により、逆圧力勾配¹⁹²⁾、垂直衝撃波境界層干渉^{193), 194)}、斜衝撃波境界層干渉^{98), 195), 196), 240)}、圧縮コーナ^{100), 197)}、遷音速翼^{198)~200)}等の基本実験が行なわれ、圧縮性、

第3表 実験検証報告の分類

流れの形態	方程式	用いた乱流モデル				報告者	文献番号
		代数	1 Eq.	2 Eq.	MRS		
非圧縮流							
2次元流							
零圧力勾配	TBL	○	○	○	○	LAUNDER, <i>et al.</i>	207)
	TBL	○		○		TANNANKORE, <i>et al.</i>	208)
	TBL			○	○	RUBESIN, <i>et al.</i>	210)
弱圧力勾配	TBL			○	○	RUBESIN, <i>et al.</i>	210)
強圧力勾配							
剝離流							
準3次元流							
零圧力勾配	TBL	○		○	○	HIGUCHI, <i>et al.</i>	215)
無限後退翼	TBL	○		○		EAST, <i>et al.</i>	216), 217)
圧縮流							
2次元流							
加熱流				○		河村	209)
零圧力勾配	TBL	○		○	○	RUBESIN, <i>et al.</i>	211)
弱圧力勾配	TBL	○		○	○	RUBESIN, <i>et al.</i>	211)
強圧力勾配	TBL	○		○	○	RUBESIN, <i>et al.</i>	211)
	TBL	○		○	○	ACHARYA, <i>et al.</i>	213)
	NS	○		○	○	ACHARYA, <i>et al.</i>	213)
	TBL	○		○	○	HORSTMAN, <i>et al.</i>	214)
垂直衝撃波境界層干渉	NS	○				MATEER, <i>et al.</i>	193)
	NS	○	○			VIEGAS, <i>et al.</i>	219)
	NS	○	○	○		VIEGAS, <i>et al.</i>	197)
	NS	○	○	○		COAKLEY, <i>et al.</i>	220), 221)
超音速圧縮コーナー	NS	○				BALDWIN, <i>et al.</i>	61)
	NS	○	○			HORSTMAN, <i>et al.</i>	100)
	NS	○	○	○		VIEGAS, <i>et al.</i>	197)
	NS	○	○	○		COAKLEY, <i>et al.</i>	221)
ボートテイル再圧縮コーナー	NS	○				HOLST	222)
超音速斜衝撃波干渉	NS	○	○	○		VIEGAS, <i>et al.</i>	197)
	NS	○	○	○		COAKLEY, <i>et al.</i>	220)
極超音速斜衝撃波干渉	NS	○	○			VIEGAS, <i>et al.</i>	219)
	NS	○		○		BALDWIN, <i>et al.</i>	218)
	NS	○	○	○		COAKLEY, <i>et al.</i>	221)
遷音速円弧翼	NS	○				BALDWIN, <i>et al.</i>	61)
	NS	○				LEVY, <i>et al.</i>	199)
	NS	○	○	○		COAKLEY, <i>et al.</i>	223)
3次元流							
3次元コーナー衝撃波干渉	NS	○				HUNG, <i>et al.</i>	104)
	NS	○				HORSTMAN, <i>et al.</i>	224)
	NS	○				SHANG, <i>et al.</i>	184)

注) TBL: 境界層方程式, NS: NAVIER-STOKES 方程式

Re 数効果^{201)~205)}も調べられた。これらはモデルと計算法の検証に使われる。一方、欧州でもデータ・バンクの作成²⁰⁶⁾と検討 (BRADSHAW²¹¹⁾が進められた。残念ながら、我国ではこの種の努力はまったく見られず、研究の組織化が強く望まれる。

8.2 付着流での検証 実験によるモデルの検証としては、LAUNDER²⁰⁷⁾, TENNANKORE²⁰⁸⁾が剪断流で代数, 1Eq., 2Eq. の各モデルを、河村²⁰⁹⁾が加熱流逆遷移問題で 2Eq. モデルを調べている。RUBESIN¹⁴³⁾, ²¹⁰⁾, ²¹¹⁾は非圧縮/圧縮剥離なし境界層実験との検証を、代数²¹²⁾, WT-, JL-, NS- の各 2Eq. モデル, LRR-, D- の各 MRS モデルについて境界層計算法で行ない、HORSTMAN²¹³⁾, ²¹⁴⁾は代数, WR-2Eq. モデル, D-, WR- の各 MRS モデルを $Re=10\sim 314\times 10^6$ の逆圧力勾配で境界層, TANS の両計算法で扱った。HIGUCHI²¹⁵⁾は強い 3 次元歪のある非圧縮境界層に対し、代数, WR-2Eq. モデル, D-, WR- 各 MRS モデルを比較した。いまのところ、代数モデルのよさが再認識される一方、強圧力勾配での、2Eq., MRS モデルの高精度が認められている。欧州グループによる EURO MECH の 3 次元モデル・コンテスト²¹⁶⁾, ²¹⁷⁾は無限後退翼のような 3 次元成分をもつ準 3 次元流計算の比較だったが、高次モデルの優位性は認められないと結論している。もっとも、これは剥離手前の流れ場における、モデル間の差の出にくい部分での比較だから、当然の結論であろう。

8.3 剥離流での検証 剥離を含む衝撃波境界層干渉には TANS 計算法プログラムを用いた検証が BALDWIN, HORSTMAN の一派により行なわれ、前述の各種基礎実験について、代数モデル、緩和モデル、G モデル、JL-, SW-, WR- の各 2Eq. モデルが比較された⁶¹⁾, ¹⁰⁰⁾, ¹⁰⁴⁾, ¹⁹³⁾, ¹⁹⁷⁾, ¹⁹⁹⁾, ²¹⁸⁾~²²³⁾。3 次元コーナは HUNG¹⁰⁴⁾, ²²⁴⁾, SHANG¹⁸⁴⁾が代数モデルで行なった。これらの少ない検証例からでは早急な結論は引き出せないが、剥離泡のある強い干渉場では、代数モデルは有効でなく、2Eq. モデルが比較的よい圧力分布を与えることがわかった。しかし、表面摩擦力分布、再付着点位置の予測は 2Eq. モデルの予測も未だ不十分であり、改良されねばならない。MRS モデルの計算はまだ試みられていない。

以上からいえることは、実用的には代数モデルが、過去の長い経験から、局所的な係数合せにより、よい予測を与える場合も多いのに対し、高次モデルではたんに平衡完全発達乱流境界層の実験データに基づいたパラメータを使っている等の経験不足が原因となっており、現状では必ずしも適確な予測を与えない場合も多く、高次モデル本来の機能が十分発揮されていない。た

だ、剥離流では代数モデルがよい結果を与えないのは明白なので、FERZIGER ら²²⁵⁾は「実用計算段階における 2Eq. モデル、モデル開発段階における MRS モデルの 'tune-up' (調整改良)が必要」と指摘している。

