— 論 文 —

軸対称不足膨張噴流に関する研究*
On the Study of Axisymmetric Underexpanded Jets

瀬戸 邦 聰**・林 正 徳***

Kunisato SETO and Masanori HAYASHI

Abstract

In the present paper, we investigated under-expanded sonic jets through axisymmetric conical nozzles both theoretically and experimentally and the effect of the convergence angle on those jets were investigated in all the range of the angles which can be used for practical purpose under various nozzle exit conditions as in our previous paper which had dealt with two-dimensional case.

The flowfield inside the nozzle was solved by expanding the velocity components into power series in y up to the fourth order after OSWATITSCH and ROTHSTEIN and we derived a new differential equation which may be applied to the case of considerably large inclination angle of the wall. Furthermore, we dealt with the boundary conditions with special attention.

Then, we obtained the shape of the sonic line and the jet boundary along with the location of the shock wave analytically and experimentally and both the results are in a reasonable agreement. Calculated sonic lines were also compared with other authors' ones and some comments were added.

1. ま え が き

宇宙空間あるいは真空環境のもとでの応用技術の隆盛に伴い、不足膨張噴流の挙動が最近とくに注目を集めている。

このような噴流は、軸対称として扱える場合が多い。

著者らは先に、二次元不足膨張噴流についてノズル形状の影響を調べ、その影響が流れ場に無視できぬ影響をもつことを示した¹⁾。

本論文では、より実的な流れである軸対称噴流に対して、二次元噴流と同様な理論および実験解析を行い、両結果の良好な一致を得たことから、著者らの理論解析の方法が、軸対称噴流に対しても十分正確に適

用できることが示される。

これまで、不足膨張噴流に及ぼすノズル形状の影響を調べた例は意外に少ないが、そのなかで、ホドグラフ法を用いた THORNOCK ほかの研究²⁾、差分法を用いた CLINE の論文³⁾、それに WEHOFFER ほか⁴⁾および BROWN ほか⁵⁾の報告等があり、これらはいずれも軸対称噴流に関するものである。精度と計算所要時間の点で BROWN らの研究が差分法を用いた方法のなかでは最もよいようだが、彼らの方法にしても、噴流境界形状の仮定とその修正を繰り返すという本質的に複雑な手順を含んでおり、実用上困難がある。同じく差分法を用いた CLINE の方法によれば、音速線の計算が非常に短時間で、しかも実験値とよく一致することが報告されているが、噴流境界幅は一定となっている。圧力比が非常に小さくかつノズル角度が小さい場合に対しては彼の方法も有効であろうが、噴流境界形状が問題となる一般の場合にはかなり疑問がある。一方、THORNOCK らの研究はホドグラフ法を使用し、計算所要時間は問題にならぬ代りに、その理論では、亜音速側と超音速側との matching のために実験的にしか定められないパラメータを考慮しなければならず、完全な理論とはいえない。

さて、超音速流に対する特性曲線法の有効性は、すでによく知られているが⁶⁾、初期値の誤差は累積される性質があるから、正確な初期値を特性格子点で与えなければならない。

著者らの方法は、基礎方程式として、亜音速、遷音速および超音速流れ場を通して、同一の基礎方程式を使用し、超音速側では特性曲線法による。その初期値を与えるために、特性曲線法を併用することにより音速線上に特性格子点を選ぶことができ、特性曲線法の使用に適している。また、ノズル内部を直接法で上流から下流に向かって解き、境界条件も明確に規定でき、計算所要時間も差分法にくらべてはるかに少なく、得られる結果も、実験結果や差分法による計算結果と比較して、十分な信頼性をもち、実用的な計算方式として、十分役に立つものと考えられる。本計算方式は、もちろん任意形状ノズルに適用できるものであ

* 昭和56年4月7日、日本航空宇宙学会第12期年会講演会にて発表。昭和56年6月15日原稿受理

** 佐賀大学理工学部

*** 九州大学工学部

るが、本論文ではノズル形状を直線的なものに限り、円錐形ノズルの先細角をパラメータとして、いろいろな圧力条件のもとでの不足膨張噴流の挙動を理論的かつ実験的に調べ、それに及ぼすノズル出口形状の影響を調べることににより、軸対称不足膨張噴流の基本的特性を明らかにした。

おもな記号

a_0, a_2, a_4, b_1, b_3 : 速度分布係数 [式 (4), (5)]

h : 壁の高さ

p : 既知の軸速度

q : 未知の軸速度勾配

S, S_a, S_b : 衝撃波形成位置, S_a は軸上, S_b は境界上

u, v : それぞれ x および y 方向の速度成分

u_1 : 一次元等価速度 [式 (11)]

W : 無次元流量

x, y : それぞれ噴流軸および半径方向座標

x_s : 軸上音速点

y_{max} : 最大噴流幅

θ : 流れ角

Θ : [式 (17)]

