論 文

CONTRIBUTED PAPERS

重力傾度による衛星の軌道制御の可能性*

Possibility of Orbit Control Using Gravity Gradient Effects

村 上 力**
Chikara MURAKAMI

Abstract

Possibility of orbit control using gravity gradient (GG) effects without any mass expulsion is discussed. For simplicity, a dumb-bell type satellite and circular orbits are mainly considered. It is shown that the GG effects can be applied to convert attitude torques into orbital torques and vice versa. In central gravitational force fields, maximum orbital torques or thrusts are available from the GG force when roll or pitch angle is $\pm\pi/4$ provided that attitude angle is null when the dumb-bell axis coincides with local vertical. Such external torques as geomagnetic or solar wind pressure can be utilized to maintain the $\pm\pi/4$ attitude, then orbital torques are available forever. In non-central gravitational fields, without any external torque, the orbital radii of circular orbits can be increased by controlling the satellite attitude using electric energy. The use of the earth's oblateness effects and the exterior Lunar potential is discussed. Numerical examples are presented.

衛星の姿勢運動と軌道運動との相互作用を論じた論文は著者の知る限りでは数少なく^{1)~4)}、通常は両運動は無関係であるかのように論じられている。本論文では古典的ニュートン力学のみに基づいて両者間の相互作用を論ずる。その際、剛体衛星の重力ポテンシャルとして、ある軌道位置および姿勢にあるときの衛星の分布質量のポテンシャルの総和をその衛星のポテンシャルとする。これによって重力傾度トルクの意味を、ポテンシャルに対する姿勢角の偏微係数の逆符号として理解することも可能となる。また、軌道・姿勢運動の角運動量の概念を明確にし、両者が本論文で定義された重力ポテンシャルと密接な関係を有し、重力傾度トルク効果が軌道トルクと姿勢トルクとの間で相互変換の触媒的作用をなすことを示す。具体例としてジェットなどのような物質を噴射しないで姿勢制御（電気

エネルギーによる）だけによって軌道制御が理論的に可能であることを、(1)中心力場の場合（ただし地磁気または太陽放射による姿勢トルクが必要）、(2)極軌道の増速（地球の偏平性の利用）、(3)月・太陽の引力利用による軌道増速、の三つの場合を例にとって計算例とともに示す。なお、本論文では解析を簡単にするため、衛星は啞鈴形状とし、地球-衛星系の質量中心(MC)は地球のそれとし、円軌道の場合を主として論ずる。

1. 姿勢トルク、軌道トルクと角運動量との関係

剛体衛星の慣性楕円体が球でない限り、一般に重力傾度（以下 GG と略称）トルクと称する姿勢トルク T_{GG} を受け、それによって衛星 MC まわりの姿勢角運動量 H_A は変化する。 T_{GG} は地球から受けるものであるから地球をも含めた系で論ずると、ほかに姿勢の外乱トルクがなければ全角運動量は保存されなければならない。この全角運動量とは地心まわりの全角運動量で、地球の地心まわり角運動量を H_E 、質点としての衛星の地心まわりのそれを H_O （軌道角運動量）とすれば、これら二者に H_A を加えた三者から成り、

$$H_E + H_O + H_A = \text{const.} \quad (1)$$

である。地球が真球ならば H_E は不変であるから(1)式を時間微分して（時間微分はドット記号で表わす）

$$\dot{H}_O + \dot{H}_A = 0 \quad (2)$$

$$\dot{H}_O = -\dot{H}_A = -T_{GG}. \quad (3)$$

(3)式から明らかに H_O は変化を受ける。しかし姿勢を能動的に制御でもしない限り、タンプリングや秤動運動となるから T_{GG} は振動的であるために、 H_O は増大または減少だけを続行することはできず、 $T_{GG}=0$ のときの H_O に実用上は無視できる程度の微小な変化を伴うことになる。これを一定方向にたとえば増大を続行させるためには、 T_{GG} が常に負になるように姿勢を保持すればよいことが(3)式からわかる。そのためにジェットを使用せずに、フライホイールで姿勢制御・保持することも一つの方法ではあるが、 T_{GG} に抗するにはホイールを一定方向に加速を続けなければな

* 昭和52年10月25~26日、第21回宇宙科学技術連合講演会にて講演。昭和54年10月12日原稿受理

** 航空宇宙技術研究所

第1図 重力傾度効果による三つの力 (T_{GG} , F_r , F_θ) の発生

らない。ホイールの無限加速が可能ならば軌道制御はジェットやロケットなしでホイールを駆動する電気エネルギーだけで可能となる。ホイールの無限加速はできないから、何らかのアンローディングが必要となる。質量噴射以外のアンローディングには磁気トルカ, GG, 太陽風などが考えられるが, GGは逆の T_{GG} が発生する姿勢ではじめて利用可能となるものであるから, H_0 の増大続行は不可能となる。太陽風はそれ自体で軌道制御に利用できるから⁵⁾, ここでは省略する。磁気トルカはそれ自身でも姿勢制御に使用できるが, 地磁気の方角によっては利用不可能の場合もあるのでホイールと併用するのが有効である。簡単のためホイールを除いて磁気トルカのトルク T_M だけで一定の T_{GG} を発生する姿勢を保持したとすれば, 地球は $-T_M$ の反作用を受けるから, 真球の地球では