9. 実 用 計 算

3 次元翼境界層の実用計算は、CEBECI⁹⁹⁾, NASH⁴⁶⁾, ²²⁶⁾がそれぞれ代数, 1Eq. モデル計算法を完成し、実機圧力分布に基づいた計算結果は剥離点までは実験とのよい一致を示している。衝撃波のある遷音速 3 次元翼では KORDULLA²²⁷⁾が遷音速非粘性解法による外部非粘性流の解と境界層解法を組み合わせたがまだ不完全な結果しか得ていない。境界層計算では外部流との接続を、境界層排除厚の考慮という形で行なうが、衝撃波近傍や剥離点より後縁までの扱い (外部流解の圧力分布では境界層は剥離して計算不能となる)、後流の扱い等、困難な部分の実用的で上手な解決法が望まれる。また、高次モデルの実用化へは、壁境界条件、遷移、翼胴結合体の座標系、差分格子数の増加等に困難な点も少なくない。内部流等、他分野での実用計算例も多いが、ここでは省略する。

10. 直 接 計 算

乱流モデルではないが、最近では NS 式の直接計算 (Direct simulation of NAVIER-STOKES equations) が試みられていることは 2.2 で触れた。これは時間平均化しない 3 次元非定常 NS 式を直接、計算しようというもので、乱流シミュレーション (Turbulence simulation) とか Large eddy simulation (LES)²⁰¹⁾, ³⁷⁾, ²²⁸⁾とよばれ、乱流運動解析の手がかりになろうとしている。とくに LES は物理空間²²⁸⁾~²³³⁾や波数空間²³⁴⁾~²³⁶⁾で乱流渦運動を差分法で時間的に追跡し、空間格子より小さい乱れについてのみサブグリッドスケールモデル (Sub grid scale model, SGS モデル) を仮定する。直接計算の実用化は当面、望めないし、また実用化の必要性自体疑問だが、研究レベルでの進歩は急速なので、情報量の少ない風洞による検証実験の代りに、MRS モデル等高次乱流輸送モデル開発のための検証のための数値実験の役割を果たすと期待されている²²⁵⁾。

直接計算とは異なるが、高 Re 数での失速のように剥離で乱れの巨視構造が支配的な場合には、CHORIN の渦系法²³⁷⁾~²³⁹⁾に代表される LAGRANGE 的な解析法も有効であろう。

11. 結 び

誌面の関係で具体的なモデルの形や実験との比較図

を示せなかったが、それらについては文献を参照してほしい。現状を顧みて、代数モデルの限界, 2Eq. モデルの改良と MRS モデルの開発の必要性が指摘されよう。泥臭い実用計算を行なう側からは、剝離を防止するのがよい設計であり、そのためには、剝離を伴う流れの予測が何としても行なえねばならない。この分野のよいモデルの開発と実験が望まれる。ことに3次元流については両者とも手が付けられていない状態である。今後、10年以内に計算機能力と計算法は高 *Re* 数流シミュレーションを設計レベルで行なえるまでに確実に発達する。しかし、信頼しうる乱流モデル無しには、それは何の意味もない役に立たない。信頼に足るモデルとは、対処的なものではなく、乱流研究に裏づけされたものであろう。自然科学の乱流研究は、先進国では工学との間の深いかかわりあいによって発展し、そのフィードバックとしてモデル開発も進んだ。しかし、わが国ではモデル開発やその応用といった工学的色彩の強いものは、学究的でないとして、流体力学研究者には、蔑視されるように著者は思う。しかし今回のシンポジウムを機会に、乱流研究者にも実用面への関心がいただければ幸いである。

最後に、門外漢の著者が本稿をまとめられたのは、53年度空力部門委員長、神谷信彦博士の叱咤激励に負うところが多い。ここに謝意を表する次第である。

参考文献

- 出所の略記は次のとおり。
 A & A : Astronautics and Aeronautics
 AIAA P. : AIAA Paper
 AIAA J. : AIAA Journal
 A.J. : Aeronautical Journal
 A.Q. : Aeronautical Quarterly
 ARFM : Annual Review of Fluid Mechanics
 IJHMT : International Journal of Heat and Mass Transfer
 J.C.P. : Journal of Computational Physics
 J.F.M. : Journal of Fluid Mechanics
 n ICFD : Proceedings of nth ICFD, Springer
 P.F. : Physics of Fluids
- 1) CHAPMAN, D., MARK, H. and PIRTLE, M.W. : Computer vs. Wind Tunnels for Aerodynamic Flow Simulations, A & A, Vol. 13, No. 4, pp. 22-35 (1975).
 - 2) Future Computer Requirements for Computational Aerodynamics—A Workshop, NASA CP-2032 (1978).
 - 3) BAILEY, F.R. : A View Toward Future Fluid Dynamics Computing, AIAA P. 78-1112 (1978).
 - 4) ROTTA, J.C. (大路通雄訳) : 乱流, 岩波書店, 東京 (1975).
 - 5) HINZE, J.O. : Turbulence, 2nd Ed., McGraw Hill, New York (1975).
 - 6) TOWNSEND, A.A. : The Structure of Turbulent Shear Flow, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press, London (1976).
 - 7) MONIN, A.S. and YAGLOM, A.M. : Statistical Fluid Mechanics, Vol. I & II, MIT Pr., Cambridge, MASS (1975).
 - 8) LESLIE, D.C. : Developments in the Theory of Turbulence, Oxford Univ. Pr., London (1973).
 - 9) BRADSHAW, P.(ed.) : Turbulence, Topics in Applied Physics, Vol. 12, Springer V., Berlin (1976).
 - 10) FROST, W. and MOULDEN, T.H. (ed.) : Handbook of Turbulence, Vol. 1, Fundamentals and Applications, Plenum Pr., New York (1977).
 - 11) BRADSHAW, P. : The Understanding and Prediction of Turbulent Flow, AJ, Vol. 76 (1972), pp. 403-418.
 - 12) BRADSHAW, P. : Turbulence Research—Progress and Problems, Proc. 1976 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute (McKILLIP, A.A., ed.), (1976), pp. 128-139.
 - 13) LAUNDER, B.E. and SPALDING, D.B. : Mathematical Models of Turbulence, Academic Pr., London (1972).
 - 14) REYNOLDS, W.C. : Recent Advances in the Computation of Turbulent Flows, Adv. in Chem. Eng., Vol. 9 (1974), pp. 193-246.
 - 15) HARLOW, F.H. (ed.) : Turbulence Transport Modeling, AIAA Selected Reprint Series, Vol. 14 (1973).
 - 16) REYNOLDS, W.C. : Computation of Turbulent Flows, ARFM, Vol. 8 (1976), pp. 183-208.
 - 17) 大路通雄 : 乱流輸送とそのモデル, 日本物理学会誌, Vol. 32 (1977), pp. 721-730.
 - 18) 大路通雄 : 乱流モデルの展望, 日本航空宇宙学会誌, 第28巻, 第313号 (1980), pp. 48-56.
 - 19) MARVIN, J.G. : Turbulence Modeling for Compressible Flows, NASA TMX-73188 (1977).
 - 20) RUBESIN, M.W. : Numerical Turbulence Modeling, Paper No. 3 in AGARD LS-86 (1977).
 - 21) BRADSHAW, P. : Compressible Turbulent Shear Layers, ARFM, Vol. 9 (1977), pp. 33-54.
 - 22) BRADSHAW, P. : Structure of Turbulence in Complex Flows, Paper No. 10 in AGARD LS-94 (1978).
 - 23) LAUFER, J. : New Trends in Experimental Turbulence Research, ARFM, Vol. 7 (1975), pp. 307-327.
 - 24) TANI, I. : History of Boundary-Layer Theory, ARFM, Vol. 9, (1977), pp. 87-111.
 - 25) RESHOTKO, E. : Boundary-Layer Stability and Transition, ARFM, Vol. 8, (1976), pp. 311-349.
 - 26) KLINE, S.J. (ed.) : Computation of Turbulent Boundary Layers—1968, AFOSR-IFP-STANFORD Conf., Vol. I & II (1968).
 - 27) BERTRAM, M.H. (ed.) : Compressible Turbulent Boundary Layers, NASA SP-216 (1969).
 - 28) Turbulent Shear Flows, AGARD CP-93 (1972).
 - 29) Free Turbulent Shear Flows, NASA SP-321, Part 1 & 2 (1972).
 - 30) Proc. of the Lockheed-Georgia Co. Viscous Flow Symposium, LG-77-ER-0044 (1977).
 - 31) FIORE, A.W. (ed.) : Boundary Layer Effects, Proc. 5th USAF/FRG Data Exchange Agreement Meeting, AFFDL-TR-77-61 (1977).

