$$w = -V\zeta - \frac{m}{2\pi} \log(\zeta - 1) - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \log\left(\frac{\zeta - \xi_2}{\zeta - \xi_1}\right) \quad (1)$$

$$\phi = -V\eta - \frac{m}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\eta}{\xi - 1} - \frac{\Gamma_2}{4\pi} \log \frac{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} \quad (2)$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = -V - \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta - 1} - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \cdot \frac{\zeta_2 - \xi_2}{(\zeta - \xi_2)(\zeta - \xi_1)} \quad (3)$$

z 平面の平行流の速度を U とすれば $|dw/dz|_\infty = |dw/d\zeta|_\infty \cdot |d\zeta/dz|_\infty$ から $U = V/H$ の関係が得られる。 z 平面において平板先端が淀み点となるという条件, すなわち $(dw/d\zeta)_{\zeta=0} = 0$ から吹出しの強さ m が決定される。

$$m = 2\pi HU - 2\Gamma_2 \eta_2 / (\xi_2^2 + \eta_2^2) \quad (4)$$

前方うずの位置 (ξ_2, η_2) および強さ Γ_2 を決定するために, 静止うずの条件および実験結果に基づく条件, すなわち $z = 0.6i$ において $(dw/dz) = 0$ という条件を用いると

$$\xi_2 = -1.001, \quad \eta_2 = 0.008, \quad x_2' = -0.097 \quad (5)$$

が求まる。したがって $m = 1.965\pi HU$ となる。これらの値を(2)に代入して $\phi = 0$ の流線の方程式を求めると

$$\eta + \frac{1.965}{2} \tan^{-1} \frac{\eta}{\xi - 1} + \frac{2.214}{4} \log \frac{(\xi + 1.001)^2 + (\eta - 0.008)^2}{(\xi + 1.001)^2 + (\eta + 0.008)^2} = 0 \quad (6)$$

となる。これは平板後方のうずの位置 (ξ_1, η_1) を決定するために用いられる基準流線である。

次に前方うずの他に平板後方の点 z_1 に強さ Γ_1 のうずが存在する場合を考える。点 z_1 の ζ 平面の対応

点を $\zeta_1 (= \xi_1 + i\eta_1)$ とすれば, 複素ポテンシャルおよび流関数はそれぞれ次のようになる。

$$w = -HU\zeta - \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \log \frac{\zeta - \xi_1}{\zeta - \xi_2} - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \log \frac{\zeta - \xi_2}{\zeta - \xi_1} \quad (7)$$

$$\phi = -HU\eta - \frac{\Gamma_1}{4\pi} \log \frac{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2} - \frac{\Gamma_2}{4\pi} \log \frac{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} \quad (8)$$

となり, $\phi = 0$ の流線の式は次のようになる。

$$\eta + \frac{(x_1'^2 + y_1'^2)}{4\sqrt{2}(x_1'^2 - y_1'^2)^{3/2}} \log \frac{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2} + \frac{2.214}{4} \log \frac{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} = 0 \quad (9)$$

$\Gamma_1, (\xi_1, \eta_1)$ を決定するために, 吹出しによる流線(6)と流線(9)が平板近傍の2点 $(\xi = 0.500, \eta = 1.143)$ および $(\xi = 1.000, \eta = 1.546)$ において接するという条件を設けると, これから

$$\xi_1 = 1.599, \quad \eta_1 = 0.694, \quad x_1' = 1.331, \quad y_1' = 0.834 \quad (10)$$

が求められる。これらと前に求めた ξ_2, η_2, Γ_2 の値(5)を(8)に代入して, $\phi = 0$ の流線の式を求めると

$$\eta + \frac{3.856}{4} \log \frac{(\xi - 1.599)^2 + (\eta - 0.694)^2}{(\xi - 1.599)^2 + (\eta + 0.694)^2} + \frac{2.214}{4} \log \frac{(\xi + 1.001)^2 + (\eta - 0.008)^2}{(\xi + 1.001)^2 + (\eta + 0.008)^2} = 0 \quad (11)$$

となる。この流線の付着点距離は $l/H = 2.947$ となる。前方うずのないときの付着点距離は $l/H = 2.954$ であるから, 前方うずが後流うず領域に及ぼす影響は非常に小さいものと考えられる。

— 論 文 —

弾性はりの過渡応答に及ぼす回転慣性およびせん断変形の影響 (有限要素法によるアプローチ)*

The Influence of Rotatory Inertia and Shear Deformation on the Transient Response of Elastic Beams—Finite Element Analysis

横 山 隆**・都 築 正 之***
Takashi YOKOYAMA and Masayuki TSUZUKI

Abstract

The influence of rotatory inertia and shear

deformation on the transient response of elastic beams is examined to make an assesment of the importance of these two effects. A finite element method is presented for analyzing the transient response of semi-infinite elastic beams impacted at the one ends by half-sine moment pulses.