θ_N : ノズル絞半角 (先細角), 符号は正とする

κ : 比熱比

λ : $[\equiv (\kappa - 1) / (\kappa + 1)]$

ν : PRANDTL・MEYER 角

ν_c : ノズル出口面における最大膨張角

Ω : [式 (16)]

2. 実験

シュリーレン観測および静圧分布計測により流れ場を実験的に調べた。とくに静圧分布計測用に、第1図に示すような半円ノズルおよび静圧測定板を使用し、軸および半径方向ともに 0.5 mm 間隔の計測が可能となっている。静圧孔直径は 0.2 mm である。なお、真半円度は特製の円筒形治具で確かめた。

使用したノズルは流入口径 40 mm, 出口径 10 mm, 長さ 110 mm であり、絞半角は 0°, 5°, 10°, 15°, 20°, 30°, 45°, 60° および 75° である。集合胴圧を手動弁により 1.0, 1.3, 1.5, 1.7, 2.0, 2.2, 2.3 および 2.5 atg (kg/cm², ゲージ値) の 8 とおりに変化させてシュリーレン観測を行う。静圧計測には拡散形半導体小型圧力変換器 (TOYODA-PD64DK) を使用し、水銀マノメータで校正した。集合胴圧を手動により調節し

第1図 本実験に使用した半円ノズルおよび静圧分布計測用の測定板

大気中に噴出する。

3. 理論解析

3.1 基礎方程式 検査面および座標軸を第2図に示す。ノズル出口面中央点を原点とし、 $\theta_N, l, r, d, x_s, S_a$ および S_b により、それぞれノズル絞半角、ノズル長、ノズル出口半径、ノズル出口直径、軸上音速点、軸上および境界上衝撃波形成位置を表わす。

x および y 方向の速度成分をそれぞれ u および v とし、局所音速を c で表わし、いずれも臨界速度で無次元化し、非粘性、等エントロピーおよび渦なしを仮定すれば、軸対称流に対して、次の3式が成立することはよく知られている。

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2uv \frac{\partial u}{\partial y} + (c^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2 v}{y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$c^2 = \frac{\kappa + 1}{2} - \frac{\kappa - 1}{2} (u^2 + v^2) \quad (3)$$

第2図 検査面

ここで κ は比熱比で空気に対し 1.4 とする。

上式をノズル内部および外部に対して以下のように解く。

ノズル内部: OSWATITSCH および ROTHSTEIN⁷⁾ にならって、速度成分を y のべき級数で表示する。すなわち、

$$u = a_0(x) + \frac{a_2(x)}{2!}y^2 + \frac{a_4(x)}{4!}y^4 + \dots \quad (4)$$

$$v = \frac{b_1(x)}{1!}y + \frac{b_3(x)}{3!}y^3 + \dots \quad (5)$$

ここで、 a_0, a_2, a_4, b_1 および b_3 は x のみの関数であり、 $\dots$ は y の 5 次以上の項を表わす。 y を 4 次の項までにとどめ、それらの係数を次式によって決定する。

$$b_3' - \frac{4}{h}b_3 = \frac{24a_0}{h^4} + \frac{12a_2}{h^2} - \frac{24b_1}{h^3h'} \quad (6)$$

$$b_1 = -\frac{a_0'(1-a_0^2)}{2(1-\lambda a_0^2)} \quad (7)$$

$$a_2 = b_1' \quad (8)$$

$$a_4 = b_3' \quad (9)$$

ここで h はノズル壁の高さ、 $\lambda = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$ であり、 $(\cdot)$ は x による微分を表わす。上式のうち、(6) 式はノズル壁における境界条件 (流れが壁に沿うという条件) から、また (7)、(8) および (9) 式は、(4) および (5) 式を (1)、(2) および (3) 式に代入し、 y に関する同次の項を比較して得られたものである。5 個の係数を決定するために必要な式として、著者らは、ノズル内部の軸速度に関し、次のような b_3 に関して 1 階それに a_0 に関して 2 階の常微分方程式から成る関係式を導いた。詳細は付録 A に譲り、結果のみを示すと次のとおりである。

$$a_0 = u_1 - \frac{a_2 h^2}{4} \left(1 - \frac{h'^2}{6}\right) - h' \left(b_1 h + \frac{a_0' h}{2}\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{h'^2}{8}\right) - \frac{a_4 h^4}{72} - \frac{b_3 h^3 h'}{4} \left(\frac{1}{18} - \frac{h'^2}{4}\right) \quad (10)$$

ここで u_1 は一次元等価速度であり、次式を解くことにより与えられる。

$$\{(\kappa + 1)/2\}^{1/(\kappa - 1)} u_1 (1 - \lambda u_1^2)^{1/(\kappa - 1)} h^2(x) = W \quad (11)$$