- 32) Laminar-Turbulent Transition, AGARD CP-224 (1977).
- 33) Three-Dimensional and Unsteady Separation at High REYNOLDS Numbers, AGARD LS-94 (1978).
- 34) BAALS, D.D. (ed.): High REYNOLDS Number Research, NASA CP-2009 (1977).
- 35) DURST, F. *et al.* (ed.): Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr. 18-20(1977).
- 36) FIELDLER, H. (ed.): Structure and Mechanisms of Turbulence, Vol. I & II, Springer V., Berlin (1978).
- 37) ORSZAG, S.A. and ISRAELI, M.: Numerical Simulation of Viscous Incompressible Flows, ARFM, Vol. 6 (1974), pp. 281-318.
- 38) PATANKAR, S.V. and SPALDING, D.B.: Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, Intertext Book, London (1970).
- 39) SPALDING, D.B.: GENMIX; HMT, Vol. 1, Pergamon Pr., London (1977).
- 40) CEBECI, T. and SMITH, A.M.O.: Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic Pr., New York (1974).
- 41) CEBECI, T. and BRADSHAW, P.: Momentum Transfer in Boundary Layers, Hemisphere Pub., Washington, D.C. (1977).
- 42) BLOTTNER, F.G.: Finite-Difference Methods of Solution of the Boundary-Layer Equations, AIAA J., Vol. 8 (1970), pp. 193-205.
- 43) BLOTTNER, F.G.: Computational Techniques for Boundary Layers, Paper No. 3 in AGARD LS-73 (1975).
- 44) KRAUSE, E.: Recent Developments of Finite-Difference Approximations for Boundary-Layer Equations, Progress in Numerical Fluid Dynamics, Springer V., Berlin (1974).
- 45) KELLER, H.B.: Some Computational Problems in Boundary-Layer Flows, Proc. 4th ICFD (1975), pp. 1-21.
- 46) KELLER, H.B.: Numerical Methods in Boundary-Layer Theory, ARFM, Vol. 10 (1978), pp. 417-433.
- 47) BUSHNELL, D.M.: Calculation Methods for Compressible Turbulent Boundary Layers—1976, NASA SP-422 (1977).
- 48) NASH, J.F. and PATEL, V.C.: Advances in Turbulent Boundary Layer Calculation Methodology, Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr. 18-20, Paper No. 5 A (1977).
- 49) Computational Methods for Inviscid and Viscous Two- and Three-Dimensional Flow Fields, AGARD LS-73 (1975).
- 50) Computational Fluid Dynamics, AGARD LS-86 (1977).
- 51) KELLER, H.B. (ed.): Computational Fluid Dynamics, SIAM-AMS Proc., Vol. XI (1978).
- 52) WIRZ, H.J. (ed.): Progress in Numerical Fluid Dynamics, Springer V., Berlin (1974).
- 53) ROACHE, P.J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Pub., Albuquerque, N.M. (1972).
- 54) ROACHE, P.J.: Recent Developments and Problem Areas in Computational Fluid Dynamics, Computational Mechanics, Lecture Notes in Math., Vol. 461, Springer V., Berlin (1975), pp. 195-256.
- 55) GESSOW, A. and MORRIS, D.J.: A Survey of Computational Aerodynamics in the United States, NASA SP-394 (1975).
- 56) Aerodynamic Analyses Requiring Advanced Computers, Part I & II, NASA SP-347 (1975).
- 57) Proceedings 1st to 4th AIAA CFD Conferences, AIAA (1970-1979).
- 58) Proceedings 2nd to 6th ICFD, Springer V., Berlin (1970-1978).
- 59) RUBESIN, M.W. and ROSE, W.C.: The Turbulent Mean-Flow, REYNOLDS Stress and Heat Flux Equations in Mass-Averaged Dependent Variables, NASA TMX-62248 (1973).
- 60) SISLIAN, J.P.: Equations of Motion and Two-Equation Turbulence Model for Plane or Axisymmetric Turbulent Flows in Body-Oriented Orthogonal Curvilinear Coordinates and Mass-Averaged Dependent Variables, NASA CR-3025 (1978).
- 61) BALDWIN, B.S. and LOMAX, H.: Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows, AIAA P. 78-257 (1978).
- 62) PATANKAR, S.V. and SPALDING, D.B.: A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, IJHMT, Vol. 15 (1972), pp. 1787-1806.
- 63) CLAUSER, F.H.: The Turbulent Boundary Layer, Adv. Appl. Mech., Vol. 4, Academic Pr., New York (1956), pp. 1-51.
- 64) ESCUDIER, M.P.: The Distribution of the Mixing Length in Turbulent Flows Near Walls, Report TWF-TN-1, Imperial College (1965).
- 65) VAN DRIEST, E.R.: On Turbulent Flow Near a Wall, Jour. Aero. Sci., Vol. 23 (1956), pp. 1007-1011.
- 66) KELLER, H.B. and CEBECI, T.: Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows II Two-Dimensional Turbulent Flows, AIAA J., Vol. 10 (1972), pp. 1193-1199.
- 67) CRAWFORD, M.E. and KAYS, W.M.: STAN-5, A Program for Numerical Computation of Two-Dimensional Internal and External Boundary Layer Flows, NASA CR-2742 (1975).
- 68) NITUCH, M.J., SJOLANDER, S. and HEAD, M.R.: An Improved Version of the CEBECI-SMITH Eddy-Viscosity Model, AQ, Aug. (1978), pp. 207-225.
- 69) GLOWACKI, W.J.: An Improved Mixing Length Formulation for Turbulent Boundary Layers with Freestream Pressure Gradients, AIAA P. 78-202 (1978).
- 70) HUNG, C.M.: Development of Relaxation Turbulence Models, NASA CR-2783 (1976).
- 71) GLUSHKO, G.S.: Turbulent Boundary Layer on a Flat Plate in an Incompressible Fluid, NASA TTF-10080 (1966).
- 72) BRADSHAW, P., FERRIS, D.H. and ATWELL, N.P.: Calculation of Boundary-Layer Development Using the Turbulent Energy Equation, J.F.M., Vol. 28 (1967), pp. 593-616.
- 73) NEE, V.W. and KOVASNAY, L.S.G.: Simple Phenomenological Theory of Turbulent Shear Flows, PF, Vol. 12 (1969), pp. 473-484.
- 74) HARLOW, F.H. and NAKAYAMA, P.I.: Turbulence Transport Equations, PF, Vol. 10 (1967), pp. 2323-2332.
- 75) RODI, W. and SPALDING, D.B.: A Two-Parameter Model of Turbulence and Its Application to Free