* 昭和52年11月15日, 第27回応用力学連合講演会にて一部講演。昭和55年7月11日原稿受理

** 大阪大学工学部

*** 愛媛大学工学部

The direct integration of the equations of motion is performed by the NEWMARK beta method. The selection of an appropriate time step for direct integration is made based on the condition number determined from the relevant matrices.

Numerical examples are presented and are compared with both experimental data and characteristics solutions in the literature. It is found from the present study that, except when the pulses are exceedingly short, computed results based on the TIMOSHENKO beam theory give the best agreement with experimental results, and that shear deformation has a greater influence on the transient response of elastic beams than rotatory inertia.

1. ま え が き

はりの過渡応答を解析するとき、とくに衝撃荷重を受ける場合には、回転慣性およびせん断変形の影響を考慮する必要がある。BERNOULLI-EULER の仮定に基づくはり理論 (初等はり理論) は、簡単であるためによく用いられるが、波長が短くなるにつれて曲げ波の位相速度が無限大に近づく欠点があり、回転慣性とせん断変形とを考慮して、この欠点を修正した理論が周知の TIMOSHENKO はり理論¹⁾である。

はりの曲げ振動に及ぼす回転慣性およびせん断変形の影響は、解析的手法²⁾や GALERKIN および RITZ の近似解法^{3), 4)}などを用いてすでに研究されている。DAWSON⁴⁾は片持ちはり (長方形断面) の場合について、両者 (回転慣性とせん断変形) の影響は高次の振動モードで、細長比 (はりの長さ/回転半径) が小さくなるほど著しいことと、第5次振動モードではせん断変形の影響よりも回転慣性の影響のほうが大きくなり、両者の相対的影響が逆転することを指摘している。

一方、はりの過渡応答に及ぼす両者の影響については、有力な解析法である特性曲線法が TIMOSHENKO はり理論に適用できるのに対し、BERNOULLI-EULER はり理論には適用できないので、直接的に評価することができない。最近 JONES と GOMES DE OLIVEIRA^{5), 6)}は、剛塑性はり (I 型断面) の過渡応答に及ぼす両者の影響を、正方形の相互作用曲面 (降伏規準)⁷⁾を導入して、塑性ヒンジ理論に基づいて調べている。その結果によれば、回転慣性がはりの塑性応答に及ぼす影響は、境界条件および荷重条件に対して敏感である。しかし、はりの塑性応答に及ぼす両者の影響は、任意の断面形状および荷重条件に対して、一意的に決定することが困難な相互作用曲面とも深く関連している。そこで、本報告では相互作用曲面の影響が無視できる、最も基本的な弾性はりの場合に立ち戻り、その過

渡応答に及ぼす両者の影響をまず明確にするために、有限要素法による解析結果を、RIPPERGER⁸⁾の実験結果および PLASS⁹⁾の特性曲線解と比較する。解析に使用する TIMOSHENKO はり要素は、ARCHER¹⁰⁾によって導出されたはり要素であり、通常のはり要素 (BERNOULLI-EULER はり要素) を特別な場合として含んでいる。なお、このはり要素のほかに、節点での自由度を増加させた精度の高い TIMOSHENKO はり要素が、KAPUR¹¹⁾と NICKELL ほか¹²⁾によっても導出されている。

記 号

- A : はり要素の断面積
- A_s : 有効せん断面積 ($=k'A$)
- a : はり (円形断面) の半径
- $C(\bar{K})$: マトリックス $\bar{K}$ の条件数 ($=|\lambda|_{\max}/|\lambda|_{\min}$)
- c : 曲げ波の位相速度
- c_0 : 曲げ波の伝ば速度
- d : はり (円形断面) の直径 ($=2a$)
- E : YOUNG 率
- $\{\Delta f(t)\}^e$: 要素の節点力増分ベクトル
- G : 剛性率 ($=E/2(1+\nu)$)
- I : 断面2次モーメント
- $[k]^e$: 要素剛性マトリックス
- k' : せん断係数
- l : はり要素の長さ
- $\bar{M}$: 無次元曲げモーメント
- M_i, M_j : 節点 i, j における曲げモーメント
- $[m]^e$: 要素質量マトリックス
- Q_i, Q_j : 節点 i, j における y 軸方向の力 (せん断力)
- r_g : はり断面の回転半径 ($=\sqrt{I/A}$)
- $T_{\min}$: はり要素の最小固有周期 ($=2\pi/\omega_{\max}$)
- $\bar{t}$: 無次元時間
- Δt : 時間増分
- $\Delta \bar{t}_s$: 安定限界の時間増分
- $\{\Delta U\}^e$: 要素の節点変位増分ベクトル
- $\{\Delta \ddot{U}\}^e$: 要素の節点加速度増分ベクトル
- v_i, v_j : 節点 i, j における y 軸方向の並進変位
- w : はりの無次元たわみ
- $\bar{x}$: 無次元軸方向座標
- β : NEWMARK の加速係数
- θ_i, θ_j : 節点 i, j における回転変位
- λ : 曲げ波の波長
- $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$: 固有値の最大値および最小値
- ν : POISSON 比
- ρ : 質量密度
- $\bar{\tau}$: 曲げモーメント・パルスの無次元持続時間