ただし W は一次元臨界流量で無次元化した流量を表わす。

ノズル外部: 超音速領域 (音速線と軸とで挟まれた部分) では、ノズル内部と同様に速度成分を (4) および (5) 式のように展開し、(6)~(9) 式を利用する。ただし、(6) 式の h はこの場合壁の高さではなく、流れ角が既知の点を選ぶ。さらに、軸速度を決定するために (10) 式は利用できないから、既知の軸点 x_2 の軸速度 p を用いて、未知の軸点 x_1 の軸速度を

$$a_0(x_1) = p + q \quad (12)$$

第3図 特性格子

第4図 既知および未知の格子点の間の座標関係

$$x = x_1 - x_2 \quad (13)$$

と置き、 q を流量条件により決定する。(12) 式は速度変化 (空間変化) を一次の項までにとどめた解析法であるが、速度変化に応じて x を密に選ぶことにより十分な精度を保つものと考えられる。

超音速領域は特性曲線法による。すなわち、第3図の特性格子に沿って step by step に求める。第4図で点1と点2の状態量が既知であるときに点3における PRANDTL-MEYER 角 ν および流れ角 θ を次式により求める。なお、添字 1~3 は点 1~3 の状態であることを示している。

$$\nu_3 = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2 + \theta_1 - \theta_2 + Q + \Theta) \quad (14)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2 + \theta_1 + \theta_2 + Q - \Theta) \quad (15)$$

ただし

$$Q = \frac{(y_3 - y_1) \sin \theta_1 \sin \mu_1}{y_1 \sin(\theta_1 - \mu_1)} \quad (16)$$

$$\Theta = \frac{(y_3 - y_2) \sin \theta_2 \sin \mu_2}{y_2 \sin(\theta_2 + \mu_2)} \quad (17)$$

であり μ はマッハ角を意味する。点1か2が軸上にあるとき、たとえば $y_2 = 0$ の場合は次式を用いることにより軸上の特異性を除く。

$$\nu_3 = \frac{1}{3}\{\nu_2 + 2(\theta_1 + \nu_1 + Q)\} \quad (18)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{3}(\theta_1 + \nu_1 - \nu_2 + Q) \quad (19)$$

3.2 境界条件 すでに、(6)式でノズル壁における境界条件を使用しているが、そのほかに、(10)式の解を決定するために、 a_0 , a_0' および b_3 の初期値が必要であり、それらを次の3個の条件を満たすように決定する。

条件 1: ノズル内部で軸速度が不自然な値、すなわち超音速や負の値をとらぬこと。

条件 2: ノズル・リップでマッハ数が1となること。

条件 3: 音速線が正則条件を満たすこと。

3.3 計算方法 第5図に示されているように、上述の3個の条件を満たすノズル入口の速度分布を決定し、それに基づいてノズル内部の流れ場を決定し、得られたノズル出口面における条件のもとに、ノズル外部の軸速度分布を、音速線を媒介として、超音速領域の計算と並行して決定する。最終的な判定が条件3すなわち音速線の正則条件にかかっており、これについては後述する。正しい音速線が得られたら、噴流流れ場を計算し、衝撃波の形成位置を求めて、計算を終了する。

以下、具体的な計算方法を、第5図に沿って簡単に示す。なお詳細は参考文献1)を参照されたい。

3.3.1 ノズル入口の速度分布 二次元の場合の計算により、ノズル入口側の条件の変化は、ノズル外部へほとんど影響しないことがわかったから、本論文の流入条件は、一様平行流入部をもつ場合に限り、 a_0 の初期値として、(11)式による u_1 を与え、 a_0' および b_3 の初期値を適当に与える。なお、ノズル外部の計算に限れば、 b_3 の初期値は零としても、大きな誤差は生じない。付言するならば、 a_0 , a_0' および b_3 が決まれば、 W が定決し、 W から u_1 が得られさらに u_1 と a_0 とは (10) 式の関係を満たしている。

3.3.2 ノズル出口の速度分布 可変刻みのRUNGE-KUTTA-GILL 法で (10) 式を解くことにより、ノズル出口の速度分布を求める。(10)式右辺の第4項および第5項を省略した場合、計算所要時間は1/2以下となり、それによって生ずる軸速度の計算誤差は小さいから実用的であるが、流量条件は若干損われる。

3.3.3 ノズル出口面のすぐ下流の流れ場 ノズル内部へ入り込む音速線を考慮する。もっとも、この部分の音速線は微小であると考えられるから、微小半径の円弧で置き換え、その半径(ϵ_p)を計算可能な範囲内で小さくとり、無限に小さくできる場合は、 ϵ_p をそれ以上小さくしても、計算結果に影響がないところで打ち切る。この音速線で、ノズル内部へ向かう全膨張波が反射する。

以下、step by step で新しい音速点を求めるに当た

第5図 計算全体の流れ図

って、新しい音速点が常に既知の C -特性曲線上にあることに留意する。しかし二次元の場合と異なり、特性面における値が物理面の値すなわち音速点の y 座標の影響を受けるから、 C -特性曲線の正しい方向は反復計算を数回行った上で決定する。ほとんどの場合、最初の y 座標の仮定として、二次元の計算値を採用すればよいが、もしその値では収束しない場合、二次元の計算値と、前の step で求めた隣り合う音速点との平均値を用いることにより収束値を得ることができた。 C -上のどの点が音速点であるかについては、(12)式を用いて軸速度を求めた後、(6)~(9)の関係式を用いて速度分布を計算し、合速度が音速に等しくなる点を探せばよい。本計算でも、二次元の場合と同様、音速点を求めるに際して、特性格子間隔内で流れ角 θ を固定することにより、計算時間の短縮を図った¹⁾。