- Jets, Turbulence Transport Modeling, AIAA Selected Reprint Series, Vol. 14 (1973), pp. 69-79.
- 76) NG, K.H. and SPALDING, D.B.: Turbulence Model for Boundary Layers near Walls, PF, Vol. 15 (1972), pp. 20-30.
 - 77) JONES, W.P. and LAUNDER, B.E.: The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, IJHMT, Vol. 15 (1972), pp. 301-314.
 - 78) SAFFMAN, P.G.: A Model for Inhomogeneous Turbulent Flow, Proc. Roy. Soc., Vol. A 317 (1970), pp. 417-433.
 - 79) SAFFMAN, P.G. and WILCOX, D.C.: Turbulence-Model Predictions for Turbulent Boundary Layers, AIAA J., Vol. 12 (1974), pp. 541-546.
 - 80) WILCOX, D.C. and TRACI, R.M.: A Complete Model of Turbulence, AIAA P. 76-351 (1976).
 - 81) CHAMBERS, T.L. and WILCOX, D.C.: Critical Examination of Two-Equation Turbulence Closure Models for Boundary Layers, AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 821-828.
 - 82) JONES, W.P. and LAUNDER, B.E.: The Calculation of Low REYNOLDS Number Phenomena with a Two Equation Model of Turbulence, IJHMT, Vol. 16 (1973), pp. 1119-1130.
 - 83) WILCOX, D.C.: Turbulence-Model Transition Predictions, AIAA J., Vol. 13 (1975), pp. 241-243.
 - 84) ANDERSON, E.C. and WILCOX, D.C.: Transitional Boundary-Layer Solutions Using a Mixing-Length and a Two-Equation Turbulence Model, NASA CR-2986 (1975).
 - 85) WILCOX, D.C.: Turbulence-Model Transition Predictions: Effects of Surface Roughness and Pressure Gradient, AIAA P. 75-857 (1975).
 - 86) WILCOX, D.C. and CHAMBERS, T.L.: Streamline Curvature Effects on Turbulent Boundary Layers, AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 574-580.
 - 87) WILCOX, D.C.: Numerical Study of Separated Turbulent Flows, AIAA J., Vol. 13 (1975), pp. 555-556.
 - 88) Rotta, J.C. (大路通雄訳): 乱流, 岩波書店 (1975), 173 ff.
 - 89) DAVYDOV, B.I.: On the Statistical Dynamics of an Incompressible Turbulent Fluid, Soviet Physics Doklady, Vol. 4, No. 4 (1960), pp. 769-772.
 - 90) DALY, B.J. and HARLOW, F.H.: Transport Equations in Turbulence, PF, Vol. 13 (1970), pp. 2634-2649.
 - 91) HANJALIĆ, K. and LAUNDER, B.E.: A REYNOLDS Stress Model of Turbulence and Its Application to Thin Shear Flows, J.F.M., Vol. 52 (1972), pp. 609-638.
 - 92) LAUNDER, B.E., REECE, G.J. and RODI, W.: Progress in the Development of a REYNOLDS-Stress Turbulence Closure, J.F.M., Vol. 68 (1975), pp. 537-566.
 - 93) DONALDSON, C.DuP.: Calculation of Turbulent Shear Flows for Atmospheric and Vortex Motions, AIAA J., Vol. 10 (1972), pp. 4-12.
 - 94) SAFFMAN, P.G.: Model Equations for Turbulent Shear Flow, Studies in Appl. Math., Vol. 53 (1974), pp. 17-34.
 - 95) Rotta, J.C.: A Family of Turbulence Models for Three-Dimensional Thin Shear Layers, Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr. 18-20 (1977).
 - 96) DONALDSON, C. DuP.: The Relationship between Eddy-Transport and Second-Order Closure Models for Stratified Media and for Vortices, NASA SP-321, Paper No. 7 (1972).
 - 97) SCHUMANN, U.: Realizability of REYNOLDS-Stress Turbulence Models, PF, Vol. 20 (1977), pp. 721-725.
 - 98) MIKULLA, V. and HORSTMAN, C.C.: Turbulence Measurements in Hypersonic Shock-Wave Boundary-Layer Interaction Flows, AIAA P. 76-162 (1976).
 - 99) CEBECI, T., KAUPS, K. and RAMSEY, J.A.: A General Method for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Arbitrary Wings, NASA CR-2777 (1977).
 - 100) HORSTMAN, C.C., SETTLES, G.S., VAS, I.E., BOGDONOFF, S.M. and HUNG, C.M.: REYNOLDS Number Effects on Shock-Wave Turbulent Boundary-Layer Interactions, AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 1152-1158.
 - 101) SHANG, J.S. and HANKEY, W.L.: Numerical Simulation of Shock Wave-Turbulent Boundary Layer Interaction, AIAA J., Vol. 14 (1976), pp. 1451-1457.
 - 102) HORSTMAN, C.C.: Turbulence Model for Non-equilibrium Adverse Pressure Gradient Flows, AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 131-132; AIAA P. 76-412 (1976).
 - 103) BALDWIN, B.S. and MACCORMACK, R.W.: Modifications of the Law of the Wall and Algebraic Turbulence Modelling for Separated Boundary Layers, AIAA P. 76-350 (1976).
 - 104) HUNG, C.M. and MACCORMACK, R.W.: Numerical Solution of Three-Dimensional Shock Wave and Turbulent Boundary Layer Interaction, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 1090-1096.
 - 105) RUBESIN, M.W.: A One-Equation Model of Turbulence for Use with the Compressible NAVIER-STOKES Equations, NASA TMX-73128 (1976).
 - 106) BRADSHAW, P.: The Effect of Mean Compression or Dilatation on the Turbulence Structure of Supersonic Boundary Layers, J.F.M., Vol. 63 (1974), pp. 449-464.
 - 107) WILCOX, D.C.: Numerical Study of Separated Turbulent Flows, AIAA P. 74-584 (1974).
 - 108) WILCOX, D.C. and RUBESIN, M.W.: Progress in Turbulence Modeling for Complex Flow Fields, NASA TP to appear (1979).
 - 109) WILCOX, D.C. and CHAMBERS, T.L.: Computation of Turbulent Boundary Layers on Curved Surfaces, NASA CR-137853 (1976).
 - 110) VARMA, A.K., BEDDINI, R.A., SULLIVAN, R.D. and DONALDSON, C.DuP.: Application of an Invariant Second-Order Closure Model to Compressible Turbulent Shear Layers, AIAA P. 74-592 (1974).
 - 111) WILCOX, D.C. and ALBER, I.E.: A Turbulence Model for High Speed Flows, Proc. 1972 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. (1972), pp. 231-252.
 - 112) CEBECI, T., KAUPS, K. and MOSER, A.: Calcula-