第1図 はり要素と座標系

Φ : せん断変形パラメータ

$\omega_{\max}$: はり要素の最大固有円振動数

2. 有限要素解析

2.1 運動方程式 仮想仕事の原理および D'ALEMBERT の原理を用いて、有限要素に関する増分形運動方程式を導くと、材料の粘性減衰がない場合は、つぎのように表わせる。

$$[m]^e \{\Delta \ddot{U}\}^e + [k]^e \{\Delta U\}^e = \{\Delta f(t)\}^e \quad (2.1)$$

第1図に示すような長さ l の直線はり要素を考へ

$$[m_i]^e = \frac{\rho A l}{(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} + \frac{7}{10}\Phi + \frac{1}{3}\Phi^2 & \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\Phi + \frac{1}{24}\Phi^2\right)l & \frac{9}{70} + \frac{3}{10}\Phi + \frac{1}{6}\Phi^2 & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\Phi + \frac{1}{24}\Phi^2\right)l \\ & \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60}\Phi + \frac{1}{120}\Phi^2\right)l^2 & \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\Phi + \frac{1}{24}\Phi^2\right)l & -\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60}\Phi + \frac{1}{120}\Phi^2\right)l^2 \\ & & \frac{13}{35} + \frac{7}{10}\Phi + \frac{1}{3}\Phi^2 & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\Phi + \frac{1}{24}\Phi^2\right)l \\ & & & \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60}\Phi + \frac{1}{120}\Phi^2\right)l^2 \end{bmatrix}$$

SYM.

$$[m_r]^e = \frac{\rho A l}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{r_g}{l}\right)^2 \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi\right)l & -\frac{6}{5} & \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi\right)l \\ & \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Phi^2\right)l^2 & \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\Phi\right)l & \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{6}\Phi^2\right)l^2 \\ & & \frac{6}{5} & \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\Phi\right)l \\ & & & \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Phi^2\right)l^2 \end{bmatrix}$$

SYM.

式(2.3)の右辺の第1項の $[m_i]^e$ ははり要素の並進慣性を表わし、第2項の $[m_r]^e$ ははり要素の回転慣性を表わす。

解析を一般化するためには、局所座標系 $o-x'y'$ で表示された運動方程式(2.1)を、変換マトリックスによって全体座標系 $O-\bar{x}\bar{y}$ で表示する必要がある。しかし、本研究では真直はりを取り扱うので、局所座標系と全体座標系とは結局一致することになる。

2.2 直接積分法 式(2.1)をすべてのはり要素について重ね合わせて、はり全体の運動方程式を組み立て

ゝえ、この要素に対して局所座標系 $o-x'y'$ をとる。

この要素の両節点 i, j の変位成分 $(v_i, \theta_i, v_j, \theta_j)$ から節点変位ベクトル $\{U\}$ が構成され、対応する節点力成分 (Q_i, M_i, Q_j, M_j) から節点力ベクトル $\{f\}$ が構成される。 y 軸方向の変位(たわみ) v は、静的な場合と同様に x の3次式 $(v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)$ で表示されると仮定する。せん断変形を考慮して変位関数 v を、両節点 i, j の変位成分によって決定した後、通常の有限要素解析の手順に従ってはり要素の剛性および質量マトリックス $([k]^e, [m]^e)$ を計算すると、それぞれつぎのように求まる^{10), 13)}。

要素剛性マトリックス

$$[k]^e = \frac{EI}{l^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ (4+\Phi)l^2 & -6l & (2-\Phi)l^2 & \\ & 12 & -6l & \\ \text{SYM.} & & & (4+\Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ここで、 $\Phi = 12EI/(GA_s l^2)$: せん断変形パラメータ
要素質量マトリックス

$$[m]^e = [m_i]^e + [m_r]^e \quad (2.3)$$

ここで

ゝてると、つぎのような節点変位増分に関する2階線形連立常微分方程式になる。

$$[M]\{\Delta \ddot{U}\} + [K]\{\Delta U\} = \{\Delta F(t)\} \quad (2.4)$$

ここで

$$[M] = \sum [m]^e, [K] = \sum [k]^e, \{\Delta F\} = \sum \{\Delta f\}^e$$

式(2.4)を解く方法としては、モード解析法と直接積分法があるが、ここではより実用的な後者のうちの一つである NEWMARK の β 法¹⁴⁾を使用する。NEWMARK の β 法によって直接積分を行なうとき、その基礎方程式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} &([M] + [K]\beta\Delta t^2)\{\Delta\dot{U}\} \\ &= \{\Delta F(t)\} - [K]\left\{\{\dot{U}\}_{t-\Delta t}\Delta t + \{\dot{U}\}_{t-\Delta t}\frac{\Delta t^2}{2}\right\} \\ &\{\Delta\dot{U}\} = \{\dot{U}\}_{t-\Delta t} + \{\dot{U}\}_{t-\Delta t}\frac{\Delta t}{2} \\ &\{\Delta U\} = \{\dot{U}\}_{t-\Delta t}\Delta t + \{\dot{U}\}_{t-\Delta t}\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \\ &\quad + \{\dot{U}\}_{t-\Delta t}\beta\Delta t^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここで、各ベクトル量の下添字 $t-\Delta t$, t は、それぞれ時刻 $t-\Delta t$, t の値であることを示す。