$$\dot{H}_E = -T_M, \dot{H}_A = T_{GG} + T_M = 0.$$

したがって(1)式から

$$\dot{H}_0 = -\dot{H}_E - \dot{H}_A = T_M = -T_{GG}. \quad (4)$$

(4)式は磁気トルカによる姿勢トルクがGGを仲介として軌道トルクに変換されることを示している。

啞鈴衛星の軸方向が地心を目指す姿勢を基準とし, 軌道面法線方向の逆方向まわりの姿勢角 θ をピッチ角とすれば, 第1図に示すように重力の作用点 (重心) は衛星の質量中心 (MC) とは $\theta = \pm\pi/2$ 以外では一致せず, 円軌道では遠心力が MC に作用して地心と結ぶ方向をとる (証明は省略)。その結果, 衛星はそれが MC に集中した質点とみなされた場合と異なって, 同図(c)に示すように微小な重力の増分 F_r , 軌道方向の等価推力 $-F_\theta$, MC まわりの GG トルク T_{GG} を受けることになる。 F_θ に軌道半径 r を乗じた軌道トルクによる H_0 の増分と, T_{GG} による H_A の増分の和は, 角運動量保存則からゼロとなることは万有引力の距離の逆二乗則からも導けるが, ここでは省略する。

2. 重力ポテンシャルによる軌道・姿勢運動エネルギーと重力傾度トルク

以下においては重力ポテンシャルに基づく議論を展開

第2図 啞鈴衛星の軌道および姿勢の諸パラメータ

開することにする。

衛星の MC 位置を地心に対する慣性極座標 (r, ω) で表現する (第2図参照。 ω と θ の正方向は逆)。啞鈴のおもりを1および2に区別して関係諸量にはそれぞれ1および2の下添字をつける。おもりの質量は各 m で, 啞鈴の半長を l とする。衛星全体の質量 (啞鈴の場合には $2m$) で割った単位質量当たりの関係諸量には*の上添字をつける。地球を真球とし, その質量を M , 重力係数を G とすれば各おもりの重力ポテンシャル V_i ($i=1, 2$) は次式のように表現される:

$$V_i^* = -GM/r_i^{-1} \\ = -GM\{r^2 + l^2 - (-1)^i 2rl \cos \theta\}^{-1/2}. \quad (5)$$

衛星が質点の場合のポテンシャル V_0 は

$$V_0^* = -GM/r^{-1}. \quad (6)$$

つぎに啞鈴衛星のポテンシャル V と摂動関数 R を定義する:

$$V^* \triangleq (V_1^* + V_2^*)/2, \quad R^* \triangleq V_0^* - V^* \quad (7)$$

以下, $l \ll r$ と仮定する。(5)式を代入すると

$$R^* \approx -\{GM/(2r)\}(l/r)^2(1 - 3\cos^2 \theta). \quad (8)$$

次章で述べるように GG 効果による併進力 F_θ は

$$F_\theta^* = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial R^*}{\partial \omega} + \frac{\partial R^*}{\partial \theta} \right\} \\ \approx -\{3GM/(2r^2)\}(l/r)^2 \sin 2\theta. \quad (9)$$

上式から $\theta = \pm\pi/4$ に保持すれば最大の等価推力が得られることがわかる。円軌道を仮定し, θ を一定値 θ_c に保持すれば1軌道周回中における軌道運動エネルギー E_0 と V_0 との和を E_c として等価推力によるその増分 ΔE_c を求めると

$$\Delta E_c^* = \int_0^{2\pi} r F_\theta^* d\omega = -\frac{3\pi GM}{r} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \sin 2\theta_c. \quad (10)$$

ただし r は一定とみなした (後述する(16)式からもわかるように r の変化 Δr による ΔE_c への影響は $(l/r)^4$ のオーダーで無視できる)。

一方, 円軌道の軌道運動エネルギー E_0 は

$$E_0^* = (r\dot{\omega})^2/2 = -V_0^*/2 \quad (11)$$

$$\therefore r\dot{\omega}^2 = GM/r^2. \quad (12)$$

衛星の姿勢運動エネルギー E_A は $\theta_c = 0$ であるから,

(6), (12)式を使って

$$E_A^* = l^2(\dot{\omega} - \dot{\theta}_0)^2 = -V_0^*(l/r)^2/2 \quad (13)$$

したがって衛星の全エネルギー E_T は

$$\begin{aligned} E_T^* &= E_0^* + E_A^* + V^* \\ &= [- (1/2) - (l/r)^2/2 + 1] V_0^* - R^* \\ &\simeq V_0^* [1 - (l/r)^2(2 - 3 \cos^2 \theta)]/2 \end{aligned} \quad (14)$$

