擾乱法を適用して、湾曲した流線に沿う半噴流の解析を行なった。半噴流が接続すべき非回転流の0流線を x 軸として、微小パラメータを x のべきで表現した。境界条件は一次の解に対しては正しい形で、また二次の解に対しては便宜的な形で与えた。このため得られた解は近似的なものとなるが、従来の相似な流れ場のほかに非相似な流れ場をも取り扱うことができた。相似解のほかに一例として x 軸を円弧とする場合の速度および圧力の分布を示した。

この結果をノズル幅が有限な湾曲噴流のノズル近傍の流れに適用して、測定値と定性的に一致する速度分布を得た。

参考文献

- 1) 谷 一郎: 境界層の速度分布に及ぼす曲率の影響, 日本機械学会誌, 第57巻, 第428号(1954), pp. 596-598.
- 2) 伊藤英覚: 境界層理論における曲率の影響, 日本機械学会論文集, 第18巻, 第69号(1952), pp. 23-28.
- 3) MURPHY, J. S.: Some Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary Layer Flow, *J. Aeron. Sci.*, Vol. 20, No. 5 (1953), pp. 338-344.
- 4) MASSAY, B. S. and CLAYTON, B. R.: Some Properties of Laminar Boundary Layers on Curved Surfaces, *J. Basic Eng.*, Vol. 90, No. 2 (1968), pp. 302-312.
- 5) SCHULTZ-GRUNOW, F. and BREUER, W.: Laminar Boundary Layers on Cambered Walls, *in* Basic Developments in Fluid Dynamics, Vol. I (M. HOLT ed.), Academic Press, New York & London (1965), pp. 377-436.
- 6) NARASIMHA, R. and OJHA, S. K.: Effect of Longitudinal Surfaces Curvature on Boundary Layers, *J. Fluid Mech.*, Vol. 29 (1967), pp. 187-199.
- 7) LINDOW, B. and GREBER, I.: Similarity Solution for a Laminar, Incompressible Jet Flowing along a Curved Surface, *AIAA J.*, Vol. 6, No. 7 (1968), pp. 1331-1335.
- 8) WYGNANSKI, I. J. and CHAMPAGNE, F. H.: The

- Laminar Wall-Jet over a Curved Surface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 31 (1968), pp. 459-465.
- 9) CLARK, A. L. and WATSON, E. J.: Displacement and Curvature Effects in a Wall Jet, *J. Fluid Mech.*, Vol. 50 (1971), pp. 369-392.
- 10) UCHIDA, S. and SUZUKI, T.: On a Similar Solution for a Turbulent Half-Jet along a Curved Streamline, *J. Fluid Mech.*, Vol. 33 (1968), pp. 379-395.
- 11) UCHIDA, S., KUWABARA, K. and KISHI, M.: On a Similar Solution for the Laminar Half-Jet along a Curved Streamline, *Trans. JSASS*, Vol. 16, No. 34 (1973), pp. 264-279.
- 12) WILLIAMS, J. C., III, CHENG, E. H. and KIM, K. H.: Curvature Effects in the Laminar and Turbulent Free Jet Boundary, *AIAA J.*, Vol. 9, No. 4 (1971), pp. 733-736.
- 13) Van DYKE, M.: Higher Order Boundary Layer Theory, *in* Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 1 (W. R. SEARS and M. Van DYKE, ed.), Annual Review Inc., Palo Alto, Calif. (1969), p. 271.
- 14) KUETHE, A. M.: Investigations of the Turbulent Mixing Region Formed by Jets, *J. Appl. Mech.*, Vol. 2, No. 3 (1935), pp. A-87-A-95.
- 15) TING, L.: On the Mixing of Two Parallel Streams, *J. Math. Phys.*, Vol. 38 (1959), pp. 153-165.
- 16) YEN, K. T.: On the Indeterminateness of the Boundary Conditions for the Mixing of Two Parallel Streams, *J. Appl. Mech.*, Vol. 27 (1960), pp. 390-392.
- 17) LOCK, R. C.: The Velocity Distribution in the Laminar Boundary Layer between Parallel Streams, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 4 (1951), pp. 42-63.
- 18) 佐々木誠: 周辺噴流型空気クッションの動特性に関する研究(第1報), 日本機械学会論文集, 第38巻, 第313号(1972), pp. 2249-2258.
- 19) 桑原宏成, 内田茂男: 非圧縮性流体の湾曲した層流平面噴流の解析, 日本航空宇宙学会誌, 第28巻, 第321号(1980), pp. 495-500.
- 20) 桑原宏成: 湾曲壁に沿う層流噴流, 日本航空宇宙学会誌, 第28巻, 第323号(1980), pp. 595-600.

音響加振による平板パネルのランダム振動実験*

An Experimental Study of Random Vibration of a Flat Panel under Acoustical Excitation

末 益 博 志**・小林 繁 夫***

Hiroshi SUEMASU, Shigeo KOBAYASHI

紀 平 正 知***

and Masatomo KIHARA

Abstract

A test model having a backside long cylin-

drical space excluded by a rigid pipe was acoustically excited in an exponential horn. The analysis of the sound field both inside and outside the cylindrical pipe has been performed considering the correlation between the vibration of the panel and the sound pressure. Good agreements have been obtained between the

* 昭和54年7月13日, 第21回構造強度に関する講演会で発表。昭和55年6月23日原稿受理

** 東京大学宇宙航空研究所

*** 東京大学工学部航空学科

analytical and experimental results of the root-mean-square and auto-correlation of the strain response. This result shows that the analysis of the sound field affected by the panel vibration plays an important role to get the good agreement. The influence of the panel vibration on a measured pressure, the relation between a measured and the exciting pressure, and the suitable position of microphone have been disclosed. In the present test apparatus, air vibration in the backside cylinder caused by the panel vibration has increased the equivalent damping coefficient of the panel. The value is about four times greater than that of the panel material itself.