3.3.4 流量条件 噴流内の流量を、任意の軸点を通る横断面と音速面との交線で囲まれた横断面を通る流量 Q_1 とその交線と交わる C -特性曲線が形成する面を通る流量 Q_2 とに分け、 Q_1 のほうは次式で計算する。

$$Q_1 = 2 \int_0^{y_1} u \rho y dy \quad (20)$$

ただし、 ρ は無次元密度である。

一方 Q_2 の計算は、HARTLEY の方法⁸⁾を軸対称流れに適用できるように修正して使用した。この場合、流量条件は次式で表現できる。

$$W = Q_1 + Q_2 = \text{一定} \quad (21)$$

3.3.5 正則条件 軸対称流れの場合、条件3から帰結する定理は次のように表現できる。

定理 1 軸へ向かう膨張波 (C-特性曲線) のなかには、任意の点 y_1 に来たとき

$$\nu + \theta - \int_0^{\nu_1} \{\sin \theta \sin \mu / y \sin (\theta - \mu)\} d\mu = 0$$

となるものが必ずあり、これを LC と呼ぶと、LC は音速線と軸上でのみ接することができ、このような点以外では軸とも音速線とも交わらない。

3.3.6 噴流の計算 正則条件を満たす音速線を初期値として、特性曲線法⁹⁾により、(14)～(19) 式を用いて計算する。使用した方法は二次精度であり、特性面の値が物理面の座標の影響を受けるため、反復計算を必要とする。一般的に、最初の y 座標として二次元の場合の計算法による値を用いることができる。C-に沿って計算を進め、LC および噴流境界上の衝撃波形成位置 (S_b) に達するまでの C-の本数をそれぞれ N_c および N_w とし、 ν_c を N 分割した場合、それらは次のように与えられる。

$$N_c = N(\theta_N + \Delta\theta) / 2\nu_c \quad (22a)$$

$$N_w = N_c + 2N \quad (22b)$$

ここで $\Delta\theta$ は (16) または (17) 式に関連した量であり、次のように表現できる。

$$\Delta\theta = \int_0^{\nu_0} \{\sin \theta \sin \mu / y \sin (\theta - \mu)\} d\mu \quad (23)$$

たとえば、 $\theta_N = 15^\circ$ 、 $\nu_c = 7.5^\circ$ の場合 $\Delta\theta$ は約 1.1° である。なお、(22a) 式が近似式となっているのは、右辺の値が必ずしも整数にならないこと等による。

3.3.7 数値計算上のパラメータ 計算に影響を及ぼす人為的パラメータとして、 N 、 ε_p 、音速状態判定係数 ε_1 、流量条件判定係数 ε_2 、正則条件判定係数 ε_3 、音速線の計算のための特性格子間隔をさらに分割した刻み $\Delta\theta$ および速度勾配変化の刻み Δs のほか、軸対称の場合には、特性量を決めるための数値的手段として用いた反復計算の収束条件 ε_4 が加わる。これらの具体的数値のうち、 ε_4 は x 座標の相対的变化が 10^{-6} 以下となる値とし、ほかの値は二次元の場合と同様に選んだ。

3.4 計算結果 第6図に ν_c および θ_N の変化によるノズル内部軸速度の計算結果を示す。 ν_c を一定にして θ_N を増加させると、軸速度が低くなり、その勾配が大きくなる傾向は二次元の場合と同様である。 θ_N と ν_c とを同じくして、軸対称と二次元の場合とを比較すると、軸対称のほうが軸速度は低くなり、その勾配は大きくなるのが定量的に確認された。

次に θ_N を一定にして ν_c を増すと、二次元の場合は $\theta_N/2$ が臨界値的意味をもっているが¹⁾、軸対称の場合の臨界値としては、(23) 式の $\Delta\theta$ を用いて $(\theta + \Delta\theta)/2$ と考えることができる。

第6図 ノズル内部軸速度分布の計算値
 c^* は臨界速度

第7図 音速線形状の θ_N による変化
 $\nu_c = 7.5^\circ$ の場合の計算値

ν_c を 7.5° に固定して、 θ_N を 5° から 60° まで変化させた場合の音速線および噴流境界の計算結果を、それぞれ第7図および第8図に示す。噴流境界は y 方向に拡大されている。軸速度分布は、軸対称と二次元との間にかかなりの差異が見られるが、音速線の形状のほうは、軸対称と二次元の場合とであまり差異は認められない。詳細に比較すれば、軸対称のほうが若干上流側に位置している。また噴流境界については、軸対称の場合のほうが二次元の場合より狭かつ短くなっていることが定量的に確認された。