すなわち E_A や R は E_0 や V_0 に対して $(l/r)^2$ のオーダーにすぎない。

r の増分 Δr による全エネルギーの増分との関係は

$$\Delta E_T^* \triangleq \frac{\partial E_T^*}{\partial r} \Delta r \simeq \frac{1}{2} \frac{GM}{r^2} \Delta r \quad (15)$$

であるから (10) 式の $\Delta E_c^* = \Delta E_T^*$ とおいて Δr が求まる:

$$\Delta r = -6\pi r(l/r)^2 \sin 2\theta_0. \quad (16)$$

$\theta_0 = \pm \pi/4$ が $|\Delta r|$ を最大にする値である。すなわち

$$|\Delta r|_{\max} = 6\pi l^2/r. \quad (17)$$

磁気トルカなどの姿勢制御装置で T_{GG} に抗して θ を θ_0 に保持したとすれば、その装置が1軌道中でなした仕事は

$$\int_0^{2\pi} -T_{GG}^* d(\theta_0 - \omega) = \int_0^{2\pi} T_{GG}^* d\omega. \quad (18)$$

この量は (10) 式と等しいはずであるから

$$T_{GG}^* = -(3GM/2r) \cdot (l/r)^2 \sin 2\theta_0. \quad (19)$$

この値は重力傾度トルクとしてよく知られたものであるが、明らかに

$$T_{GG}^* = \dot{H}_A = -\frac{\partial R^*}{\partial \theta} \quad (20)$$

としても求められるが、この式は次章で再論する。

3. 重力傾度の姿勢一軌道トルクの変換効果

第3図に示すようにフライホイールまたは回転対称型の弾動ダンパを搭載した衛星の平面運動を考える。衛星およびホイールの回転軸は、軌道面 (XZ 面) の法線方向 (Y 軸方向) に限られ、併進運動は軌道面に限られるものとする。ホイールの軸まわりの慣性モーメント (MOI) を I_t とし、前章と同様に衛星全体の質量で割った値を * 印で表現する。衛星全体の MC まわりのピッチ軸まわりの MOI を I_y (ただしホイールはホイール MC 上の質点としてだけ寄与するものとする) とし、衛星の地心 O に対する位置を MC で代表して第2図と同様の表示方式をとるとする。衛星の

第3図 ダンパ (ホイール) を有する衛星の平面運動

運動エネルギー E は次式で表現される。

$$2E^* = \dot{r}^2 + (r\dot{\omega})^2 + I_y^*(\dot{\omega} - \dot{\theta})^2 + I_t^*(\dot{\omega} - \dot{\theta} - \dot{f})^2 \quad (21)$$

f はホイールの衛星に対する相対速度である。地球に対する衛星の剛体としてのポテンシャルを V 、ホイールのモータ駆動トルクを T_t 、粘性抵抗係数を ν 、消散関数を F とすれば

$$2F^* = \nu^* \dot{f}^2. \quad (22)$$

以上から外力がないとして系の運動方程式を導く:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\omega}) + I_y^* \frac{d}{dt}(\dot{\omega} - \dot{\theta}) + I_t^* \frac{d}{dt}(\dot{\omega} - \dot{\theta} - \dot{f}) \\ = -\frac{\partial V^*}{\partial \omega} \end{aligned} \quad (23)$$

$$I_y^* \frac{d}{dt}(\dot{\omega} - \dot{\theta}) + I_t^* \frac{d}{dt}(\dot{\omega} - \dot{\theta} - \dot{f}) = \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}) = r\dot{\omega}^2 - \frac{\partial V^*}{\partial r} \triangleq -F_r^* \quad (25)$$

$$I_t^* \frac{d}{dt}(\dot{\omega} - \dot{\theta} - \dot{f}) = \nu^* \dot{f} - T_t. \quad (26)$$

(25) 式は角運動量 H に無関係であり以下では使用しない。(24) 式の左辺は衛星全体の MC まわりの角運動量 H_A^* の時間微係数に等しいから

$$\frac{d}{dt}(H_A^*) = \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \quad (27)$$

ただし

$$H_A^* \triangleq I_y^*(\dot{\omega} - \dot{\theta}) + I_t^*(\dot{\omega} - \dot{\theta} - \dot{f}). \quad (28)$$

(23) 式に (24) 式を代入すれば

$$\frac{d}{dt}(H_0^*) = -\left(\frac{\partial V^*}{\partial \omega} + \frac{\partial V^*}{\partial \theta}\right) \quad (29)$$

ただし

$$H_0^* \triangleq r^2\dot{\omega}. \quad (30)$$

H_0 は衛星を質点とみなしたときの軌道角運動量であり、これの時間微分係数を求めると

$$\frac{d}{dt}(H_0^*) = r(2\dot{r}\dot{\omega} + r\ddot{\omega}) = r \frac{d^2 x_0}{dt^2} \quad (31)$$

ここに x_0 は第3図に示す $\vec{r}$ と直交する座標系 (円軌道ならば軌道接線座標系) である。結局次式となる:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} \triangleq F_a = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial V^*}{\partial \omega} + \frac{\partial V^*}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial V^*}{\partial x_0}. \quad (32)$$