- tion of Three-Dimensional Boundary Layers: III Three-Dimensional Flows in Orthogonal Curvilinear Coordinates, AIAA J., Vol. 14 (1976), pp. 1090-1094.
- 113) MELLOR, G.L. and HERRING, H.J.: Simple Eddy Viscosity Relations for Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 886-887.
 - 114) NASH, J.F.: The Calculation of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow, J.F.M., Vol. 37 (1969), pp. 625-642.
 - 115) LAUNDER, B.E. and SPALDING, D.B.: The Numerical Computation of Turbulent Flows, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 3 (1974), pp. 269-289.
 - 116) BRADSHAW, P.: Calculation of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, J.F.M., Vol. 46 (1971), pp. 417-447.
 - 117) FLETCHER, R.H.: On a Finite-Difference Solution for the Constant-Property Turbulent Boundary Layer, AIAA J., Vol. 7 (1969), pp. 305-311.
 - 118) PRICE, J.M. and HARRIS, J.E.: Computer Program for Solving Compressible Nonsimilar Boundary-Layer Equations for Laminar, Transitional, and Turbulent Flows of a Perfect Gas, NASA TMX-2458 (1972).
 - 119) ANDERSON, E.C. and LEWIS, C.H.: Laminar or Turbulent Boundary-Layer Flows of Perfect Gases or Reacting Gas Mixtures in Chemical Equilibrium, NASA CR-1983 (1971).
 - 120) MINER, E.W. and LEWIS, C.H.: A Finite-Difference Method for Predicting Supersonic Turbulent Boundary-Layer Flows with Tangential Slot Injection, NASA CR-2124 (1974).
 - 121) MINER, E.W., ANDERSON, E.C. and LEWIS, C.H.: A Computer Program for Two-Dimensional and Axisymmetric Nonreacting Perfect Gas and Equilibrium Chemically Reacting Laminar, Transitional and-or Turbulent Boundary Layer, NASA CR-132601 (1975).
 - 122) DOUGLAS, J. and JONES, B.F.: On Predictor-Corrector Methods for Nonlinear Parabolic Differential Equations, J. SIAM, Vol. 11 (1963), pp. 195-204.
 - 123) WORNOM, S.F.: Critical Study of Higher Order Numerical Methods for Solving the Boundary-Layer Equations, NASA TP-1302 (1978).
 - 124) CEBECI, T.: Calculation of Laminar and Turbulent Boundary Layers for Two-Dimensional Time-Dependent Flows, NASA CR-2820 (1977).
 - 125) CEBECI, T., BERKANT, N., SILIVRI, I. and KELLER, H.B.: Turbulent Boundary Layers with Assigned Wall Shear, Computers and Fluids, Vol. 3 (1975), pp. 37-49.
 - 126) HERRING, H.J. and MELLOR, G.L.: Computer Program for Calculating Laminar and Turbulent Boundary Layer Development in Compressible Flow, NASA CR-2068 (1972).
 - 127) WORTMAN, A. and HOO, G.S.: Exact Operator Solutions of General Three-Dimensional Boundary-Layer Flow Equations, J. Aircraft, Vol. 13 (1976), pp. 590-596.
 - 128) BAKER, A.J.: Finite Element Computational Theory for Three-Dimensional Boundary-Layer Flow, AIAA P. 72-108 (1972).
 - 129) TAYLOR, C., HUGHES, T.G. and MORGAN, K.: Finite Element Solution of One-Equation Models of Turbulent Flow, J.C.P., Vol. 29 (1978), pp. 163-172.
 - 130) WIRZ, H.J.: Computation of Unsteady Boundary Layers, Progress in Numerical Fluid Dynamics, Springer V., Berlin (1974), pp. 442-476.
 - 131) WILLIAMS, J.C.: Incompressible Boundary-Layer Separation, ARFM, Vol. 9 (1977), pp. 113-144.
 - 132) BRADSHAW, P.: Prediction of Separation Using Boundary Layer Theory, AGARD LS-94, Paper No. 11 (1978).
 - 133) CEBECI, T.: An Unsteady Laminar Boundary Layer with Separation and Reattachment, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 1305-1306.
 - 134) KLINEBERG, J.M. and STEGER, J.L.: The Numerical Calculation of Laminar Boundary-Layer Separation, NASA TND-7732 (1974).
 - 135) CARTER, J.E.: Inverse Solutions for Laminar Boundary-Layer Flows with Separation and Reattachment, NASA TR R-447 (1975).
 - 136) CARTER, J.E. and WORNOM, S.F.: Forward Marching Procedure for Separated Boundary-Layer Flows, AIAA J., Vol. 13 (1975), pp. 1101-1103.
 - 137) CARTER, J.E. and WORNOM, S.F.: Solutions for Incompressible Separated Boundary Layers Including Viscous-Inviscid Interaction, NASA SP-347 (1975), pp. 125-150.
 - 138) KAWAI, N.: Solutions for Compressible Separated Boundary Layers Including Supersonic Interaction, NAL TR-503(T) (1977).
 - 139) CARTER, J.E.: Inverse Boundary-Layer Theory and Comparison with Experiment, NASA TP-1208 (1978).
 - 140) WERLE, M.J. and VASTA, V.N.: New Method for Supersonic Boundary-Layer Separations, AIAA J., Vol. 12 (1974), pp. 1491-1497.
 - 141) CASTRO, I.P.: Numerical Difficulties in the Calculation of Complex Turbulent Flows, Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr. 18-20, Paper No. 5B (1977).
 - 142) BLOTTNER, F.G.: Computational Requirements for Three-Dimensional Flows, NASA CP-2032 (1978), pp. 145-153.
 - 143) RUBESIN, M.W.: Modeling of the REYNOLDS Stresses, NASA CP-2032 (1978), pp. 239-247.
 - 144) WIRZ, H.J. and SMOLDEREN, J.J.: Numerical Integration of NAVIER-STOKES Equations, AGARD LS-64, Paper No. 3 (1974).
 - 145) LUCY, H.J.: Recent Advances in the Numerical Treatment of the NAVIER-STOKES Equations, AGARD LS-86, Paper No. 2 (1977).
 - 146) PEYRET, P. and VIVIAND, H.: Numerical Solution of the NAVIER-STOKES Equations for Compressible Fluids, AGARD LS-73, Paper No. 6 (1975); AGARD AG-212 (1975).
 - 147) MEHTA, U.B. and LAVAN, Z.: Starting Vortex, Separation Bubbles, and Stall—A Numerical Study of Laminar Unsteady Flow Around an Airfoil, J.F.M., Vol. 67 (1975), pp. 227-256.
 - 148) MEHTA, U.B.: Dynamic Stall of an Oscillating Airfoil, AGARD CP-227, Paper No. 23 (1978).
 - 149) BRILEY, W.R.: A Numerical Study of Laminar