1. 緒 言

音響疲労は航空機およびロケット構造において重要な問題の一つである。筆者らはこの問題の理論的解明のための基礎研究として、周辺固定矩形板について振動台上での加速度加振による実験とシミュレーション法を用いた解析を行なって、実験値と理論値がよく一致することを示した¹⁾。しかし実際には音圧で加振される現象である。音圧でパネルを加振した実験はいくつか見られるが^{2)~4)}、真の加振音圧と測定音圧との関連について音場の解析まで行なって理論値と実験値とを比較した研究結果は見られないようである。

そこで音響加振した場合の実験値と理論値との一致の度合を調べる目的で、ホーン内で加振する模型実験を行なった。パネルをホーン内で音響加振するのはあまり適当な方法でないことが知られているが⁵⁾、大学の実験室内で音を作るパワーの限界から、やむをえずこの方法を用いた。そこでこれを補うため、実験の状況を明確に把握し、測定音圧と加振音圧との関係および試験板の振動による音場の変化およびそれが板の振動特性に及ぼす影響を解析的に調べた。

2. 実 験

第1, 2図に示したような近似的にエクスポネンシャルなホーンを電磁加振器上に固定し、加振器に取り付けた剛体振動板(直径100mm, 厚さ10mmのアルミ合金板)を振動させることによって音圧を発生させる装置を作製した。ホーン内に発生する音場で前実験¹⁾で用いた周辺固定の矩形パネル(第4図参照)を加振し、パネルの応答特性を測定した。試験板、固定枠ともに温度変化による板面内条件の変化を避けるためスーパインバを用いた。パネルの寸法および材料特性を第1表に、共振振動数を第2表に示した。

ランダム音圧は、ノイズ発振器で発生させたホワイト

第1図 実験装置

第2図 実験装置の写真

トノイズ信号をバンドパスフィルターを通して加振器に与えて作った。音圧はコンデンサーマイクロホンを用いて測定した。歪応答は、長辺の中点から3mmの点の裏表に貼った2枚の抵抗線歪計(ゲージ長2mm)の出力の差をとって曲げ歪として取り出した。板厚に比べて歪計の厚さが無視できないことを考慮して曲げ実験により校正した値を用いた。

まず予備実験として、固定枠を第1図に示したように音場内に吊して加振し、音圧をパネルと同高さの点で測定したが、表面歪の2乗平均平方根(RMS)について、測定音圧が板の表面(下面)にのみ作用するとして計算した理論値は、実験値より27%大きかった。これは板の裏面に作用する音圧の影響を無視したからで、そこで加振音圧を直接測定する目的で、板の中央、下面下30mmと上面上100mmの音圧を同時測定して差音圧を求めたが、そのパワースペクトル密度

第1表 試験片の寸法および材料特性

辺の長さ	a	80.0 mm
"	b	96.0 mm
板厚	h	0.263 mm
ヤング率	E	$1.41 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$
ポアソン比	ν	0.25
密度	ρ	$8.12 \times 10^{-10} \text{ kgf sec}^2/\text{mm}^4$
熱膨張係数	α_T	1×10^{-7}

第2表 共振振動数

	実験値	理論値
1 次	236 Hz	248.9 Hz
2 次	770 Hz	777.8 Hz
3 次	—	1041.6 Hz

第3図 音圧遮蔽用円筒

第4図 試験パネル

(PSD) はパネルの振動の影響を強く受けており、上下面同時測定しても加振音圧 ((1) 式の $p_o - p_i$) を直接知ることができないことがわかった。

そこで本実験では、第3, 4図に示したようにパネル固定枠を円筒下部に固定し、この円筒をホーン内に吊して音響加振し、加振音圧がパネルの裏側に入り込まないように配慮した。円筒壁の振動は、その板厚を6mmにとったので無視できると考えられる。またパネルを共振させたときに円筒内部の音圧が外側の音圧

第5図 円筒内外の音圧の PSD

第6図 歪εの ACF, 実験値と解析値の比較

第7図 歪εの RMS, 実験値と解析値の比較

と同程度となったので、第3図に示したように円筒内面に厚さ 40 mm 程度のポリウレタンを貼った。円筒外側の音圧は円筒の横、試験片と同高さ位置で、円筒内側の音圧はパネル上方 130 mm の点で測定した (第3図参照)。無次元音圧 f ((6) 式参照) の PSD を第5図に外側の音圧を実線で、内側の音圧を破線で示した。無次元歪 ε ((9) 式参照) の自己相関関数 (ACF) を第6図に、 f の RMS と ε の RMS の関係を第7図に、 $\odot$ 印で示した。図示は省略したが ε , f の確率密度関数 (PDF) はともに正規分布曲線と一致し、 ε , f がガウスランダム過程であることを示している。内部音圧 f_i と ε の相互スペクトル密度 $\Phi_{\varepsilon f_i}$ を第8図に示した。