上式はきわめて重要なもので、 F_a は姿勢トルク $(-\partial V/\partial \theta)$ にも依存することを表わしている。フライホイールの場合に、(24) と (26) 式から T_t を制御して $|\partial V/\partial \theta|$ が最大になるように姿勢制御すれば H_0 の一様な増大または減少をさせることは可能ではあるが、中心力場では $H_0 + H_A$ は一定不変であるから (ジェットや外力はないとして)、次章で論ずる GG による軌道制御においては、 H_0 だけに着目せず衛星の

全角運動量である

$$H_T \triangleq H_O + H_A \quad (33)$$

に着目して、その変化を論ずべきである。非中心力場においても H_O と H_A の GG による相互変換効果の観点から、 H_O だけよりも H_T の変化を論ずべきである。(27), (30), (33)式より

$$\frac{d}{dt}(H_T^*) = -\frac{\partial V^*}{\partial \omega} \quad (34)$$

中心力場では上式はゼロであるから当然ながら GG による軌道制御は不可能である。しかし、地球の偏平性などを考慮に入れた非中心力場においては $\partial V/\partial \omega$ は一般的にゼロではなく、かつ姿勢 θ の関数でもあるから姿勢制御による軌道制御の可能性がでてくる。

なお、 V の代りに摂動関数 R を用いる場合には

$$R \triangleq -(V - V_0) \quad (35)$$

と定義され、 V_0 は衛星を質点とみなし、かつ地球を真球とした場合の値とする。 V_0 は θ と ω に独立だから

$$\frac{\partial V}{\partial \omega} = -\frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial R}{\partial \theta} \quad (36)$$

したがってこれまで述べた3種類の角運動量の時間微分値は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}(H_A) = -\frac{\partial R}{\partial \theta} = \text{姿勢トルク} \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt}(H_O) = \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \theta} = \text{軌道トルク} \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt}(H_T) = \frac{\partial R}{\partial \omega} = \text{全トルク} \quad (39)$$

以上の3式は衛星の軌道や形状には無関係で、衛星については平面運動で、かつ内部の回転体の軸がその平面に垂直であること、だけが条件である。

4. 重力傾度効果による質量噴射なしの軌道制御

4.1 中心力場の場合 前章で述べたように、軌道半径の増大または減少を目的とする際には、衛星を質点とみなす軌道角運動量 H_O だけでなく、姿勢角運動量 H_A をも含めた全角運動量 H_T を制御すべきである。その意味においては、中心力場での GG だけの利用つまり $\partial V/\partial \theta$ によっては(39)式からわかるように H_T は制御できない。必ず外力を必要とする。たとえば第1章で述べたように T_{GG} が最大になるように姿勢を制御し、磁気トルカでホイールに蓄積された H_A をアンロードすれば、結果的には地磁気による外部姿勢トルクを軌道トルクに変換したことになる。逆に自動アンロード機構を内蔵する姿勢アクチュエータであるリアクションブーム⁶⁾は、GG を仲介として H_A を H_O に変換しているわけで、一般的には後者は前者よ

り10桁以上も大きいので軌道への影響は無視されている。

軌道面傾斜角の制御は、啞鈴衛星では $\pi/4$ のロール角 φ を半軌道だけ保持し、残りを $\varphi = -\pi/4$ に保持すれば、軌道法線方向の等価的推力による軌道トルクが H_O ベクトル方向に直角となるので原理的には可能である。しかし、この場合でもその姿勢保持のための内部ホイールの H_A を放出する必要がある、たとえば磁気トルカなどで H_A を地球の角運動量に反作用として与えれば結果的に磁氣的に軌道面傾斜角を制御したことになる。実際問題として長い啞鈴またはブームを短時間に $\pi/2$ 回転させることには問題がありそうなので、たとえば中心部の衛星本体からピッチ軸に対して左右(または片方だけ)に $\pm\pi/4$ に偏向させた長いブーム(先端におもりがあれば望ましい)を突き出し、このブームを太陽電池パネルのようにピッチ軸まわりに回転させ、あたかもブームが慣性空間に対して不動で衛星本体だけが地球指向ミッションならば1軌道1回転するように姿勢制御するほうが実現性が強い。

4.2 非中心力場の場合 本節ではもっぱら軌道運動の増速を目的とした制御方式について論ずる。まず、非中心力場における軌道増速の原理を概念的に述べる。第4図は質点衛星が円軌道で非中心力場を移動する際に等ポテンシャル面を通過する場合の遠心力と重力およびそれらの合力の関係を示したものである。非中心力場では等ポテンシャル面の曲率中心は一般的に地心とは一致せず、したがって上述の合力はゼロとはならず、軌道接線方向成分を有する。平面運動で考察すると等ポテンシャル線は必ず閉曲線となるので、第4図の場合のように、ある閉曲線内に突入すると、軌道は必ずその閉曲線内から外へ出なければならぬ。したがって合力の軌道接線方向成分の軌道一周積分値がゼロになることは、閉曲線への出入の回数が相等しいことから容易に理解できる。衛星が質点でなく質量分布を有する剛体となると、ポテンシャルは衛星の MC の位置だけでなく姿勢の関数でもあるから、姿勢を適当に制御すると上述の合力の軌道一周積分値はゼロにはならず、後述するように加速することも減速することも可能であることは、第4図からも予想で