- Separation Bubbles Using the NAVIER-STOKES Equations, J.F.M., Vol. 47 (1971), pp. 713-736.
- 150) BRILEY, W.R. and McDONALD, H.: Numerical Prediction of Incompressible Separation Bubbles, J.F.M., Vol. 69 (1975), pp. 631-656.
 - 151) GHIA, U. and DAVIS, R.T.: Study of Flow past Blunt Thick Plates with Separation and Shoulder Singularity Using NAVIER-STOKES Equations, AIAA J., Vol. 12 (1974), pp. 1659-1665.
 - 152) CARTER, J.E.: Numerical Solutions of the NAVIER-STOKES Equations for the Supersonic Laminar Flow Over a Two-Dimensional Compression Corner, NASA TR R-385 (1972).
 - 153) BRILEY, W.R.: Numerical Method for Predicting Three-Dimensional Steady Viscous Flow in Ducts, J.C.P., Vol. 14 (1974), pp. 8-28.
 - 154) McDONALD, H. and BRILEY, W.R.: Three-Dimensional Supersonic Flow of a Viscous or Inviscid Gas, J.C.P., Vol. 19 (1975), pp. 150-178.
 - 155) RUBIN, S.G. and LIN, T.C.: A Numerical Method for Three-Dimensional Viscous Flow: Application to the Hypersonic Leading Edge, J.C.P., Vol. 9 (1972), pp. 339-364.
 - 156) ISHIGURO, T.: A Difference Method for Solving Compressible Viscous Flow Problem, AIAA J., Vol. 12 (1974), pp. 376-378.
 - 157) SAKURAI, A.: An Investigation of the Flat Plate Leading Edge Problem through the Finite Difference Calculations of the NAVIER-STOKES Equations, Trans. Jap. Soc. Aero. Space Sci., Vol. 19 (1976), pp. 189-201.
 - 158) MACCORMACK, R.W.: Numerical Solution of the Interaction of a Shock with a Laminar Boundary Layer, Proc. 2nd ICFD (1971), pp. 151-163.
 - 159) MACCORMACK, R.W. and BALDWIN, B.S.: A Numerical Method for Solving the NAVIER-STOKES Equations with Application to Shock-Boundary Layer Interactions, AIAA P. 75-1 (1975).
 - 160) HUNG, C.M. and MACCORMACK, R.W.: Supersonic and Hypersonic Laminar Flows over a Two-Dimensional Compression Corner, AIAA P. 75-2 (1975).
 - 161) DEIWERT, G.S.: Numerical Simulation of High REYNOLDS Number Transonic Flows, AIAA J., Vol. 13 (1975), pp. 1354-1359.
 - 162) LI, C.P.: A Mixed Explicit-Implicit Splitting Method for the Compressible NAVIER-STOKES Equations, Proc. 5th ICFD (1976), pp. 285-292.
 - 163) SHANG, J.S.: Implicit-Explicit Method for Solving the NAVIER-STOKES Equations, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 496-502.
 - 164) MACCORMACK, R.W.: A Rapid Solver for Hyperbolic Systems of Equations, Proc. 5th ICFD (1976), pp. 307-317.
 - 165) BRILEY, W.R. and McDONALD, H.: Solution of the Three-Dimensional Compressible NAVIER-STOKES Equations by an Implicit Techniques, Proc. 4th ICFD (1974), pp. 105-110.
 - 166) BEAM, R.M. and WARMING, R.F.: An Implicit Factored Scheme for the Compressible NAVIER-STOKES Equations, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 393-402.
 - 167) STEGER, J.L.: Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 679-686.
 - 168) YANENKO, N.N.: Method of Fractional Steps, Springer V., Berlin (1971).
 - 169) DEIWERT, G.S.: Recent Computation of Viscous Effects in Transonic Flow, Proc. 5th ICFD (1976), pp. 159-164.
 - 170) TANNERHILL, J.C., VIGNERON, Y.C. and RAKICH, J.V.: Numerical Solution of Two-Dimensional Turbulent Blunt Body Flows with an Impinging Shock, AIAA P. 78-1209 (1978).
 - 171) WEILMUNSTER, K.J. and HOWSER, L.M.: Solution of a Large Hydrodynamic Problem Using the STAR 100 Computer, NASA TMX-73904 (1976).
 - 172) LAMBIOTTE, J.J. and HOWSER, L.M.: Vectorization on the STAR Computer of Several Numerical Methods for a Fluid Flow Problem, NASA TND-7545 (1974).
 - 173) LAMBIOTTE, J.J.: An Alternating Direction Implicit Method for the CDC STAR-100 Vector Computer, NASA TP-1282 (1978).
 - 174) CEBECI, T., KAUPFS, K., MOSINSKIS, G.J. and REHN, J.A.: Some Problems of the Calculation of Three-Dimensional Boundary-Layer Flows on General Configurations, NASA CR-2285 (1973).
 - 175) KRAUSE, E.: Numerical Treatment of Boundary-Layer Problems, AGARD LS-64, Paper No. 4 (1974).
 - 176) EAST, J.L. and PIERCE, F.J.: Explicit Numerical Solution of the Three-Dimensional Incompressible Turbulent Boundary-Layer Equations, AIAA J., Vol. 10 (1972), pp. 1216-1223.
 - 177) KRAUSE, E., HIRSCHEL, E.H. and KORDULLA, W.: Fourth Order "Mehrstellen"-Integration for Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, AIAA CFD Conf. Proc. (1973), pp. 92-102.
 - 178) KARABELAS, A.J. and HANRATTY, T.J.: Finite-Difference Solution for Three-Dimensional Boundary Layers with Large Positive and Negative Cross Flows, AIAA J., Vol. 9 (1971), pp. 1527-1532.
 - 179) 松野謙一: 三次元境界層の計算, 航空宇宙学会第10回年会講演会講演集 (1979), pp. 66-67.
 - 180) SINGLETON, R.E. and NASH, J.F.: A Method for Calculating Unsteady Turbulent Boundary Layers in Two- and Three-Dimensional Flows, AIAA CFD Conf. Proc. (1973), pp. 84-91.
 - 181) CUMPTSY, N.A. and HEAD, M.R.: The Calculation of the Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer Part III, AQ, Vol. 20 (May, 1969), pp. 99-113.
 - 182) POLL, D.I.A.: Leading Edge Transition on Swept Wings, AGARD CP-224, Paper No. 21 (1977).
 - 183) HUNG, C.M. and MACCORMACK, R.W.: Numerical Solution of Three-Dimensional Shock Wave and Turbulent Boundary Interaction, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 1090-1096.
 - 184) SHANG, J.S., HANKEY, W.L. and PETTY, J.S.: Three-Dimensional Supersonic Interacting Turbulent Flow Along a Corner, AIAA P. 78-1210 (1978).
 - 185) PULLIAM, T.H. and STEGER, J.L.: On Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Flow, AIAA P. 78-10 (1978).
 - 186) THAMES, F.C., THOMPSON, J.F., MASTIN, C.W. and WALKER, R.L.: Numerical Solutions for