与えられた衝撃条件を増分形に直して式(2.5)の第1式に代入し、逐次時間積分を実行すれば、はりの過渡応答(はり内の曲げ波伝ば)が解析できる。

3. 時間増分の決定

式系(2.5)において時間積分を実行するときに、時間増分 Δt の解の安定性への影響が問題となる。弾性解析の場合には、 $[M]^{-1}[K]$ より計算される系の固有円振動数の最大値 $\omega_{\max}$ に対して、 Δt の安定限界は次式で与えられる¹⁴⁾。

$$\Delta t_s \leq \frac{2}{\omega_{\max}\sqrt{1-4\beta}} = \frac{T_{\min}}{\pi\sqrt{1-4\beta}} \quad (3.1)$$

上式で $\beta=1/4$ とすれば、 $\Delta t_s \rightarrow \infty$ となり無条件安定となるが、 $\beta=1/6$ とすれば

$$\Delta t_s \leq \frac{2\sqrt{3}}{\omega_{\max}} = \frac{T_{\min}}{(\pi/\sqrt{3})} \quad (3.2)$$

となり、条件付き安定となる。 $\beta=1/6$ のときには、式(3.2)によって決定される上限値より時間増分 Δt が小さければ解は安定であるが、その大きさに従って解の精度は変化する。式(2.5)の第1式は節点加速度増分に関する連立1次方程式であり、数値計算において最も重要なステップである。したがって、この連立1次方程式の誤差評価を行なうことによって、時間増分 Δt の解の精度への影響を検討する。式(2.5)の第1式を、いまつぎのように書き表わす。

$$\bar{K}\bar{U} = \bar{R} \quad (3.3)$$

ここで

$$\bar{K} = ([M] + [K]\beta\Delta t^2), \quad \bar{U} = \{\Delta\dot{U}\}$$

$$\bar{R} = \{\Delta F(t)\} - [K]\left\{\{\dot{U}\}_{t-\Delta t}\Delta t + \{\dot{U}\}_{t-\Delta t}\frac{\Delta t^2}{2}\right\}$$

式(3.3)は打ち切り誤差(丸め誤差は無視)によって、つぎのような連立1次方程式を解くことになる。

$$(\bar{K} + \delta\bar{K})(\bar{U} + \delta\bar{U}) = (\bar{R} + \delta\bar{R}) \quad (3.4)$$

ただし、 $\delta\bar{U}$ は $\delta\bar{K}$, $\delta\bar{R}$ による $\bar{U} = \bar{K}^{-1}\bar{R}$ の誤差とする。

式(3.4)を展開してノルムをとり、 $\|\bar{K}^{-1}\|\|\delta\bar{K}\| < 1$ を仮定すれば

$$\frac{\|\delta\bar{U}\|}{\|\bar{U}\|} \leq \frac{C(\bar{K})}{1 - \|\bar{K}^{-1}\|\|\delta\bar{K}\|} \left(\frac{\|\delta\bar{K}\|}{\|\bar{K}\|} + \frac{\|\delta\bar{R}\|}{\|\bar{R}\|} \right) \quad (3.5)$$

となる。ここで、 $C(\bar{K}) = \|\bar{K}\|\|\bar{K}^{-1}\|$ であり、一般にマトリックス $\bar{K}$ の条件数¹⁵⁾と呼ばれている。いまノルムとしてユークリッド・ノルム $\|\cdot\|_2$ をとれば、 $C(\bar{K}) = \|\bar{K}\|_2\|\bar{K}^{-1}\|_2 = |\lambda|_{\max}/|\lambda|_{\min}$ と表わされる。式(3.5)から $\bar{K}$, $\bar{R}$ の相対変化率 $\|\delta\bar{K}\|/\|\bar{K}\|$, $\|\delta\bar{R}\|/\|\bar{R}\|$ が小さくても、 $C(\bar{K})$ が大きければ解の相対変化率 $\|\delta\bar{U}\|/\|\bar{U}\|$ は大きくなる可能性があることがわかる。したがって、式(3.3)すなわち式(2.5)の第1式が精度よく求まるためには、 $\bar{K}$ の条件数が最小となるように時間増分を決定すればよい。

以上をまとめると、NEWMARK の加速係数の値として $\beta=1/6$ を用いる場合には、式(3.2)によって決定される時間増分の安定限界内で、 $\bar{K}$ の条件数を最小とする時間増分を決定すればよい。