第4図 非中心力場における軌道加速

きる。すなわち、等ポテンシャル線内に入るときはたとえ啞鈴衛星ならば長手方向が重力方向になるように姿勢制御すると等価的に重力が増加し (第1図(c)に示す F_r)、そのため遠心力との合力の軌道接線方向成分が増大し、逆に等ポテンシャル線から出るときは啞鈴軸を等ポテンシャル線に一致させるかまたは啞鈴長 l をゼロにすれば F_r は逆符号かゼロとなるので、軌道一周積分では軌道加速となる。

いま述べた制御方式を力でなくエネルギー的に考察すると、軌道上で大幅な姿勢変更をする位置は、軌道が等ポテンシャル線に接する場所、すなわち $\partial V/\partial \omega = 0$ の点である。または軌道上で $V_{\max}$ の位置から軌道は等ポテンシャル線内に入り始め、このときから啞鈴軸を重力方向に向けるのであるから、この姿勢変更では姿勢運動エネルギーを放出することになる (ホイールによる姿勢制御ならばホイールが発電または発熱する)。逆に $V_{\min}$ の位置からは啞鈴軸を水平にすることになるので、ここでは姿勢変更のためにエネルギーを消費する。しかしこの消費量は $V_{\max}$ の点での発電量よりも大きい。なぜなら、 $V_{\min}$ のほうが等価的に地球に近くなるので T_{GG} が大きくなるからである。この原理はブランコの振幅増大のときのエネルギー受授の関係と類似の関係にある。以上は軌道制御方式の一例である。

等ポテンシャル面の非球面性を利用する軌道制御の特徴は、中心力場の場合のように地磁気などで姿勢角運動量を必ずしも放出する必要がないことである。衛星によって獲得された軌道角運動量の反符号分を地球に与えることになるからである。その定性的説明としては、第4図において重力方向が地心より左側にあるから、軌道加速の姿勢では等価的に重力が増大するので、その反作用として地球は地心まわりに逆向きの (時計まわり) のトルクを受け、逆に等ポテンシャル線から出るときにはより小さい逆符号トルクを受ける。したがって軌道一周積分では衛星は反時計まわりに加速され、地球は逆向きの角運動量を獲得するので角運動量保存則は破られない。真球の地球ならば地球への反作用がないので、軌道角運動量はホイールなどに逆方向に蓄積されて角運動量は保存される。

4.2.1 極軌道の加速 啞鈴衛星が地軸 (Z 軸) を含む極軌道を円軌道で周回する場合を定量的に論ずる。非中心力は主として地球の偏平性から生じるので、ここではいわゆる J_2 項だけを対象とする。地球の地軸まわりの MOI を C 、地心を通り地軸に直角な軸 (X 軸) まわりのそれを A とすれば地球によるポテンシャルは動径 r と赤道面からの距離 Z だけによって次式で与えられる⁷⁾ (第2図参照) :

$$V_i^* = -\frac{GM}{r_i} - \frac{G(C-A)}{2r_i^3} \left(1 - 3\frac{Z_i^2}{r_i^2}\right), \quad i=1, 2. \quad (40)$$

これから (7) 式で与えた摂動関数 R を計算すると

$$R^* = GM[r_1^{-1} + r_2^{-1} - 2r^{-1}]/2 + G(C-A)[(X_1^2 - 2Z_1^2)r_1^{-5} + (X_2^2 - 2Z_2^2)r_2^{-5}]r_2^{-5}/4 \quad (41)$$

(41) 式の第1項は地球の真球分による効果または中心力場の効果で、第2項は地球の偏平性の効果である。この R を用いて (37)~(39) 式のトルクを算出する。やっかいな計算の結果 (l/r) の2乗までの近似式は

$$\frac{\partial R^*}{\partial \omega} = -\frac{3G(C-A)}{2r^3} \left[\sin 2\omega + \left(\frac{l}{r}\right)^2 \left\{ \frac{5}{4} \sin 2\omega + \frac{3}{8} \sin 2(\omega - \theta) + \frac{35}{8} \sin 2(\omega + \theta) \right\} \right] \quad (42)$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial \theta} = -\frac{3G}{2r} \left(\frac{l}{r}\right)^2 \left[M \sin 2\theta - \frac{C-A}{r^2} \left\{ \frac{5}{4} \sin 2\theta + \frac{3}{8} \sin 2(\omega - \theta) - \frac{35}{8} \sin 2(\omega + \theta) \right\} \right] \quad (43)$$

全角運動量 H_T の軌道一周増分 ΔH_T は (39) 式を積分して求めるのであるが、(42) 式のうち、 θ すなわち姿勢に無関係な ω だけの項は軌道一周積分ではゼロとなるから、 $dt = d\omega/\dot{\omega}$ を用いて

$$\Delta H_T^* = \int_0^{2\pi} -k \left\{ \frac{3}{8} \sin 2(\omega - \theta) + \frac{35}{8} \sin 2(\omega + \theta) \right\} d\omega \quad (44)$$

$$k \triangleq \frac{3G(C-A)}{2r^3 \dot{\omega}} \left(\frac{l}{r}\right)^2. \quad (45)$$