- Viscous and Potential Flow about Arbitrary Two-Dimensional Bodies Using Body-Fitted Coordinate Systems, J.C.P., Vol. 24 (1977), pp. 245-273.
- 187) MASTIN, C.M. and THOMPSON, J.F.: Three-Dimensional Body-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of the NAVIER-STOKES Equations, AIAA P. 78-1147 (1978).
 - 188) HORSTMAN, C.C. and ROSE, W.C.: Hot-Wire Anemometry in Transonic Flow, AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 395-401; NASA TMX-62495 (1977).
 - 189) RUBESIN, M.W., OKUNO, A.F., MATEER, G.G. and BROSH, A.: A Hot-Wire Surface Gage for Skin Friction and Separation Detection Measurements, NASA TMX-62465 (1975).
 - 190) MURTHY, V.S. and ROSE, W.C.: Buried Wire Gage for Wall Shear Stress Measurements, AIAA P. 78-798 (1978).
 - 191) JOHNSON, D.A., BACHALO, W.D. and MODDARESS, D.: Laser Velocimetry Applied to Transonic and Supersonic Aerodynamics, NASA TMX-73117 (1976).
 - 192) KUSSOY, M.I., HORSTMAN, C.C. and ACHARYA, M.: An Experimental Documentation of Pressure Gradient and REYNOLDS Number Effects on Compressible Turbulent Boundary Layers, NASA TM-78488 (1978).
 - 193) MATEER, G.G., BROSH, A. and VIEGAS, J.R.: A Normal Shock-Wave Turbulent Boundary-Layer Interaction at Transonic Speeds, AIAA P. 76-161 (1976).
 - 194) BACHALO, W.D., MODARRESS, D. and JOHNSON, D.A.: Experiments on Transonic and Supersonic Turbulent Boundary Layer Separations, AIAA P. 77-47 (1977).
 - 195) ROSE, W.C.: The Behavior of a Compressible Turbulent Boundary Layer in a Shock-Wave-Induced Adverse Pressure Gradient, NASA TND-7092 (1973).
 - 196) KUSSOY, M.I. and HORSTMAN, C.C.: An Experimental Documentation of a Hypersonic Shock-Wave Turbulent Boundary Layer Interaction Flow: With and Without Separation, NASA TMX-62412 (1975).
 - 197) VIEGAS, J.R. and HORSTMAN, C.C.: Comparison of Multiequation Turbulence Models for Several Shock Separated Boundary-Layer Interaction Flows, AIAA P. 78-1165 (1978).
 - 198) RUBESIN, M.W., OKUNO, A.F., LEVY, L.L. Jr., McDEVITT, J.B. and SEEGRILLER, H.L.: An Experimental and Computational Investigation of the Flow Field about a Transonic Airfoil in Supercritical Flow with Turbulent Boundary-Layer Separation, ICAS Paper No. 76-15 (1976).
 - 199) LEVY, L.L.: An Experimental and Computational Investigation of the Steady and Unsteady Transonic Flow Field about an Airfoil in a Solid-Wall Test Channel, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 564-572.
 - 200) SEEGRILLER, H.L., MARVIN, J.G. and LEVY, L.L.: Steady and Unsteady Transonic Flow, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 1262-1270.
 - 201) SANDBORN, V.A.: A Review of Turbulence Measurements in Compressible Flow, NASA TMX-62337 (1974).
 - 202) SANDBORN, V.A. and SEEGRILLER, H.L.: Evaluation of Mean and Turbulent Velocity Measurements in Subsonic Accelerated Boundary Layers, NASA TN D-8367 (1976).
 - 203) SANDBORN, V.A. and HORSTMAN, C.C.: Boundary Layer Shear Stress in Subsonic and Supersonic Flow, Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr., 18-20, Paper No. 8A (1977).
 - 204) ACHARYA, M.: Effects of Compressibility on Boundary-Layer Turbulence, AIAA P. 67-334; AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 303-304.
 - 205) ACHARYA, M., KUSSOY, M.I. and HORSTMAN, C.C.: REYNOLDS Number and Pressure Gradient Effects on Compressible Turbulent Boundary Layers, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 1217-1218.
 - 206) FERNHOLZ, H.H. and FINLEY, P.J.: A Critical Compilation of Compressible Turbulent Boundary Layer Data, AGARDograph 233 (AD A-045367) (1977).
 - 207) LAUNDER, B.E., MORSE, A., RODI, W. and SPALDING, D.B.: Prediction of Free Shear Flows—A Comparison of the Performance of Six Turbulence Models, NASA SP-321 (1972), pp. 361-426.
 - 208) TENNANKORE, K.N. and STEWARD, F.R.: Comparison of Several Turbulence Models for Predicting Flow Patterns within Confined Jets, Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr. 18-20, Paper No. 10B (1977).
 - 209) 河村 洋: 二方程式乱流モデルを用いた乱流ガスの加熱による層流逆遷移の解析, 第10回乱流シンポジウム講演集 (1978), pp. 101-108.
 - 210) RUBESIN, M.W., CRISALLI, A.J., LANFRANCO, M.J. and ACHARYA, M.: A Critical Evaluation of Invariant Second-Order Closure Models for Subsonic Boundary Layers, Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr., 18-20, Paper No. 4A (1977).
 - 211) RUBESIN, M.W., CRISALLI, A.J., HORSTMAN, C.C. and ACHARYA, M.: A Critique of Some Recent Second Order Closure Models for Compressible Boundary Layers, AIAA P. 77-128 (1977).
 - 212) MARVIN, J.G. and SHEAFFER, Y.S.: A Method for Solving the Nonsimilar Laminar Boundary-Layer Equations Including Foreign Gas Injection, NASA TN D-5516 (1969).
 - 213) ACHARYA, M., KUSSOY, M.I. and HORSTMAN, C.C.: REYNOLDS Number and Pressure Gradient Effects on Compressible Turbulent Boundary Layers, AIAA P. 78-199 (1978).
 - 214) HORSTMAN, C.C., KUSSOY, M.I. and LANFRANCO, M.J.: An Evaluation of Several Compressible Turbulent Boundary-Layer Models: Effects of Pressure Gradient and REYNOLDS Number, AIAA P. 78-1160 (1978).
 - 215) HIGUCHI, H. and RUBESIN, M.W.: Behaviour of a Turbulent Boundary Layer Subjected to Sudden Transverse Strain, AIAA P. 78-201 (1978).
 - 216) EAST, L.F.: Computation of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, EUROMECH 60, Trondheim 1975, FFA-TN-AE-1211 (1975).
 - 217) FANNELOEP, T.E. and KROGSTAD, P.A.: Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers in External Flows: A Report on EUROMECH 60,