第8図 歪 \$\varepsilon\$ と円筒内部音圧 \$f_1\$ の相互スペクトル密度

第9図 ランダム加速度による音圧の PSD と正弦波加速度による音圧の比較

さらに試験片の振動によって発生する音圧を取り除いた音場の状態を調べる目的で、試験板のかわりに剛板（厚さ 5 mm のアルミ合金板）を取り付けて、剛体振動板に振幅 10 g の正弦波の加速度を与えてスイープ試験をした結果得られた無次元音圧の 2 乗平均 $\bar{f}^2$ を第9図に破線で示した。また点線で示した PSD 分布を有するランダムな加速度を与えて得られた音圧の PSD を実線で示した。150 Hz 以下は問題外として、両者はよく一致した。この結果から剛体振動板に与えた加速度と音圧測定点の音圧の間には線形の関係があると判定される。また試験板の振動のない状態で第9図のように $\bar{f}^2$ にピークができるのは、このホーン自体の共振によるものと考えられる。

3. パネルの振動を考慮した音場の解析

3.1 パネルの振動方程式 実験で得られた音圧はあまり大きくなく、パネルの振幅は線形理論の範囲内であったので、以下線形理論で記述する。板の振動方程式は、

$$D \Delta_2 \Delta_2 w + (\eta_0 D / \omega_1) \Delta_2 \Delta_2 (\partial w / \partial t) + \rho h (\partial^2 w / \partial t^2)$$

$$\begin{aligned} & - \sigma_{0x} (\partial^2 w / \partial x^2) - \sigma_{0y} (\partial^2 w / \partial y^2) \\ & - \tau_{0xy} (\partial^2 w / \partial x \partial y) = p_o - p_i + p_o^* - p_i^* \end{aligned} \quad (\Delta_2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2) \quad (1)$$

と書かれる。ここで D は板の曲げ剛性、 η_0 は減衰係数、 ω_1 は 1 次の固有円振動数、 ρ は板の密度、 h は板厚、 w は z 方向変位、 σ_{0x} 、 σ_{0y} 、 τ_{0xy} は中央面内の初期応力、 p は音圧である。ここで p の添字 (o) は円筒外側、(i) は円筒内側、(*) は板の振動によって生じる音圧を意味する。本実験の境界条件は周辺固定で、

$$\begin{aligned} x &= \pm a/2; & w &= \partial w / \partial x = 0 \\ y &= \pm b/2; & w &= \partial w / \partial y = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

と書かれる。

本実験の加振音圧の PSD を見ると高次モードの寄与は無視できるので、変位 w を前論文¹⁾で 10 項近似で求めた 1 次の固有振動モード $\phi(x, y)$ を用いて

$$w = h W(t) \phi(x, y) \quad (3)$$

と表わし、(3)式を(1)式に代入して GALERKIN 法を用い

$$\begin{aligned} (K + \bar{K}) W + (\omega_0 \eta_0 K / \omega_1) (dW/d\tau) + M (d^2 W / d\tau^2) \\ = F_o - F_i + F_o^* - F_i^* \end{aligned} \quad (4)$$

が導かれる。ここで $\tau = \omega_0 t$ 、 ω_0 は同寸法の周辺単純支持矩形板の一次の固有円振動数である。一般外力 F は

$$F = (4/ab) \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} f \cdot \phi(x, y) dx dy \quad (5)$$

$$f = p/p_c, \quad p_c = \pi^4 D h (a^2 + b^2)^2 / (4a^4 b^4) \quad (6)$$

で、各添字は(1)式の p に準ずる。(4)式の係数については文献 1) を参照されたい。(4)式はフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} [K + \bar{K} + (\omega / \omega_1) \eta_0 K - M (\omega / \omega_0)^2] \tilde{W} \\ = \tilde{F}_o - \tilde{F}_i + \tilde{F}_o^* - \tilde{F}_i^* \end{aligned} \quad (7)$$

と表わされる。ここで

$$\tilde{W}(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} W(t) e^{-i\omega t} dt \quad (8)$$

などである。なお歪 ε_x は周辺単純支持矩形板の一樣圧縮座屈時の歪 ε_{scr} で割って無次元歪 $\bar{\varepsilon}$ で表わす。

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x / \varepsilon_{scr} \quad (9)$$

3.2 音場の解析方法 音の速度ポテンシャル $\Phi(r, t)$ および音圧 p をフーリエ変換して $\tilde{\Phi}(\omega)$ 、 $\tilde{p}(\omega)$ で表わすと、 $\tilde{\Phi}$ についての方程式および $\tilde{p}$ はそれぞれ

$$(\Delta + \kappa^2) \tilde{\Phi} = 0 \quad (\kappa = \omega / c_a) \quad (10)$$

$$\tilde{p} = -i\omega \rho_a \tilde{\Phi} \quad (11)$$

と書かれる。 Δ は 3 次元のラプラス演算子、 ρ_a は空気の密度、 c_a は空気中の音速である。本実験の音場を円筒外は第 10 図 1 点鎖線のような円錐形で近似して解析することにする。加振器の剛体振動板の速度