ΔH_T を最大にする θ を求めると、(44) 式の被積分関数の θ に関する停留値を求めた結果、次式となる :

$$2\theta = -\tan^{-1}[(16/19)\cot 2\omega]. \quad (46)$$

ここで簡単のため (44) 式の第1項を無視すると

$$2\theta \approx -[2\omega + \pi/2] \quad (47)$$

ときわめて単純になる。これを (44) 式に代入すると

$$\Delta H_T^* = 35\pi k/4. \quad (48)$$

このときの軌道一周で蓄積された角運動量 ΔH_A は (43) 式を (37) 式に代入して

$$\Delta H_A^* = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial R^*}{\partial \theta} \frac{d\omega}{\dot{\omega}} = -35\pi k/4. \quad (49)$$

したがって軌道角運動量の増分 ΔH_0 は

$$\Delta H_0^* = \Delta H_T^* - \Delta H_A^* = 35\pi k/2. \quad (50)$$

つまり H_0 は (50) 式のみで増大するが、(47) 式のような姿勢制御をホイールで行なったとすれば、ホイールには (49) 式分の H_A が蓄積されるので、これを GG で放出変換すれば[†] ホイール分はゼロとなるが、同時

[†] たとえば増速の姿勢 ((47) 式) を中断し、 $\theta = \pi/4$ に保持するのも一方法である。

第5図 極軌道加速のための姿勢制御

に軌道分が消費された結果、 ΔH_0 は半減して (48) 式となる。いわば、 ΔH_0 は見掛けの軌道増速に相当する。

前述したブランコと同様な原理に基づく方法は第5図に示すように、両極 (b), (d) において姿勢を水平から鉛直に変え、赤道 (a), (c) においては逆に鉛直から水平に姿勢を変える。これを式で表現すると

$$\begin{aligned}\theta &\approx 0 \quad (\omega = \pi/2 \sim \pi, 3\pi/2 \sim 2\pi) \\ &\approx \pi/2 \quad (\omega = 0 \sim \pi/2, \pi \sim 3\pi/2).\end{aligned}\quad (51)$$

近似記号を使ったのは上述4点以外で局所鉛直に対してゼロまたは $\pi/2$ とするためで、(43) 式 (ほとんど第1項に支配される) がゼロとなるように制御する[†]。この場合の ΔH_T は次式で与えられる：

$$\Delta H_T^* = 19k. \quad (52)$$

便宜上この方式をオンオフ式と呼び、(46) または (47) 式の方式を連続式と呼んで区別することにする。 ΔH_T に関して連続式とオンオフ式を比較すると、後者は前者の約 69% である。なお、後者の ΔH_A は当然ながら

$$\Delta H_A^* = 0. \quad (53)$$

したがってオンオフ式の場合は見掛けの軌道増速 ΔH_0 は実質的増速 ΔH_T に等しい。もしも、(51) 式を完全に等号にした場合には、計算の結果、 ΔH_T は (52) 式と同一となるが、 ΔH_A はゼロとはならず

$$\Delta H_A^* = -16k \quad (54)$$

となって見掛けの軌道増速 ΔH_0 は $35k$ に増大する。

軌道増速を ΔH_T で表現するよりも軌道半径 r の増分 Δr で表現したほうが便利な場合もあるので、 ΔH_T と Δr との関係を導く。ただし衛星を質点とみなし、 $\Delta H_A = 0$ 、すなわち $\Delta H_0 = \Delta H_T$ とする：

$$H_0^* = r^2 \dot{\omega} \quad (55)$$

$$r \dot{\omega}^2 = GM/r^2 \quad (\text{遠心力} = \text{重力}) \quad (56)$$

の2式から

第6図 月の重力ポテンシャルの利用

$$\Delta r = (2r^2 \dot{\omega} / GM) \Delta H_T^*. \quad (57)$$

前述の両方式の場合について計算すると

連続の場合：

$$\Delta r = \{105\pi(C-A)/(4Mr)\} (l/r)^2 \quad (58)$$

オンオフの場合：

$$\Delta r = \{57(C-A)/(Mr)\} (l/r)^2 \quad (59)$$

となる。

オンオフの場合について前述のエネルギー的考察を確認するために、第5図の (a) ~ (d) における姿勢制御に要した仕事量 ΔE を求める。(a) と (c)、(b) と (d) での仕事量は等しいから

$$\begin{aligned}\Delta E^* &= 2 \int_0^{\pi/2} -\frac{\partial R^*}{\partial \theta} \bigg|_{\omega=0} d\theta \\ &\quad + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} -\frac{\partial R^*}{\partial \theta} \bigg|_{\omega=\pi/2} d\theta \\ &= \{57G(C-A)/(2r^3)\} (l/r)^2.\end{aligned}\quad (60)$$