4. 数値解析例と実験結果との比較

RIPPERGER⁹⁾は半無限長の弾性はり(円形断面)の一端に鋼球を偏心的に打ち当てて、半正弦状の曲げモーメント・パルスを与え、はりの各部分に貼ったひずみゲージによってその応答を実験的に調べている。PARKER ほか¹⁶⁾は RIPPERGER の実験データ*に基づいて、はりの過渡応答を固有関数展開法によって解析し、その解析結果が実験結果とよく一致することを示している。本報告では同様に RIPPERGER の実験データに基づいて、有限要素法によって解析を行ない、彼の実験結果および PLASS⁹⁾の特性曲線解と比較することにより、はりの過渡応答に及ぼす回転慣性およびせん断変形の影響を調べる。

RIPPERGER が実験に使用したはりの材質は鋼であり、その材料定数および幾何学的形状は、つぎのとおりである。

$$E = 3 \times 10^7 \text{ psi } (21093 \text{ kgf/mm}^2), \quad \nu = 0.30$$

$$\rho = 7.187 \times 10^{-4} \text{ lbf-s}^2/\text{in.}^4$$

$$(7.832 \times 10^{-10} \text{ kgf-s}^2/\text{mm}^4)$$

$$d = 0.516 \text{ in. } (13.11 \text{ mm})$$

$$k' = 3/4 \text{ (円形断面に対する値)}$$

以下では、各変数はすべてつぎの無次元量で示すことにする。

$$\bar{M} = M/(Ed^3), \quad \bar{t} = t/(d/c_0), \quad \bar{\tau} = \tau/(d/c_0), \quad \bar{x} = x/d$$

$$\bar{w} = w/d$$

$$\text{ここで, } c_0 = \sqrt{E/\rho} = 2.043 \times 10^5 \text{ in./s } (5190 \text{ m/s})$$

実験における境界条件は、第2図に示すような三つの異なる持続時間をもつ、半正弦状の曲げモーメント・パルスの持続時間が異なっている。

* 本報告で比較のために用いる実験データとは、曲げモーメント・パルスの持続時間が異なっている。

第2図 境界条件とはりの有限要素モデル

ト・パルスである。実験に使用されたはり、一様円形断面の真直はりであるので、長さ l の直線はり要素で均等に要素分割を行なう。曲げ波の波頭の伝ば速度 c_0 を用いて、 $\Delta t_{cr} = l/c_0$ として式(2.5)の第1式の左辺のマトリックスをつぎのように書き直す。

$$\bar{K} = [M] + [K] \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_{cr}} \right)^2 \frac{\beta \rho l^2}{E} \quad (4.1)$$

ここで、 $\bar{K}$ はパラメータとして、 $(\Delta t/\Delta t_{cr})$ 、 β 、 l を含むが、数値計算では $\beta = 1/6$ と固定する。

半無限長のはりを第2図に示すように、はり要素の長さ $l = d/2$ 、要素数=100(節点数=101)と分割して、有限長のはりにモデル化する。この有限長のはりの長さ $L = (d/2) \times 100 = 50d$ は、有限近似によって生じる自由端からの反射波が、実験結果と比較する時間内ではまったく影響しないほど十分に長い。

本研究で用いるはり理論は、回転慣性およびせん断変形を考慮する組合せ関係から、第1表のように分類される。式(2.2)、(2.3)において、せん断変形パラメータ ϕ および回転慣性項 $[m_r]$ をそれぞれ調整することによって、四つのはり理論が解析に適用できる。この

第3図 条件数と $\Delta t/\Delta t_{cr}$ との関係

四つのはり理論に基づいて、最大固有円振動数および時間増分の安定限界を求めた結果を、第1表に示す。ただし、はりの境界条件は両端自由として、最大固有値 $\lambda_{max} (= \omega_{max}^2)$ の計算には QR 法¹⁷⁾を使用した。

第1表から安定限界の時間増分は、TIMOSHENKO はり理論の場合が最も大きく、修正BERNOULLI-EULER はり理論の場合が最も小さいことがわかる。四つのはり理論に対して、式(4.1)の $\bar{K}$ に関する条件数 $-\Delta t/\Delta t_{cr}$ の関係を求めた結果を、第3図に示す。各曲線上の丸印をつけた点の $\Delta t/\Delta t_{cr}$ 値が安定限界であり、それより小さい値(すなわち矢印方向)が安定範囲に入る。この第3図では TIMOSHENKO はり理論に対しては、 $\Delta t/\Delta t_{cr} \approx 0.8$ が条件数最小となるが、特性曲線上でつねに $\Delta t = \Delta t_{cr} = l/c_0$ なる関係を保持する特性曲線解と比較する関係上、 $\Delta t/\Delta t_{cr} = 1$ (すなわち $\Delta t = \Delta t_{cr}$) を採用する。しかし、 $\Delta t/\Delta t_{cr} \approx 0.8$ および $\Delta t/\Delta t_{cr} = 1$ における条件数の値にはほとんど差がないので、この二つの時間増分値による数値解の精度の差は、無視できるほど小さい。長さ $l = d/2$ のはり要素を共通して用いるかぎり、各はり理論に対する時間増分の安定限界は、第1表に示すように大きく異なるので、同一の時間増分で直接積分しようとすれば、最小