第10図 円筒外側の音場の解析モデル

第11図 円筒内部音場解析の座標系

$\bar{u}e^{i\omega t}$ によって作り出される音は反射を考えなければ進行波

$$\bar{\Phi}_0^0 e^{i\omega t} = (A/r) e^{i(\omega t - \kappa r)} \quad (12)$$

$$A = \bar{u} e^{i\kappa R} (-1 + i\kappa R_0) / (1 + \kappa^2 R_0^2)$$

で表わされる。音場の解析を 3.3~3.5 節に示す。

3.3 円筒内部の音場 試験板の振動 $\bar{W}e^{i\omega t}$ によって生ずる円筒内部の音場は、第 11 図に示した円柱座標で取り扱う。円筒内面 $r=R_0$ および上端 $z=L$ におけるアドミタンス (速度/圧力で定義) をそれぞれ $[\xi/(i\omega\rho_a R_0)]$, $[\eta/(i\omega\rho_a L)]$ と書くと、境界条件は

$$r=0; \text{有限} \quad (13.1)$$

$$r=R_0; R_0(\partial\bar{\Phi}/\partial r) + \xi\bar{\Phi} = 0 \quad (13.2)$$

$$z=0; \partial\bar{\Phi}/\partial z = \begin{cases} i\omega h \bar{W} \phi(x, y) & \text{パネル上} \\ 0 & \text{パネル外} \end{cases} \quad (13.3)$$

$$z=L; L(\partial\bar{\Phi}/\partial z) + \eta\bar{\Phi} = 0 \quad (13.4)$$

と書ける。ところで軸対称でない項の寄与は小さいので近似的に軸対称項のみ考慮すると、(13)式の境界条件を満たす(10)式の解は

$$\bar{\Phi} = G_i \bar{W} \quad (14)$$

$$G_i(\tau, z, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(\alpha_m r/R_0) \{ e^{-i\mu_m z/L} + k_m e^{i\mu_m z/L} \}$$

である。ここで $\alpha_m (|\alpha_1| < |\alpha_2| < \dots)$ は(13.2)式から導かれる条件

$$\alpha J_0'(\alpha) + \xi J_0(\alpha) = 0^* \quad (15)$$

の根で、 $\mu_m (Im[\mu_m] < 0)$ は(10)式より導かれる関係式

$$(\mu/L)^2 + (\alpha/R_0)^2 = \kappa^2 \quad (16)$$

の解、 k_m は(13.4)式より

$$k_m = e^{-2i\mu_m(i\mu_m - \eta)/(i\mu_m + \eta)} \quad (17)$$

である。 a_m は(13.3)式の両辺に $r J_0(\alpha_m r/R_0)$ を掛けて 0 から R_0 まで積分し、直交条件を利用して

$$a_m = - \frac{ab h L \omega \alpha_m^2 A_m}{\pi R_0^2 \mu_m (\alpha_m^2 + \xi^2) \{ J_0(\alpha_m) \}^2 (1 - k_m)} \quad (18)$$

$$A_m = (4/ab) \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} \phi(x, y) \times J_0(\alpha_m \sqrt{x^2 + y^2}/R_0) dx dy$$

と求められたものである。平板上面の音圧は(14)式より得る $\bar{\Phi}(r, 0)$ を(11)式に代入して、さらに(5), (6)式を用いて一般外力で表わすと、 $\omega/\omega_0 = \Omega$ と記して

$$F_i \bar{W} = \Omega^2 K_i \bar{W} \quad (19)$$

$$K_i \bar{W} = [i\omega_0^2 \rho_a ab h L / (\pi R_0^2 \rho_c)] \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 A_m (1 + k_m) + [\mu_m (\alpha_m^2 + \xi^2) \{ J_0(\alpha_m) \}^2 (1 - k_m)]$$

3.4 パネルの振動によって生ずる円筒外側の音場

試験板の振動 $\bar{W}e^{i\omega t}$ によって円筒外側に発生する音場を第 10 図のように境界を円錐で近似し、極座標を用いて解析する。① $R_1 < r < R$, ② $R < r$ の二つの領域に分け、フーリエ変換した速度ポテンシャル $\bar{\Phi}_0^*$ をそれぞれ $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$ と表わす。境界条件は、

$$\theta=0; \partial\bar{\Phi}_1/\partial\theta=0 \quad (20.1)$$

$$\theta=\beta; \partial\bar{\Phi}_2/\partial\theta=0 \quad (20.2)$$

$$\theta=\alpha; \partial\bar{\Phi}_1/\partial\theta = \partial\bar{\Phi}_2/\partial\theta = 0 \quad (20.3)$$

$$r=R_1; \partial\bar{\Phi}_1/\partial r = 0 \quad (20.4)$$

$$r \rightarrow \infty; \bar{\Phi}_2 \text{ は進行波} \quad (20.5)$$

$$r=R, 0 < \theta < \beta;$$

$$\partial\bar{\Phi}_1/\partial r = \begin{cases} i\omega h \bar{W} \phi(x, y) & \text{パネル上} \\ 0 & \text{パネル外} \end{cases} \quad (20.6)$$

$$r=R, \beta < 0 < \alpha; \bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2 \quad (20.7)$$

$$\partial\bar{\Phi}_1/\partial r = \partial\bar{\Phi}_2/\partial r \quad (20.8)$$

と書ける。軸対称でない項の寄与は小さいと考えられるので軸対称な項のみ考慮すると(20)式の境界条件を満たす $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2$ の解はそれぞれ

$$\bar{\Phi}_1 = G_o \bar{W} \quad (21)$$

* “'” は以下引数についての微分を表わす。

$$G_o^*(r, \theta, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m U_m(\kappa r) P_{\nu_m}(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2 = & \tilde{W} \sum_{m=1}^{\infty} c_m V_m(\kappa r) \{P_{\mu_m}(\cos \theta) \\ & + l_m Q_{\mu_m}(\cos \theta)\} \end{aligned} \quad (22)$$