これが軌道エネルギーに変換されたとすると、(15) 式より Δr を求めると、当然ながら (59) 式と一致する。

4.2.2 月、太陽によるポテンシャルの利用法 月、太陽の地球重力場への影響は潮汐効果として知られている。簡単のため、質量 M_m の月が赤道面上に地球から D_m 、衛星から D_1 の距離にあって、第6図に示すように啞鈴衛星が赤道面 (XY 面) 上を半径 r の円軌道を画くものとする。地球、月ともに質点とみなして近似解析をする。地望近傍の等ポテンシャル面は月の影響によってひずみを受けるので、まず月の摂動関数 R_m を計算する。仮定として $D_m \gg r$ とし、衛星と月を結ぶ直線が X 軸に平行であるとすると、この仮定によって以下の解析がきわめて簡単になる。衛星の月に対する姿勢 θ_m を啞鈴軸が $-X$ 軸方向となす角度で定義する：

$$\theta_m \triangleq \theta - \omega \quad (61)$$

ここに θ は前と同様に地球に対するピッチ姿勢角、 ω は X 軸を基準とした軌道角である。また、衛星と月との距離 D_1 は次式で与えられる：

$$D_1 = D_m - r \cos \omega. \quad (62)$$

(61), (62) 式を (5) ~ (7) 式に代入すると

$$R_m^* = -\frac{GM_m l^2}{2(D_m - r \cos \omega)^3} \{1 - 3 \cos^2(\theta - \omega)\}$$

[†] 局所鉛直 (重力) 方向が地心からわずかにずれるので、言葉での鉛直と水平は $\theta = 0, \pi/2$ とはならない。 $\theta = 0, \pi/2$ にすると $\Delta H_A \neq 0$ となる。

$$+ \frac{GM_m}{D_m - r \cos \omega} \quad (63)$$

上式で θ を含む項だけが制御できる項 R_{mc}^* であるから

$$R_{mc}^* = (3/2)GM_m l^2 \cos^2(\theta - \omega) \cdot (D_m - r \cos \omega)^{-3} \quad (64)$$

$$\approx (3/2)GM_m l^2 D_m^{-3} \cos^2(\theta - \omega). \quad (65)$$

したがって

$$\frac{\partial R_{mc}^*}{\partial \omega} \approx \frac{3}{2} \frac{GM_m l^2 \sin 2(\theta - \omega)}{D_m^3} \quad (66)$$

(39)式から

$$\Delta H_T^* \approx \int_0^{2\pi} \frac{\partial R_{mc}^*}{\partial \omega} \frac{d\omega}{\dot{\omega}} \quad (67)$$

ΔH_T を最大にする θ は (66) 式から明らかである:

$$\theta = \omega + \pi/4. \quad (68)$$

この姿勢の場合に得られる ΔH_T と Δr は計算の結果

$$\Delta H_T^* \approx 3\pi GM_m l^2 / (D_m^3 \dot{\omega}) \quad (69)$$

$$\Delta r \approx 6\pi (M_m/M) (r/D_m)^2 (l/D_m) l. \quad (70)$$

(68) 式は一種の連続制御である。面白いことに、この姿勢は慣性空間に対して一定である。つまり、 X または Y 軸に対して $\pi/4$ の姿勢であり、月に対しても $\pi/4$ の姿勢保持を続けることを意味している。この姿勢の物理的解釈は、地球に対しては1周するので姿勢による軌道への効果は1軌道周回積分ではゼロとなるのに対し、月から見ると月に対する $\pi/4$ の姿勢は軌道の半分 $X > 0$ では増速となるが、残りの半分、 $X < 0$ では減速となる。軌道1周のうち、 $X > 0$ では月により近いために効果がより大きく、結果として増速になると考えることができる。

極軌道の場合と同様にオンオフ型の制御がこの場合にも可能である。オンオフ型での計算結果は

$$\Delta H_T^* = 6GM_m l^2 / (D_m^3 \dot{\omega}) \quad (71)$$

$$\Delta r = 12(M_m/M) (r/D_m)^2 (l/D_m) l. \quad (72)$$

これらの値は連続の場合の約 2/3 である。

以上は月だけの影響であるが、太陽が月と地球を結ぶ線上にある場合には、太陽の効果が月のそれに重畳される。太陽を質量 M_s の質点とし、地球からの距離を D_s とすれば、オンオフ制御方式の場合の Δr は:

$$\Delta r = 12(r/l)^2 [(M_m/D_m^3) + (M_s/D_s^3)] / M. \quad (73)$$

前述の連続制御方式のように ΔH_A がゼロにならない場合もあるから、GG によるアンローディングが必要である。たとえばホイール制御の場合には、ホイールのタコメータによって ΔH_A を検出し、その信号の長時間平均値を姿勢制御系にフィードバックして、前述の決定された姿勢から微小の姿勢のズレを設けきわめてゆるやかに ΔH_A をアンロードすることも可能であろう。この制御の詳細は省略する。

4.3 数値計算例 衛星を啞鈴形状とし、次の寸法、重量を仮定した:

$$l = 1 \text{ km} \quad (\text{全長} = 2l)$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad (\text{衛星質量} = 2m).$$