第1表 最大固有円振動数と時間増分の安定限界

No.	Theory	Rotatory inertia	Shear deformation	$\omega_{max} \times 10^4$ (1/s)	Δt_s (μ s)	$\frac{\Delta t_s}{\Delta t_{cr}}$	Δt
①	TIMOSHENKO	○	○	2.430	1.426	1.13	Δt_{cr}
②	RAYLEIGH	○	×	5.863	0.591	0.47	$\Delta t_{cr}/5$
③	Modified BERNOULLI-EULER	×	○	67.94	0.051	0.04	$\Delta t_{cr}/25$
④	BERNOULLI-EULER	×	×	23.71	0.146	0.12	$\Delta t_{cr}/10$

ここで、 $\Delta t_{cr} = l/c_0 = 1.26 \mu$ s, ○は考慮, ×は無視を表わす

の時間増分に統一する必要性が生じる。しかし、最小の時間増分を各はり理論に対して共通に用いる場合、安定限界の大きいはり理論に対しては、逆に条件数が大きくなり解の精度の低下を招くために、同一の時間増分で積分することは適切でない。このような理由によって、解の安定性および精度との関係から第1表に示す時間増分値に決定した。

第2図に示すような持続時間 $\bar{t}$ が異なる曲げモーメント・パルスを受ける、半無限長の弾性はりの過渡応答に関する実験値と TIMOSHENKO はり理論に基づく

計算値(有限要素解と PLASS による特性曲線解)との比較を、第4図～第6図に示す。これらの図から、曲げモーメント・パルスの持続時間 $\bar{t}$ が、曲げ波がはりの直径を伝ばするのに要する時間($\bar{t}=1$)に比べて比較的短いときには、曲げモーメントに関する実験値と両計算値とはあまり一致しない(第4図、第5図)が、長くなると非常によく一致する(第6図)ことがわかる。この理由としては、つぎのような説明が考えられる。無限長の弾性はり(円形断面)内の正弦状曲げ波伝ばに関する、POCHHAMMER-CHREE 理論(3次元弾

第4図 実験値 ($\bar{t}=2.4$) と TIMOSHENKO はり理論に基づく特性曲線解および有限要素解との比較

第5図 実験値 ($\bar{t}=6.0$) と TIMOSHENKO はり理論に基づく特性曲線解および有限要素解との比較

第6図 実験値 ($\bar{\tau}=10.0$) と TIMOSHENKO はり理論に基づく特性曲線解および有限要素解との比較

第7図 無限長の弾性はり (円形断面) 内を伝ばする曲げ波の位相速度

性理論)^{*18)} および本研究に用いる三つのはり理論に基づく定常解の位相速度曲線 (分散曲線) を示すと、第7図のようになる。この図から、TIMOSHENKO はり理論では第2次モードまで存在するが、他のはり理論では第1次モードまでしか存在しないことや、POCHHAMMER-CHREE 理論と TIMOSHENKO はり理論とは第1次モードではかなりよく一致するが、第2次モードでは波長 Λ が小さい (すなわち高周波成分

分) 領域で両理論は大きく異なることなどがわかる。POCHHAMMER-CHREE 理論に基づく定常解は、パルス状の曲げ波の過渡的伝ば現象に対しては直接的に有効な解ではないが、この理論と TIMOSHENKO はり理論との高周波領域での不一致によって、TIMOSHENKO はり理論が高周波成分に対しては必ずしも正確な解を与えないことが予測できる。いま、境界条件の入力曲げモーメント・パルス (第2図参照)

$$\bar{M}(0, \bar{t}) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{\bar{\tau}} \bar{t} & 0 \leq \bar{t} < \bar{\tau} \\ 0 & \bar{\tau} \leq \bar{t} \end{cases}$$

の FOURIER 変換を行なって周波数スペクトルを計算すると、つぎの結果を得る。

$$F(i\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{M}(0, \bar{t}) e^{-i\bar{\omega}\bar{t}} d\bar{t} = \int_0^{\bar{\tau}} \sin \frac{\pi}{\bar{\tau}} \bar{t} \cdot e^{-i\bar{\omega}\bar{t}} d\bar{t}$$

$$|F(i2\pi\bar{f})| = |F(i\bar{\omega})| = \left| \frac{2\pi\bar{\tau}}{\pi^2 - \bar{\omega}^2\bar{\tau}^2} \cos \frac{\bar{\omega}\bar{\tau}}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{2\bar{\tau}}{\pi(1 - 4\bar{f}^2\bar{\tau}^2)} \cos(\pi\bar{f}\bar{\tau}) \right|$$

ここで

$\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$: 無次元固有円振動数, $\bar{f}$: 無次元振動数

上式の周波数スペクトルを図示すると、第8図のようになる。この図は入力パルスに、半正弦波の基本振動数 $\bar{f}_0 = 1/(2\bar{\tau})$ の数倍の高周波成分 (すなわち高調波) が、連続的に多数含まれていることを示している。パルス状の曲げ波 (外乱) の位相速度を c として、たとえばピーク値に近い第4次、第6次および第8次の高調波に対して a/Λ を求めると、つぎのようになる。