と書ける。ここで(20.2), (20.3)式の条件から, ν_m , μ_m はそれぞれ

$$P_o'(\cos \alpha) = 0 \quad (23)$$

$$P_{\mu}'(\cos \alpha) Q_{\mu}'(\cos \beta) - P_{\mu}'(\cos \beta) Q_{\mu}'(\cos \alpha) = 0 \quad (24)$$

の解で, $\nu_1=0$, $\mu_1=0$ であり, l_m は

$$l_m = -P_{\mu_m}'(\cos \alpha) / Q_{\mu_m}'(\cos \alpha) \quad (25)$$

であることが導かれる。 $U_m(\kappa r)$, $V_m(\kappa r)$ は

$$\begin{aligned} U_m(\kappa r) = & (1/\sqrt{\kappa r}) \left\{ J_{\nu_m+1/2}(\kappa r) \right. \\ & \left. - N_{\nu_m+1/2}(\kappa r) \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\partial \{J_{\nu_m+1/2}(\kappa r)/\sqrt{\kappa r}\}}{\partial r} \right] \right. \\ & \left. \frac{\partial \{N_{\nu_m+1/2}(\kappa r)/\sqrt{\kappa r}\}}{\partial r} \right] \Bigg|_{r=R_1} \} \end{aligned} \quad (26)$$

$$V_m(\kappa r) = H_{\mu_m+1/2}^{(2)}(\kappa r) / \sqrt{\kappa r} \quad (27)$$

なる関数で, それぞれ(20.4), (20.5)式の条件を満たす。(20.6), (20.8)式に $\sin \theta P_{\nu_m}(\cos \theta)$ を掛けて対応領域で積分し加え合わせて直交条件を用いると

$$\begin{aligned} b_n U_n'(\kappa R) \mathcal{A}_n = & \{i\omega h a b / (2\pi \kappa R^2)\} C_n \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} c_m V_m'(\kappa R) \mathcal{D}_{mn} \end{aligned} \quad (28)$$

が導かれる。また(20.7)式に $\sin \theta [P_{\mu_n}(\cos \theta) + l_n Q_{\mu_n}(\cos \theta)]$ を掛けて β から α まで積分し直交条件を用いて

$$c_n V_n(\kappa R) \mathcal{B}_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_m U_m(\kappa R) \mathcal{D}_{nm} \quad (29)$$

が導かれる。ここで各係数 $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$, C_m , $\mathcal{D}_{mn}$ は,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m = & \int_{\cos \alpha}^1 \{P_{\nu_m}(\xi)\}^2 d\xi \\ \mathcal{B}_m = & \int_{\cos \alpha}^{\cos \beta} \{P_{\mu_m}(\xi) + l_m Q_{\mu_m}(\xi)\}^2 d\xi \\ C_m = & (4/ab) \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} P_{\nu_m}(\sqrt{1-(x^2+y^2)/R^2}) \\ & \times \phi(x, y) dx dy \\ \mathcal{D}_{mn} = & \int_{\cos \alpha}^{\cos \beta} P_{\nu_n}(\xi) \{P_{\mu_m}(\xi) + l_m Q_{\mu_m}(\xi)\} d\xi \end{aligned} \quad (30)$$

である。 b_m , c_m はこの連立方程式を解いて求められるものである。

ところでいま求めたいのは①の領域で, ②の領域に関しては μ_2 以上の波は急速に減衰し, θ 方向に一様な μ_1 の波が卓越すると考えられるので, $\tilde{\Phi}_2$ を $m=1$

の1項だけで近似すると, (28), (29)式より b_n は,

$$b_n = i\omega h \{ab / (2\pi \kappa R^2)\} \{S_n / [U_n'(\kappa R) \mathcal{A}_n]\} \quad (31)$$

$$S_n = C_n - \gamma \mathcal{D}_{1n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}_{1j} C_j T_j / (\mathcal{B}_1 + \gamma \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}_{1j}^2 T_j) \quad (32)$$

$$\gamma = (1 + i\kappa R) / (\kappa R),$$

$$T_j = U_j(\kappa R) / \{A_j U_j'(\kappa R)\}$$

と求められ, $\tilde{F}_o^*$ については次式が得られる。

$$\tilde{F}_o^* = Q^2 K_o^* \tilde{W} \quad (33)$$

$$K_o^* = i\omega_0^2 \rho_a a b h \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n S_n / (2\pi \kappa R^2 \rho_c)$$

3.5 剛円筒による円筒外側の反射音圧 (12)式で与えられる音場内に第10図のように剛な円筒があることにより生ずる反射波を表わす速度ポテンシャルを $\tilde{\Phi}_o^* e^{i\omega t}$ とすると, 円筒下端面における境界条件は,

$$r = R, \quad 0 < \theta < \beta; \quad \partial \tilde{\Phi}_o^* / \partial r = -\partial \tilde{\Phi}_r / \partial r \quad (34)$$