さらに、 ν_e および θ_N の変化による軸上音速点 x_s 、最大噴流幅 $y_{\max}$ および境界上衝撃波位置 S_b の計算結果を第9図に示す。二次元の場合と同様に、音速線は θ_N の増加につれ下流へ、また $\nu_e \leq (\theta_N + 4\theta)/2$ の範囲内で ν_e の増加につれ上流へ移動することがわかる。しかも x_s の θ_N に対するプロットはこの場合、ほとんど直線的である。

一方噴流境界は、 θ_N の増加につれノズル出口面近傍で内側にくびれ、最大および最小幅ともに減少するが、 ν_e が増加するにつれ、噴流幅が増大するのは二次元の場合と同様である。

最後に S_b は x_s および $y_{\max}$ の増加につれて増大する。ところが、 x_s が θ_N の増加とともに増大するのに対し、 $y_{\max}$ は逆に減少するから S_b が最大となる θ_N が存在し、その値は ν_e が 10° 以下では 45° 付近であるが、 10° 以上になると減少し $\nu_e = 15^\circ$ では、 $\theta_N = 15^\circ$ 付近で最大値をとることがわかる。 ν_e が 15° を越える場合は、衝撃波の形成の様子が異なってくるのが計算結果にも見られた。

すなわち、特性曲線の交差が噴流軸と交わる以前に

第8図 噴流境界形状の θ_N による変化
 $\nu_e = 7.5^\circ$ の場合の計算値

第9図 θ_N および ν_e による S_b/r , x_s/r および $y_{\max}/r$ の変化の計算値

起こるようになった。この傾向は θ_N が小さい場合に早く現われ、このため、 ν_e を大きくした場合、 θ_N が小さいほど S_b が大きくなる傾向があるのを抑える働きをされると考えられるが、 ν_e が大きい場合はマッハ反射も関係して来り事情が異なってくるから、ここではこれ以上の詳細なことについては省略する。同条件の二次元噴流の場合と比較して、 S_b は軸対称の場合のほうが著しく小さくなり、大略 $2/3$ であることが示された。集合胴圧が、約 2.3 atg に相当するところの $\nu_e = 9^\circ$ の場合の計算結果のプロットを、1例として、 $\theta_N = 15^\circ, 30^\circ$ および 45° について第10図に掲げる。軸対称の場合、厳密に正確な LC を見出すことは困難であり、余計な手数を必要とするので、実用上、 ν_e を等分割して得た C-上で θ が正になればその点は軸上にあるものとして ν を計算し、その軸点での軸速度分

(a)

(b)

(c)

第10図 噴流流れ場の計算

(a) $\theta_N = 15^\circ$, $\nu_e = 9^\circ$ の場合, (b) $\theta_N = 30^\circ$, $\nu_e = 9^\circ$ の場合, (c) $\theta_N = 45^\circ$, $\nu_e = 9^\circ$ の場合

布の連続性を調べることで条件3を置きかえる。そのため、軸上音速点は、別途その軸速度分布から計算している。なお、このプロットは実験結果との比較でも使用する。

4. 実験結果と計算結果との比較および考察

第11図に軸速度分布の実験値と計算値との比較を示す。 θ_N を 15° に固定し、集合胴ゲージ圧 P_0 を1, 1.5および $2atg$ とした場合であり、両者の良好な一致が認められる。ノズル噴出後の下流領域で実験値が計算値より全体として低くなっているのは、測定板上に発達した境界層の粘性による減衰効果によるものと考えられる。次に音速線について、 $\nu_e=7.5^\circ$, $\theta_N=30^\circ$, 45° および 60° の場合の実験値と計算値との比較を第12図に示す。実験値の白丸は超音速、黒丸は亜音速点であり、計算値が実験値とかなりよく一致することを示す。

また第13図は、参考文献5)のFig. 5を利用し、THORNOCKによる実験値およびBROWN & OZCAN, WEHOFFER & MOGERおよびBROWNによる計算値と著者らの計算値との比較を示したものである。同図は

第11図 軸速度分布の実験値との比較
圧力はゲージ値, c^* は臨界速度

第12図 音速線の実験値と計算値との比較
 $\nu_e=7.5^\circ$ の場合

第13図 音速線の計算値と実験値との比較
 $\theta_N=15^\circ$ の場合で、著者らおよびBROWNらの計算は圧力比が2.0, 2.5および3.0の場合を含み、WEHOFFERらおよびBROWNの計算は圧力比が2.0の場合のみである。実験はTHORNOCKによる。