* この理論に基づく解は、厳密解である。

第8図 入力曲げモーメント・パルスの周波数スペクトル

第4次高調波

$$\bar{f} = 4\bar{f}_0 = \frac{2}{\bar{\tau}}$$

$$\therefore f = \frac{2}{\bar{\tau}(d/c_0)} = \frac{c_0}{a\bar{\tau}}, \quad \frac{a}{L} = \frac{a}{(c/f)} = \frac{1}{\bar{\tau}(c/c_0)}$$

第6次高調波

$$\bar{f} = 6\bar{f}_0 = \frac{3}{\bar{\tau}}$$

$$\therefore f = \frac{3}{\bar{\tau}(d/c_0)} = \frac{3c_0}{2a\bar{\tau}}, \quad \frac{a}{L} = \frac{3}{2\bar{\tau}(c/c_0)}$$

第8次高調波

$$\bar{f} = 8\bar{f}_0 = \frac{4}{\bar{\tau}}$$

$$\therefore f = \frac{4}{\bar{\tau}(d/c_0)} = \frac{2c_0}{a\bar{\tau}}, \quad \frac{a}{L} = \frac{2}{\bar{\tau}(c/c_0)}$$

パルス状の曲げ波 (外乱) はいろいろな周波数成分を含むので, 一定の位相速度 c では伝ばせずに, 群速度 c_g で伝ばする。この群速度はエネルギーが伝達される速度であるから, 膨張波速度 c_d^* を越えることができない。したがって, $c/c_0 \leq c_d/c_0 = 1.16$ ($\nu = 0.30$ に対して) となり, この数値を用いて曲げモーメント・パルスの三つの持続時間 $\bar{\tau}$ に対して a/L を計算すると, つぎのようになる。

持続時間 ($\bar{\tau}$)	高調波 4次(a/L)	高調波 6次(a/L)	高調波 8次(a/L)
2.4	0.36	0.54	0.72
6.0	0.14	0.22	0.29
10.0	0.09	0.13	0.17

上の結果を参考にして第7図を見ると, $\bar{\tau} = 2.4$ の場合には第4次以上の高調波が, また $\bar{\tau} = 6.0$ の場合には第6次高調波が POCHHAMMER-CHREE 理論と TIMOSHENKO はり理論との第2次モードでの不一致が著しくなる高周波領域に入ることがわかる。第8次以上の高調波になると振幅が非常に小さいので, その影響はたいへん小さくなることが推測できる。

以上の考察から, 曲げモーメント・パルスの持続時間が短くなると, 入力パルスに含まれる高周波成分のために, TIMOSHENKO はり理論は必ずしも正確な解を与えないことが明らかになった。一方, $\bar{\tau} = 2.4$ と

第9図 実験値 ($\bar{\tau} = 10.0$) と RAYLEIGH はり理論に基づく有限要素解との比較

$$* \quad c_d = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad \therefore \quad \frac{c_d}{c_0} = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

第10図 実験値 ($\bar{\omega}=10.0$) と修正 BERNOULLI-EULER はり理論に基づく有限要素解との比較

第11図 実験値 ($\bar{\omega}=10.0$) と BERNOULLI-EULER はり理論に基づく有限要素解との比較

$\bar{\omega}=6.0$ における有限要素解と特性曲線解との差は、この高周波成分の近似モデル（物理的近似と数学的近似）への影響の差が関係しているように思われる。

つぎに回転慣性およびせん断変形のはりの過渡応答に及ぼす影響を明らかにするために、実験値と両計算値が最もよく一致する持続時間 $\bar{\omega}=10.0$ の場合（第6図）について、TIMOSHENKO はり理論以外の第1表の三つのはり理論に基づいて計算を行なった結果を、第9図～第11図に示す。それぞれの計算結果は、衝撃端に近い $\bar{x}=2$ の位置ではかなり実験値と一致する

が、衝撃端から離れるにつれて位相がずれ、波形が乱れるような形で実験値と一致しなくなってくる。修正 BERNOULLI-EULER はり理論による結果（第10図）は RAYLEIGH はり理論による結果（第9図）よりも実験値によく一致しており、BERNOULLI-EULER はり理論（初等はり理論）による結果（第11図）は予期されるように、最も不正確な結果を示している。この事実から、半無限長の弾性のはりの一端が曲げモーメント・パルスを受けるような場合には、回転慣性よりもせん断変形のほうが過渡応答に大きい影響を与えていること

第12図 TIMOSHENKO はり理論および BERNOULLI-EULER はり理論に基づいて計算したはりの過渡的変形

がわかる。このような傾向は、無限長の剛塑性はり (I型断面) が一定速度の横衝撃を受ける場合の、JONES ほか⁵⁾による解析結果においても見られている。しかし、回転慣性の影響の大きさは、はりの断面形状、荷重条件、境界条件によっても異なるために、その影響はせん断変形の影響よりもつねに小さいと断定することはできない。