となる。 $\tilde{\Phi}_o^*$ について他の境界条件は, (20.6)を除く(20)式と同じである。したがって3.4節と同様の方法で $\tilde{\Phi}_o^*$ を求めることができる。②の領域では V_1 項のみで近似すると, ①の領域の解は,

$$\tilde{\Phi}_o^* = H_s \tilde{\Phi}_r(R) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} H_s(r, \theta, \omega) = & \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n U_n(\kappa r) P_{\nu_n}(\cos \theta) \\ & \div [U_n'(\kappa R) \mathcal{A}_n] \end{aligned}$$

$$\bar{S}_n = \bar{C}_n - \gamma \mathcal{D}_{1n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}_{1j} \bar{C}_j T_j / (\mathcal{B}_1 + \gamma \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}_{1j}^2 T_j)$$

$$\bar{C}_n = \int_{\cos \beta}^1 P_{\nu_n}(\xi) d\xi \quad (36)$$

と表わされる。上記の反射を考えない場合の $r=R$ の音圧 (単純加振音圧) を $p_r(t)$, (5), (6)式を用いて計算される一般外力を F_r と記す。 $\tilde{F}_r = -i\omega \rho_a \tilde{\Phi}_r(R)$ だから

$$\tilde{F}_r = -i\omega \rho_a A e^{-i\kappa R} / (p_r R) \quad (37)$$

したがって反射音圧を考慮した場合は上記の結果から,

$$\tilde{F}_o^* = \{1 + K_o^*(\omega)\} \tilde{F}_r \quad (38)$$

$$K_o^* = (\gamma / C_1) \sum_{j=1}^{\infty} C_j T_j \bar{S}_j$$

3.6 振動応答の解析 (7)式の右辺に(19), (33)式を代入して (この問題では $F_1=0$) $\tilde{F}_o^*$ と $\tilde{W}$ とを結合板の周波数応答関数 $H(Q)$ は

$$\begin{aligned} H(Q) = & [K + \bar{K} + i(Q/\Omega_1)\eta_0 K - Q^2 M \\ & + Q^2 \{K_o^*(Q) + K_i^*(Q)\}]^{-1} \end{aligned} \quad (39)$$

と求められる。ここで $\Omega_1^2 = (K + \bar{K})/M$ である。したがって加振音圧がランダムな場合, 応答 W の PSD Φ_{ww} と F_r の PSD $\Phi_{F_r F_r}$ との関係は(37)式を考慮して

$$\Phi_{ww}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 |1 + K_o^*(\Omega)|^2 \Phi_{F_r F_r}(\Omega) \quad (40)$$

である。\$W\$ の自己相関関数 \$R_{ww}(\tau)\$ は \$\Phi_{ww}(\Omega)\$ を逆フーリエ変換して得られる。

3.7 測定音圧の特性 領域①での \$r, \theta\$ 点の音圧のフーリエ変換 \$\hat{p}\$ は (11), (21), (35), (39), (38) 式を用いて

$$\hat{p} = \hat{p}_i [(R/r)e^{i\kappa(R-r)} + H_s + H_v] \quad (41)$$

$$H_v(r, \theta, \omega)$$

$$= G_v(r, \theta, \omega) H(\Omega) \{1 + K_o^*(\Omega)\} (-i\omega \rho_a C_1 / p_o) \quad (42)$$

と表わされることが導かれる。音圧の測定点 \$r=R, \theta=\beta\$ の点の音圧 \$\hat{p}_M\$ が試験板に様にかかっているとして算出される一般外力 \$\hat{F}_M\$ と加振音圧 \$\hat{F}_o\$ とを比較すると

$$\frac{\hat{F}_o}{\hat{F}_M} = \frac{1 + K_o^*(\Omega)}{1 + H_s(R, \beta, \omega) + H_v(R, \beta, \omega)} \quad (43)$$

が導かれる。したがって音圧 \$p_i\$ の PSD を \$\Phi_{p_i p_i}\$ と記すと、(41)式より音圧 \$p(r, \theta, t)\$ の PSP \$\Phi_{pp}\$ は

$$\Phi_{pp}(\Omega) = |(R/r)e^{i\kappa(R-r)} + H_s + H_v|^2 \Phi_{p_i p_i}(\Omega) \quad (44)$$

と表わされる。

4. 実験結果と解析結果の検討

4.1 解析結果 付録に示した \$\kappa\$ および \$\eta\$ の値を用いて(19)式から計算した \$K_i^*\$ および (33)式による \$K_o^*\$ を第12図に、また共振振動数 \$\Omega_1\$ における値を(39)式の他の項と比較して第3表に示した。\$K_o^*\$ が \$\Omega=2.1\$ の近くで若干変わる以外は \$\Omega\$ による大きな変動は見られない。第3表の数値の虚数部は、パネルの振動によって生ずる音のパネルの減衰に対する寄与を表わし、円筒内側の分は大きく、外側の分は無視しうるほど小さいことを示している。

(44)式を用いて計算される試験板中央 (\$r=R, \theta=0\$) および音圧測定点 (\$r=R, \theta=\beta\$) の音圧の PSD \$\Phi_{pp}\$ を、単純加振圧の PSD \$\Phi_{p_i p_i}\$ との比で第13、

第12図 \$K_i^*, K_o^*\$ の計算結果

第3表 振動方程式の係数

\$K\$	27.573
\$\bar{K}\$	-2.208
\$M\$	8.131
\$\Omega_1\$	1.742
\$\Omega_1^* K_i^*(\Omega_1)\$	-0.574 + 0.186i
\$\Omega_1^* K_o^*(\Omega_1)\$	-0.110 + 0.0025i
\$\eta_o K\$	0.064