$\theta_N=15^\circ$ のノズルの場合であり、これを見ると、圧力比(集合胴圧の大気圧 P_∞ に対する絶対値の比)が2.5および3の場合には、著者らの計算値は実験値とよく一致しており、BROWNほかの計算値ともよく一致している。ただBROWNほかの計算値は、ノズル・リップ近傍で、実験値と一致しなくなるようである。PRANDTL-MEYER角が約 0.6° に相当する、圧力比が2の場合は著者らの計算値は実験値と合わない。もっとも、 $\theta_N=15^\circ$ の場合は、 ν_e が0.6というかなり小さな値であるにもかかわらず、特性曲線法を併用したものとすれば、かなりよく一致していると言えよう。 ν_e が極端に小さい場合は、特性曲線法を適用すれば誤差が増大することは、すでによく知られている。前述のCLINEの方法は、 ν_e が小さい場合について、噴流境界幅を一定と仮定して、差分法としては画期的短時間で、 $\theta_N=15^\circ$ の場合について、実験値とよく一致する音速線を得ており³⁾、彼の方法が一般の不足膨張噴流に適用できないにしても、 ν_e が小さい場合の計算方法としては注目値しよう。また θ_N が 90° に近い場合も、ノズル外部の計算については、計算時間が長くなることを除いて特別な困難はないが、ノズル内部の軸速度分布の計算が、本論文で使用した式のままでは不都合であり、修正を必要とするが、 θ_N が 60° 以上の極端に大きい角度は実用に供される例も少ないからここでは省略している。

要約すれば、著者らの方法はとくに ν_e が $(\theta_N + 40)/2$ より大きく、かつ衝撃波のマッハ反射が起こらぬ場合に、もっとも簡単に精度よく計算できる方法である

第1表 計算方法の比較

著者ら	BROWN & OZCAN	WEHOFER & MOGER	CLINE	THORNOCK & BROWN	HALL
方法	特性曲線法 + ベキ級数展開	時間依存差分法	時間依存差分法	ホドグラフ法	ベキ級数展開
ノズル	任意形状	任意形状	任意形状	円錐形状	円弧壁
計算の特徴	衝撃波形成位置まで	音速線まで	音速線まで	噴流境界幅を一定とし音速線まで	ノズル内部のみ
計算所要時間*	20秒	17分	140分	29秒	
電算機種種**	FACOM M190	IBM 360-65	IBM 360-65	CDC 6600	

* $\theta_N=15^\circ$, 圧力比 2 (または $\nu_e=0.6$) の場合について

** FACOM M190, CDC 6600 および IBM 360-65 の間の演算速度の比は約 20:3:1 のオーダーである。

第14図 噴流境界の実験値と計算値との比較
 (a) $\theta_N=15^\circ$, $\nu_e=9^\circ$ の場合, (b) $\theta_N=30^\circ$, $\nu_e=9^\circ$ の場合, (c) $\theta_N=45^\circ$, $\nu_e=9^\circ$ の場合

と言える。とくに音速線の計算に限れば、たとえマッハ反射が起こっても、音速線の形状は変わらないわけだから、實際上重要となる大圧力比の場合の音速線を求める計算に、手軽な方法として用いることができよう。なお付言すれば、 θ_N が 75° 以上とか ν_e が 0.1° 以下の場合などは、軸速度分布についても非線形性が著しくなり、(12) 式だけでは不十分となるものと考えられ、その点を改善することにより、精度をよくする可能性はあるが、計算所要時間はそれだけ増大するであろう。他の計算方式の特徴との比較を簡単にまとめて第1表に掲げる。計算所要時間は $\theta_N=15^\circ$, 圧力比 2 の場合についてである。

さらに第14図は、第10図に示した計算結果を、シュリーレン写真にプロットしたもので、噴流境界の計算値の妥当性を明示する。なお、実験値は、 $P_0=2.3$ atg の場合である。

最後に、 $\theta_N=0\sim 75^\circ$, $P_0=1.5\sim 2.5$ atg の場合の衝撃波形成位置をシュリーレン写真から求めたものとその計算値との比較を第15図に示す。良好な一致が見られる。なお、同図には、噴流境界上の位置のみを示す。

第15図 衝撃波形成位置の実験値と計算値との比較
 圧力はゲージ値

5. 結 論

著者らは先に、二次元不足膨張噴流の計算方法を発表し、実験結果との良好な一致があることを示したが、本計算方式は軸速度分布を与える方程式も含めて、若干の変更により軸対称噴流にも適用でき、数値的に得られた軸対称噴流についての解析結果は、実験結果と良好な一致を与えることがわかった。とくに、 $v_e \geq (\theta_N + \Delta\theta)/2$ の場合、著者らの音速線の計算値は実験値や信頼できる計算値ともほとんど完全に一致した。

著者らの開発した方法の特徴は、同一の基礎方程式を一貫して適用し、任意形状のノズル内部から音速線を経て、衝撃波形成位置まで直接法で計算できることであり、初期条件として、圧力比に応じたノズル流入部の条件のみを扱えばよいからわかりやすく簡単である。また、音速線の正則条件を明確に表現し、一意的な解が得られる。