軌道半径の軌道1周当りの平均増分 Δr と、同様に軌道接線方向の等価平均推力 $\bar{F}_w$ を、次の3ケースについて計算した。各ケースごとに1, 2, 3の下添字を付けて区別した。各ケースとは:

1: $\theta_c = -\pi/4$, 中心力場, ((16), (17)式)

2: オンオフ, 極軌道, ((59)式)

3: オンオフ, 太陽-月-地球の直列, (73)式

$\bar{F}_w$ の計算は、(32)式は ΔH_A を考慮しない「見掛け」の推力であるから、これを用いずに (39) 式を用いて次式で平均して求めた:

$$\bar{F}_w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \omega} d\omega. \quad (74)$$

ただしケース1では $\partial R / \partial \omega = 0$ であるから、(32)または (38) 式の第2項 $\partial R / \partial \theta$ だけを利用するとして、(74) 式の $\partial R / \partial \omega$ の代りに $\partial R / \partial \theta$ で置きかえて計算した。したがって当然ながら ΔH_A は地磁気またはその他の外力でアンロードされるものとする。これらの計算結果を第7図に示す。

第7図 三つのケースについての Δr と $\bar{F}_w$ の計算値

明かにケース1が最も有効である。ケース2は低軌道ほど有効であり、それは地球の偏平効果が軌道半径増大とともに低下するからである。逆にケース3は他天体の影響が高高度ほど大きく、 Δr はケース2と逆になっている。

ケース1を実用化するに際し、静止軌道のステーション・キーピングが考えられるが、惜しいことに地磁気が弱く、 ΔH_A のアンロードが困難である。極軌道ならば地磁気が有効利用できるので、ブーム、磁気トルカ、フライホイールによって軌道の加減速のみならず軌道傾斜角制御にも利用できる可能性がある。

ケース2,3は等価推力があまりにも微弱なために現在のところ、ほとんど実用的価値はない。しかしながら将来、惑星間飛行などで微弱な等価推力が必要となれば、重力方向のセンサを用い、ブームを制御することも考えられる。

5. 結 言

剛体衛星の重力傾度効果と、軌道・姿勢運動との関係を明らかにし、とくに重力傾度効果が、軌道角運動量(またはトルク)と姿勢角運動量(またはトルク)との相互間の変換作用または触媒的作用のあることを示した。

姿勢制御用フライホイールは、重力傾度効果により軌道角運動量の貯蔵作用のあることも示した。

具体的数値計算例を示し、そのうちでケース1が最も有効で、実用化に最も近い方法であろうと考えられる。ただし、他の外乱効果、たとえば太陽風の影響や、ブーム制御時の撓み振動等の制御上の問題にはふれなかった。

本論文の作成にあたり、解析の手法、やっかいな計算式の検算などで、航技研・木田隆技官の助力を得た。ここに謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) KANE, T.R. *et al.*: Gravitational Forces and Moments on Spacecraft, NASA CR-2618 (1975).
- 2) BELETSKII, V.V.: Motion of an Artificial Satellite about Its Center of Mass, NASA TTF-429 (1966).
- 3) MORAN, J.P.: Effects of Plane Librations on the Orbital Motion of a Dumbbell Satellite, ARS J. (Aug. 1961), pp. 1089-1096.
- 4) 村上 力: 人工衛星の姿勢運動と制御に関する研究, 京大学位论文 (1978).
- 5) SHRIVASTAVA, S.K.: Orbital Perturbations and Station Keeping of Communication Satellites, J. Spacecraft, Vol. 15, No. 2 (1978), pp. 67-78.
- 6) HOOKER, W.W. *et al.*: Reaction-Boom Attitude Control Systems, J. Spacecraft, Vol. 7, No. 11 (Nov. 1970), pp. 1337-1343.
- 7) MEIKOVICH, L.: Method of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, New York (1954), p. 458.

2次元翼のアクティブ・フラッタ・サプレッション(第3報)

前縁操縦翼面制御の効果*

Active Flutter Suppression of Two-dimensional Wing (Part 3)

Effect of Controlling a Leading-edge Control Surface

李 成一**・小林 繁夫**

Sung Il RHEE and Shigeo KOBAYASHI

Abstract

As a method of active flutter suppression, controlling a leading-edge control surface is analytically studied for a two-dimensional wing in the use of the oscillating incompressible aerodynamic force. Four quantities, i.e. rotation and translation of the wing and their velocities, are fed-back so as to move the leading-edge control surface. The control law proportional to wing rotation is most effective in flutter suppression

independently of the location of the center of gravity. Therefore this feed-back system is only one method of flutter suppression in the case where the center of gravity is behind a certain point, for example, 45% chord. The mechanism of the present flutter suppression is clearly explained by an approximate analysis in the use of the steady aerodynamic force.

1. 緒 言

著者らは先に第1報¹⁾で、重心位置が45%翼弦の場合には、補助翼を用いてはいかなる制御則を用いても抑止しえないことを明らかにした。その後、第1報

* 昭和53年7月19日、第20回構造強度に関する講演会で発表。昭和54年12月21日原稿受理

** 東京大学工学部航空学科