第13図 試験板中央点音圧の PSD の計算結果

第14図 測定点音圧の PSD の計算結果

14 図に示した。(\$r=R-50\$ mm, \$\theta=0\$) の点の \$\Phi_{pp}\$ も計算したが、結果は定性的に第13図と同じであったので図示は省略する。\$\Omega=2.1\$ 近くのピークは、第12図の \$K_o^*\$ の場合も含めて音場の共振によるピークと考えられる。\$p(R, 0)\$ にはパネルの共振の影響が強く出ているが、\$p(R, \beta)\$ にはパネルの共振の影響が消滅し、第14図で \$p = p_i + p_o^* + p_o^v\$ の \$\Phi_{pp}\$ を示す破線と \$p_o = p_i + p_o^* + p_o^v\$ の \$\Phi_{p_o p_o}\$ を示す実線とはほとんど重なっており、\$(\Phi_{pp} / \Phi_{p_o p_o})_{\max} = 1.014\$ にすぎない。なお、(43)式により計算される実加振力と測定音圧から算出した加振力の周波数特性の比 \$|\hat{F}_o / \hat{F}_M|\$ は \$\Omega=\Omega_1\$ で 1.041 であった。

4.2 実験結果との比較 固有振動数について \$K\$ のみを用いて計算した理論値は第2表に示したように実験値と大体よく合っているが、ACF 曲線の計算に当たっては横軸方向のずれをなくする目的で、1次の固

有振動数が実験値と一致するよう面内力の効果に相当する K の値を第3表に示す数値とした。試験板材料の内部減衰による減衰係数 η_0 は前論文¹⁾の測定結果 $\eta_0=0.0025$ を用いた。得られた ACF の理論値は第6図に示したように実験値ときわめてよく一致している。この図は、円筒内での音の伝播によりパネルの見掛けの減衰係数が内部減衰係数 η_0 の約4倍になっていることならびに上述のように板の振動によって生ずる音場を解析することにより音場内の板の減衰特性を精度よく算出できることを示している。なお、固定枠を単純にホーン内に吊した予備実験の際得られた ACF (図示省略) は、減衰係数が試験板の内部減衰係数とはほぼ同じであることを示した。これは K_0 の虚数部が非常に小さいことから説明できる。

曲げ歪 ϵ の RMS の計算値を第7図に実線で書き込んだが実験値より約8.5%小さい。第7図の横軸は音圧測定点の値で、前述のように $|\tilde{F}_0/\tilde{F}_M|=1.041$ であることを考慮して実加振力の大きさを4.1%増した計算結果は同図破線となり、その差は4.7%と縮まって理論値と実験値とはよく一致しているといえる。このように実験値とよく一致する理論値を得るのには、音場の解析結果得られる減衰特性の値が重要な因子となっている。

音場解析を行なう観点からは、本実験は円錐形ホーンを作って行なうべきであったが、エクスポネンシャルホーンを近似的に円錐ホーンとして扱っても概略的な資料は得られたものと考えられる。また、測定音圧の PSD の解析値第14図、ならびにその測定値第5、9図は、ホーンの寸法が妥当でないことを示している。しかし上記のような音場の解析をして補ってやることにより実験結果と理論値との対応を付けることができ、本実験の目的を達し得たものと考えられる。

5. 結 論

1) 応答曲げ歪の RMS と ACF の実験値は理論値とはよく一致している。ただしこのようによく一致する理論値を得るためには、試験板との相関を考えた音場の解析が必要であることが明らかにされたものと考えられる。

2) 解析的検討結果、このような実験で試験板に作用する音圧の測定位置についてはあらかじめ音場の計算をして、妥当な位置であるか否かを調べておく必要があることが示された。本実験の測定位置は妥当であったと考えられる。

3) 大部分の音響加振実験では、試験板の裏面には直接加振音圧が作用しないような装置にしているが、パネルの振動特性に影響を与える可能性があるので、

十分解析的な検討を加えたうえで実験すべきことが示されたものと考えられる。本実験ではかなり大きな減衰特性が与えられた。

本実験は加振器のパワーの関係でパネルの線形応答の範囲の実験しかできなかったが、音響疲労解明のためにはさらに強力な加振パワーによる非線形応答領域の実験が必要であり、今後の研究課題と考えている。

本論文は昭和 51, 52 年度文部省科学研究費補助金 (一般研究 B) による研究成果の一部である。

参 考 文 献

- 1) 末益博志, 小林繁夫, 紀平正知: 周辺固定矩形板のランダム加振に対する非線形応答の実験と解析, 日本航空宇宙学会誌, 第27巻, 第307号 (1979. 8), pp. 423-431.
- 2) KOBAYASHI, Satomi: Theoretical and Experimental Investigation of Nonlinear Vibration of Flat and Curved Plate, 東京大学工学系研究科航空学専門課程学位論文 (1967. 12).
- 3) 藤森義典, 佐野政明: 騒音を受ける薄板の応答, NAL TR 506 (1977. 7).
- 4) NELSON, T. F.: An Investigation of the Effects of Surrounding Structure on Sonic Fatigue, NASA CR 1536 (May, 1970).
- 5) 飯田宗四郎: 音響疲労, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第259号 (1975. 8), pp. 441-451.