なお、軸対称噴流は二次元噴流と比較して、次のような性質があることが定量的に確認された。

- ① 噴流境界幅が狭い。
- ② 出口軸速度が低く速度勾配は急になる。
- ③ 音速線はほとんど変わらないが若干上流に位置する。
- ④ 衝撃波形成位置 S_b は大略 $2/3$ となり、大幅に短い。また、 θ_N が約 45° で S_b が最大となり、 v_e が増加すると最大値をとる θ_N の値は小さくなるが、二次元の場合よりその変化は緩やかである。
- ⑤ 二次元の場合、 $v_e/2$ に相当する圧力比が臨界的な値となるが、軸対称の場合には $(v_e + \Delta\theta)/2$ (ただし、 $\Delta\theta > 0$) に相当する圧力比が臨界的意味をもつ。

参 考 文 献

- 1) 林 正徳, 瀬戸邦聰: 二次元不足膨張噴流に関する研究, 日本航空宇宙学会誌, 第29巻, 第331号(1981), pp. 424-432.
- 2) THORNOCK, R. L. and BROWN, E. F.: An Experimental Study of Compressible Flow through Convergent-Conical Nozzles, Including a Comparison with Theoretical Results, Trans. ASME, Ser. D, Vol. 94, No. 4 (1972), pp. 926-932.
- 3) CLINE, M. C.: Computation of Steady Nozzle Flow by a Time-Dependent Method, AIAA J., Vol. 12, No. 4 (1974), pp. 419-420.
- 4) WEHOFER, S. and MOGER, W. C.: Transonic Flow in Conical Convergent and Convergent-Divergent Nozzles with Nonuniform Inlet Conditions, AIAA Paper, No. 70-635 (1970).
- 5) BROWN, E. F. and OZCAN, H. M.: A Time-Dependent Solution of Mixed Flow through Convergent Nozzles, AIAA Paper, No. 72-680 (1972).

- 6) LOVE, E. S., GRIGSBY, C. E., LEE, L. P. and WOODLING, M. J.: Experimental and Theoretical Studies of Axisymmetric Free Jets, NASA TR-R-6 (1959).
- 7) OSWATITSCH, K. and ROTHSTEIN, W.: Flow Pattern in a Converging-Diverging Nozzle, NACA TM 1215 (1949).
- 8) McCABE, A.: Design of a Supersonic Nozzle, A. R. C. R. & M 3440 (1964).
- 9) MEYER, R. E.: The Method of Characteristics for Problems of Compressible Flow Involving Two Independent Variables, Q. J. Mech. Appl. Math., Vol. 1 (1948), pp. 196-219.

付録 A. (10) 式の導出

u と v^2 の関数 α を次式で定義する。

$$\alpha(u, v^2) = \{(\kappa+1)/2\}^{1/(\kappa-1)} u \{1 - \lambda(u^2 + v^2)\}^{1/(\kappa-1)} \quad (A. 1)$$

上式を $(a_0, 0)$ のまわりに TAYLOR 級数展開し、2次の項まで取ると次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \alpha(u, v^2) = & \beta_0 + \beta_0'(u - a_0) + (\beta_0'' - \beta_0'/a_0)v^2/(2a_0) \\ & + \beta_0'''(u - a_0)^2/2 + (\beta_0'''' - 2\beta_0'''/a_0 \\ & + 2\beta_0''/a_0^2)(u - a_0)v^2/2a_0 + (\beta_0'''' - 3\beta_0'''/a_0 \\ & + 3\beta_0''/a_0^2)v^4/(8a_0^2) \end{aligned} \quad (A. 2)$$

ただし

$$\beta(u) \equiv \{(\kappa+1)/2\}^{1/(\kappa-1)} u (1 - \lambda u^2)^{1/(\kappa-1)} \quad (A. 3)$$

であり、 $\beta_0 = \beta(a_0)$ それに $(\quad)'$ はここでは u に関する微分を意味する。

流量条件は

$$2 \int_0^h \alpha(u, v^2) y dy = W = \text{一定} \quad (A. 4)$$

で与えられるから、上式に本文(4)および(5)式を代入して積分する。

計算はかなり煩雑となるから大きな項を残した結果を示すにとどめる。

$$W = h^2(\beta_0 + c_1\beta_0' + c_1^2\beta_0''/2 + \Delta c\beta_0'') \quad (A. 5)$$

ただし

$$\begin{aligned} c_1 = & a_2 h^2(1 - h'^2/6)/4 + a_4 h^4/72 + h'(b_1 h \\ & + a_0' h/2)(1/4 - h'^2/8) + b_3 h^3 h'(1/18 \\ & - h'^2/4)/4 \end{aligned} \quad (A. 6)$$