第12図は曲げモーメント・パルスの持続時間 $\bar{t} = 10.0$ の場合について、TIMOSHENKO はり理論および BERNOULLI-EULER はり理論に基づいて計算した、はりの過渡的変形の比較を示している。この二つのはり理論に基づく曲げモーメントの過渡応答の差 (第6図と第11図参照) が、はりの過渡的変形では図のような差となって現われることに注目すべきである。曲げモーメント・パルスを受ける場合の半無限長はりの変形モードは、片持ちはりの先端が一定速度の横衝撃を受ける場合¹⁹⁾とは異なり、変形がとくに衝撃端付近に局部的に生じていて、曲げモーメント・パルスの除荷後ははり先端のたわみはほぼ停止するが、曲げ変形は曲げ波の伝ば方向に大きく進行している。

5. 結 論

半無限長の弾性はり (円形断面) の一端が、持続時間の異なる半正弦状の曲げモーメント・パルスを受ける場合の過渡応答を、有限要素法によって解析を行な

い、RIPPERGER の実験結果および PLASS の特性曲線解と比較した。四つのはり理論を用いて、はりの過渡応答に及ぼす回転慣性およびせん断変形の影響を調べた結果、つぎのような結論を得た。

- 1) 曲げモーメント・パルスの持続時間が、曲げ波のはり直径を伝ばするのに要する時間よりも十分に長いとき、すなわち入力曲げモーメント・パルスに高周波成分があまり含まれていないときには、TIMOSHENKO はり理論がきわめて有効であり、この理論に基づく解析結果が実験値と最もよく一致する。
- 2) 高周波成分があまり含まれていない曲げモーメント・パルスを受ける、はりの過渡応答に及ぼすせん断変形の影響は、回転慣性の影響よりも大きい。

参 考 文 献

- 1) TIMOSHENKO, S.P.: Vibration Problems in Engineering, 3rd ed., D. Van Nostrand, New York (1955), pp.329-331.
- 2) HUANG, T.C.: The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions, J. Appl. Mech., Vol. 28 (1961), pp.579-584.
- 3) HUANG, T.C.: Effect of Rotatory Inertia and Shear on the Vibration of Beams Treated by the Approximate Methods of RITZ and GALERKIN, Proc. 3rd U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., ASME (1958), pp.189-194.
- 4) DAWSON, B.: Rotary Inertia and Shear in Beam Vibration Treated by the Ritz Method., Aeronaut. J., Vol. 72 (1968), pp.341-344.
- 5) JONES, N. and GOMES DE OLIVEIRA, J.: The Influence of Rotatory Inertia and Transverse Shear on the Dynamic Plastic Behavior of Beams, J. Appl. Mech., Vol. 46 (1979), pp.303-310.
- 6) GOMES DE OLIVEIRA, J. and JONES, N.: A Numerical Procedure for the Dynamic Plastic Response of Beams with Rotatory Inertia and Transverse Shear Effects, J. Struct. Mech., Vol. 7, No. 2 (1979), pp.193-230.
- 7) GOMES DE OLIVEIRA, J. and JONES, N.: Some Remarks on the Influence of Transverse Shear on the Plastic Yielding of Structures, Int. J. Mech. Sci., Vol. 20 (1978), pp.759-765.
- 8) RIPPERGER, E.A.: Measurement of Short Bending Wave Pulses in Steel Bars, Defense Research Laboratory, The University of Texas, Report No. DRL-367, CM-838 (1955).
- 9) PLASS, H.J., Jr.: Some Solutions of the TIMOSHENKO Beam Equation for Short Pulse-Type Loading, J. Appl. Mech., Vol. 25 (1958), pp.379-385.
- 10) ARCHER, J.S.: Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques, AIAA. J., Vol.3 (1965), pp.1910-1918.
- 11) KAPUR, K.K.: Vibrations of a TIMOSHENKO Beam, Using a Finite Element Approach, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 40, No. 5 (1966), pp.1058-1063.
- 12) NICKELL, R.E. and SECOR, G.A.: Convergence of

- Consistently Derived TIMOSHENKO Beam Finite Elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.5 (1972), pp.243-253.
- 13) PRZEMIENIECKI, J.S.: *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York (1968), pp. 292-297.
- 14) NEWMARK, N.M.: A Method of Computation for Structural Dynamics, *Proc. ASCE*, Vol. 85, EM 3 (1959), pp. 67-94.
- 15) 山本善之, 山田善一: マトリックス構造解析の誤差論, コンピュータによる構造工学講座 II-5-B, 培風館 (昭 47), pp. 50-63.
- 16) PARKER, R.P. and NEUBERT, V.H.: High Frequency Response of Beams, *J. Appl. Mech.*, Vol. 42 (1975), pp. 805-808.
- 17) BATHE, K. J. and WILSON, E. L.: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1976), pp. 460-473.
- 18) ABRAMSON, H.N.: Flexural Waves in Elastic Beams of Circular Cross Section, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 29, No. 1 (1957), pp. 42-46.
- 19) SUN, C. T. and HUANG, S.N.: Transverse Impact Problems by Higher Order Beam Finite Element, *Computer & Structures*, Vol. 5 (1975), pp. 297-303.