- J.F.M., Vol. 71 (1975), pp. 815-826.
- 218) BALDWIN, B.S. and MACCORMACK, R.W.: Numerical Solution of the Interaction of a Strong Shock Wave with a Hypersonic Turbulent Boundary Layer, AIAA P. 74-558 (1974).
 - 219) VIEGAS, J.R. and COAKLEY, T.J.: Numerical Investigation of Turbulence Models for Shock Separated Boundary-Layer Flows, AIAA P. 77-44 (1977).
 - 220) COAKLEY, T.J. and VIEGAS, J.R.: Turbulence Modeling of Shock Separated Boundary-Layer Flows, Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr., 18-20, Paper No. 13 C (1977).
 - 221) COAKLEY, T.J. and VIEGAS, J.R.: Evaluation of Turbulence Models for Three Primary Types of Shock Separated Boundary Layers, AIAA P. 77-692 (1977).
 - 222) HOLST, T.L.: Numerical Solution of Axisymmetric Boattail Fields with Plume Simulators, AIAA P. 77-224 (1977).
 - 223) COAKLEY, T.J. and BERGMANN, M.Y.: Effects of Turbulence Model Selection on the Prediction of Complex Aerodynamic Flows, AIAA P. 79-0070 (1979).
 - 224) HORSTMAN, C.C. and HUNG, C.M.: Computation of Three-Dimensional Turbulent Separated Flows at Supersonic Speeds, AIAA P. 79-0002 (1979).
 - 225) FERZIGER, J.H. and KLINE, S.J.: Levels of Turbulence 'Prediction', NASA CP-2032 (1978), pp. 229-238.
 - 226) NASH, J.F. and SCRUGGS, R.M.: Three-Dimensional Compressible Boundary-Layer Computations for a Finite Swept Wing, NASA CR-112158 (1972).
 - 227) KORDULLA, W.: Investigations Related to the Inviscid-Viscous Interaction in Transonic Flows about Finite 3-D Wings, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 369-376.
 - 228) FERZIGER, J.H.: Large Eddy Numerical Simulations of Turbulent Flows, AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 1261-1267.
 - 229) CLARK, R.A., FERZIGER, J.H. and REYNOLDS, W.C.: Evaluation of Subgrid-Scale Turbulence Models Using a Fully Simulated Turbulent Flow, SU-TF-9 (1977).
 - 230) MANSOUR, N.N., FERZIGER, J.H. and REYNOLDS, W.C.: Large Eddy Simulation of a Turbulent Mixing Layer, SU-TF-11 (1977).
 - 231) SCHUMANN, U.: Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli, J.C.P., Vol. 18 (1975), pp. 376-404.
 - 232) GALLOWAY, F.M. and ADLER, R.J.: On a Finite-Difference Approach to Turbulence Problems, J.C.P., Vol. 10 (1972), pp. 379-399.
 - 233) DEARDORFF, J.W.: A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at Large REYNOLDS Numbers, J.F.M., Vol. 41 (1970), pp. 453-480.
 - 234) ORSZAG, S.A.: Turbulence and Transition: A Progress Report, Proc. 5th ICFD (1976), pp. 32-51.
 - 235) SCHUMANN, U. and PATTERSON, G.S.: Numerical Study of Pressure and Velocity Fluctuations in Nearly Isotropic Turbulence, J.F.M., Vol. 88 (1978), pp. 685-709.
 - 236) FORNBERG, B.: Pseudospectral Calculations on 2-D Turbulence and Nonlinear Waves, SIAM-AMS Proc., Vol. XI (1978), pp. 1-18.
 - 237) CHORIN, A.J.: Numerical Study of Slightly Viscous Flow, J.F.M., Vol. 57 (1973), pp. 785-796.
 - 238) LEONARD, A.: Simulation of Three-Dimensional Separated Flows with Vortex Filaments, Proc. 5th ICFD (1976), pp. 280-284.
 - 239) WU, J.C. and SUGAVANAM, A.: Method for the Numerical Solution of Turbulent Flow Problems, AIAA J., Vol. 16 (1978), pp. 948-955.
 - 240) REDA, D.C. and MURPHY, J.D.: Shock Wave Turbulent Boundary Layer Interaction in Rectangular Channels, Pt. II, AIAA P. 73-234 (1973).
 - 241) DWYER, H.A.: Solution of a Three-Dimensional Boundary-Layer Flow with Separation, AIAA J., Vol. 6 (1968), pp. 1336-1342.
 - 242) NASH, J.F. and SCRUGGS, R.M.: An Implicit Method for the Calculation of Three-Dimensional Boundary Layers on Fuselage Configurations, LG-76-ER-0199 (1976).
 - 243) HARRIS, J.E. and MORRIS, D.J.: Solution of the Three-Dimensional Compressible, Laminar, and Turbulent Boundary-Layer Equations with Comparisons to Experimental Data, Proc. 4th ICFD (1974), pp. 204-211.
 - 244) KENDALL, R.M., BONNETT, W.S., NARDO, C.T. and ABBETT, M.J.: Three-Dimensional Compressible Boundary Layers of Reacting Gases Over Realistic Configurations, NASA SP-347 (1975), pp. 77-99.
 - 245) ROTTA, J.C.: A Family of Turbulence Models for Three-Dimensional Thin Shear Layers, Symposium on Turbulent Shear Flows, Penn State Univ., Apr. 18-20, Paper No. 10 D (1977).
 - 246) MURPHY, J.D.: An Efficient Solution Procedure for the Incompressible NAVIER-STOKES Equations, AIAA J., Vol. 15 (1977), pp. 1307-1314.
 - 247) ROSE, W.C. and SEGNER, A.: Calculation of Transonic Flow Over Supercritical Airfoil Sections, AIAA P. 77-681 (1977).
 - 248) BRADSHAW, P. and FERRISS, D.H.: Calculation of Boundary-Layer Development Using the Turbulent Energy Equation: Compressible Flow on Adiabatic Walls, J.F.M., Vol. 46 (1971), pp. 83-110.
 - 249) BECKWITH, I.E. and BUSHNELL, D.M.: Detailed Description and Results of a Method for Computing Mean and Fluctuating Quantities in Turbulent Boundary Layers, NASA TND-4815 (1968).
 - 250) BLOTTNER, F.G.: Investigation of Some Finite-Difference Techniques for Solving the Boundary Layer Equations, Comp. Methods in Appl. Mech. Eng., Vol. 6 (1975), pp. 1-30.