$$\begin{aligned} \Delta c = & (a_2 h^2)^2/96 + a_2 b_1 b_3 h^6/144 a_0 + b_1^2 a_4 h^6/192 a_0 \\ & + a_2 a_4 h^7/576 - a_4^2 h^8/10368 + h' \{a_2 b_1 h^3(1/2 \\ & + a_2 h^2/a_0 + a_4 h^4/24 a_0)/24 - a_2 h^3 a_0'/32 \\ & - a_2 b_3 h^5/288 - (b_1 + a_0'/2) a_4 h^5/288 \\ & - b_3 a_4 h^7/5184\} + h'^2 \{a_2^2 h^4/96 - b_1 h^2/32 \\ & - b_3^2 h^6/10368 + a_4 h^5(b_1 + a_0'/2)/576 \\ & - b_3 h^4(b_1 + a_0'/2)/16 + a_2 a_4 h^6/1728\} \\ & + h'^3 \{a_2 h^3(b_1 + a_0'/2)/24 + 7 a_2 b_3 h^5/432 \\ & + b_3 a_4 h^7/1152\} + h'^4 \{-a_2^2 h^4/1152 + h^2(b_1 \\ & + a_0'/2)/32 + b_3^2 h^6/1152 + b_3 h^4(b_1 \end{aligned}$$

$$+a_0'/2/32\} + h'^5\{-a_2h^3(b_1+a_0'/2)/192 \\ -a_2b_3h^5/384\} + h'^6\{-(b_1+a_0'/2)h^2/128 \\ -b_3^2h^6/512\} \quad (A.7)$$

ただし, $h, 'a_0', a_0''$ 等の上にある (') はすべて x による微分を表わす。

一方

$$\beta(a_0+c_1)=\beta_0+c_1\beta_0'+c_1^2\beta_0''/2+\cdots \quad (A.8)$$

であり, 本文(11)式と(A.4)式を考慮して

$$\beta(u_1)h^2=W \quad (A.9)$$

が成立するから

$$u_1 \approx a_0 + c_1 \quad (A.10)$$

の関係式が得られる。 Δc は微小量であり, 上式は $c_1 \ll a_0$ であれば, たいへんよい近似であると考えられる。

(A.10) から容易に本文(10)式が導かれる。なお, (A.8)の…は高次の微小項を表わす。

— 論 文 —

2次元遷音速タービン翼列の性能に関する研究*

Studies on the Performance Characteristics of the 2-D Transonic Turbine Cascades

永山 猛彦**・倉元 靖夫**
Takehiko NAGAYAMA, Yasuo KURAMOTO
今泉 全通**
and Masamichi IMAIZUMI

Abstract

The effect of the aerofoil suction side curvatures on the 2-D transonic turbine cascade performances is investigated by the numerical and the experimental methods. The Modified FLIC method is used to predict the cascade flows. The experiments are conducted in the wide range of the exit Mach number $M_{2ch}=0.5$ to 2.0 by the optical and the wake traverse methods using the suction-type shock tunnel and the blow-down type wind tunnel.

The characteristics of the flow patterns around these four kinds of aerofoil sections are clarified and it is shown that the relation between energy loss and its exit Mach number clearly depends on their suction side curvatures.

1. ま え が き

タービン翼の翼形は, 一般によく知られているように圧縮機用翼形と異なり, 翼厚の薄いものから厚いものまで, また反り角は小なるものから大なるものまで多種多様である。さらに作動状況も, 2次元タービン翼列の出口の流速は非圧縮性流れとみなしうる低マッハ数の場合から, 2.0を越す高マッハ数流れの場合まで存在する。タービン用翼形に関し, 従来より多くの研究がなされてきたが, 近年ではとくに翼列の入口が

亜音速, 出口が超音速流れとなる場合の翼形に関する研究が増加している。このようなタービン翼形を, 以下本論文では遷音速翼形とよぶことにする。遷音速翼形は, たとえばラバールノズルのようにのど部より下流側の背面形状を凹に設計すれば, 高出口マッハ数領域で良好な性能を有するといわれている。またこのように, のど部以降の背面形状が, タービン翼列性能に大きな影響を与えるとみられる。一方, タービンによっては常に設計点のみで作動するばかりでなく, 広範囲な作動域で運転されることも多い。したがって, たんに高出口マッハ数領域のみならず, 低出口マッハ数領域をも含め, かかる翼形がどのような空力性能を有するかは, 設計上重要な課題である。

これまでの翼形背面形状に着目した遷音速翼形性能に関する代表的な例として, FORSTER¹⁾, CURTIS²⁾, DEMUREN³⁾ および SIEVERDING⁴⁾ らの研究がある。FORSTER は, 反りの比較的大きい翼形で, 背面形状が凸となったもの, 直線となったものについて, 特性曲線法による計算と出口マッハ数が1.3くらいまでの翼列風洞実験をおこなっている。CURTIS および SIEVERDING らは, 蒸気タービンの反りの小さい動翼先端翼形に対し, また DEMUREN らは, ガスタービンの反りの大きい空冷翼形に対し, それぞれ背面形状が凹と直線の場合について理論解析と実験をおこなっている。しかし, これらの研究結果では, 翼形背面の曲率をどの程度変えれば, 性能にどの程度影響を与える

* 昭和56年11月19日, 日本航空宇宙学会西部支部講演会にて発表, 昭和56年9月24日原稿受理

** 三菱重工業(株)長崎研究所