付録 円筒内音場の境界のアドミッタンスの推定

パネルが $\omega=\omega_1$ の共振振動数を有する狭帯域過程なので、円筒内部に生じる音場も $\omega=\omega_1$ にピークをもつ狭帯域過程となるから、その値は $\omega=\omega_1$ における値に注目すれば十分と考えられる。(14)式より円筒内部音圧 f_i^* と $\tilde{W}(\omega)$ の関係は

$$f_i^* = H_I \tilde{W}, \quad H_I(\omega) = -i\omega\rho_0 G_0^*/p_c \quad (\text{A. 1})$$

と書けるから、 W と f_i^* の相互スペクトル密度 $\Phi_{Wf_i^*}$ は

$$\begin{aligned} \Phi_{Wf_i^*}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} E[\tilde{W}(\omega) \tilde{f}_i^{* *}(\omega)] \\ &= H_I^*(\omega) \Phi_{WW}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

となる。ここで(*)は共役複素数を意味する。したがって

$$H_I(\omega) = \Phi_{Wf_i^*}^* / \Phi_{WW} \quad (\text{A. 3})$$

である。ところで H_I は ω_1 の近傍でゆるやかに変化する関数なので実験値 $\Phi_{Wf_i^*}$ と Φ_{WW} から

$$H_I(\omega_1) \approx \int_{\omega_1-\Delta}^{\omega_1+\Delta} \Phi_{Wf_i^*}^* d\omega \bigg/ \int_{\omega_1-\Delta}^{\omega_1+\Delta} \Phi_{WW} d\omega \quad (\text{A. 4})$$

によって近似計算できる。第8図の実験値を用いて $H_I(\omega_1) = -0.08 + i0.15$ と求められた。一方(A. 1)式で ζ を変えて $H_I(\omega_1)$ の値を計算した結果、 $\zeta = 0.17 + i0.16$ としたとき上記の値にはほぼ一致したので、アドミッタンス ζ の値を $0.17 + i0.16$ と算定した。

$z=L$ 端は大気中に開放している。円筒端で r につき一様な速度 $\bar{u}$ に対して生じる音圧 p を計算し、

$$i\omega\rho_0 L \times \eta^{-1} = \iint_S p ds / (\bar{u} \cdot \pi R_0^2) \quad (\text{A. 5})$$

としてアドミッタンス η を求めた。本問題では、 $\eta =$

$17.6 + 2.9i$ と計算された。 L が長いので、円筒上部での音圧は十分減衰しており、上端での反射の影響は小さく、その結果この η の数値のパネル上の p_i に与える影響はきわめて小さかった。すなわち $L \rightarrow \infty$ の近似が成立している。

飛行機の一般運動の逆問題について*

On the Inverse Problem of Airplane General Motion

加 藤 修**・杉 浦 一 郎**

Osamu KATO and Ichiro SUGIURA

Abstract

This paper treats the problem how an airplane is controlled when its flight path is given. As this inverse problem is in the area (such as "piloting technique") where there is "the gap between the theory and the practice," its theoretical studies are very few. The controls of an airplane fundamentally consist of three control surfaces; elevator, rudder and aileron. And it can be interpreted that these three surfaces control the angle of attack α , the angle of sideslip β and the angle of bank ϕ respectively. We studied the dynamic and geometric meanings of these angles in the previous paper.¹⁾ In this paper the inverse problem of airplane general motion is developed by taking this triple (α, β, ϕ) as main parameters. First we derive the basic algorithm which is an approximate one but very easy to see through. And then, following this algorithm, the controls of an interesting flight example are obtained. Lastly the exact solution is computed by means of the iteration method and the solution of the basic algorithm.

1. ま え が き

本研究は飛行機の一般運動における逆問題、すなわち飛行運動の経路とか姿勢が与えられた場合いかなるコントロールによってそれが達成できるか、という種の問題について考える。このような問題は、解析的取扱いの困難な一般運動に加えて、いわゆる“操縦論”というような“理論と実際のギャップ”の存在する領域にあるためかその理論的研究は非常に少ない。

コントロールを与えて飛行機の経路と姿勢を求める通常の問題においては、コントロール（基本的には3舵とパワー）を与えかつ状態変数の初期値を与えれば

原理的には解ける。しかし逆問題の場合、経路（3自由度）と姿勢（3自由度）の両方を与えたのでは一般に解はなく、経路または姿勢の一方のみを与えたときには一意な解は得られない。剛体の運動は6自由度であるが通常の飛行機の controlled motion は4自由度であるためである。これらのことは一般には“飛行機のコントロールシステム”や“飛行の仕方”に大きく依存する。したがって逆問題を解くときには、これらに対する考慮をして最初に何と何を与えてよいのかを明確にしておかないと、矛盾したものを与えその結果不合理な解を得てしまうということにもなりかねない。

飛行機の舵はふつう、エルロン、エレベーター、ラダーの3舵から成る。これらはそれぞれ X, Y, Z 軸まわりのモーメントを主に発生して、おのおのの軸まわりのモーメント方程式の入力となる。この点ではまったく同等なものであり作用する軸が違うというだけである。しかしこれにひきかえ、飛行機操縦上3舵の操作法にはほとんどアナロジーはない。たとえばピッチコントロールはエレベーターで行なうが、ヨー（ヘディング）コントロールはふつうラダーでは行なわない。このあたりが数学モデルの運動方程式と制御法との間にギャップを感じるところであり、数理的展開だけからでは具合よくいかないところとなるが、これも飛行機特有の飛行の仕方からくるものである。

エレベーター、ラダー、エルロンは飛行力学的にはそれぞれ迎え角 α 、横すべり角 β 、バンク角 ϕ をコントロールするものと解釈することができる。筆者らは先の論文¹⁾においてこの (α, β, ϕ) のもつ意味を物理的に考察した。本稿においてはこの (α, β, ϕ) を key とすることによって先に述べた逆問題を一般的に展開する。

おもな記号

α, β : 迎え角, 横すべり角

* 昭和54年11月28日、第17回飛行機シンポジウムにて発表。昭和54年12月26日原稿受理

** 名古屋大学工学部航空学科