- 21) KOGAN, M. N.: On the Equation of Motion of a Rarefied Gas, *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 22, No. 4 (1958), pp. 597-607.
- 22) ONISHI, Y. and SONE, Y.: Kinetic Theory of Slightly Strong Evaporation and Condensation—Hydrodynamic Equation and Slip Boundary Condition for Finite REYNOLDS Number—, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 47, No. 5 (1979), pp. 1676-1685.
- 23) ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York (1968), pp. 1001-1003.
- 24) PAO, Y. P.: Some Boundary Value Problems in the Kinetic Theory of Gases, *Phys. Fluids*, Vol. 14, No. 11 (1971), pp. 2285-2290.
- 25) SONE, Y. and YAMAMOTO, K.: Flow of Rarefied Gas through a Circular Pipe, *Phys. Fluids*, Vol. 11, No. 8 (1968), pp. 1672-1678.
- 26) 曾根良夫, 青木一生, 大西善元: 希薄気体の熱応力流と境界条件, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第261号 (1975), pp. 568-575; *Heat Transfer Japanese Research*, Vol. 6, No. 4 (1977), pp. 1-12.
- 27) ONISHI, Y.: A Rarefied Gas Flow over a Flat Wall, *Bull. Univ. of Osaka Prefecture, Ser. A*, Vol. 22, No. 2 (1973), pp. 91-99.
- 28) 曾根良夫: 弱希薄気流中の閉じた物体に働く力に関する諸定理, 第13回流体力学講演会講演集 (1981).
- 29) SONE, Y.: Thermal Creep in Rarefied Gas, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 21 (1966), pp. 1836-1837.
- 30) SONE, Y.: Flow Induced by Thermal Stress in Rarefied Gas, *Phys. Fluids*, Vol. 15, No. 8 (1972), pp. 1418-1424.
- 31) SONE, Y. and TANAKA, S.: Thermal Stress Slip Flow Induced in Rarefied Gas between Noncoaxial Circular Cylinders, in *Theoretical and Applied Mechanics* (F. P. J. RIMROTT and B. TABARROK, eds.), North-Holland Publishing, Amsterdam (1980), pp. 405-416.
- 32) SONE, Y.: Rarefied Gas Flow Induced between Non-parallel Plane Walls with Different Temperatures, in *Rarefied Gas Dynamics* (M. BECKER and M. FIEBIG, eds.), DFVLR-Press, Porz-Wahn, Germany (1974), Vol. 2, D. 23.
- 33) SONE, Y. and AOKI, K.: Forces on a Spherical Particle, in a Slightly Rarefied Gas, *Rarefied Gas Dynamics*, in *Progress in Astronaut. Aeronaut.*, Vol. 51 (J. L. POTTER, ed.), AIAA, New York (1977), Part 1, pp. 417-433.
- 34) SONE, Y. and AOKI, K.: Thermal Force and Drag on a Volatile Particle in a Slightly Rarefied Gas, in *Rarefied Gas Dynamics* (R. CAMPARGUE, ed.), Commissariat a l'Energie Atomique, Paris (1979), Vol. 2, pp. 1207-1218.

—特 集—

気体中の微粒子に働く種々の力*

—— 一般すべり流理論の応用 ——

青 木 一 生**

1. は じ め に

微粒子を含む流体の運動を考える上で、微粒子とまわりの流体の相互作用について理解することは基本的な問題である。気体中に微粒子が含まれる場合、粒子の径が小さいと、常圧においても気体分子の平均自由行路が粒子の径に比べて無視できなくなる。この場合粒子には、低圧気体中の物体と同様に、希薄化の効果によりさまざまな力が働く。これらの現象を理論的に解明するには、BOLTZMANN 方程式をもとに粒子まわりの気体の振舞いを解析しなければならないが、BOLTZMANN 方程式の複雑さから、これは非常に厄介な問題である。しかし、KNUDSEN 数すなわち気体の平均自由行路と粒子の径の比が小さい場合に限れば、

BOLTZMANN 方程式を直接解析するかわりに、通常の流体力学を少し拡張した形で問題を取り扱うことができる^{1)~5)}。この取扱い方法は、BOLTZMANN 方程式から系統的に導出されたもので、一般すべり流理論 (generalized slip flow theory) と呼ばれる。これについては、文献6および本特集集中の文献7に詳しい解説がある。ここでは、一般すべり流理論を応用して、次の3つの基本的な問題について、単一の球状粒子に働く力とその運動を調べる。

- [A] 粒子に一樣気流が当たる場合,
- [B] 粒子が一樣な温度勾配のある気体中に置かれている場合 (熱泳動),
- [C] 一樣な気体中に置かれた粒子に一方から一樣な光が当たる場合 (光泳動)。

問題 [A] では、通常の抵抗法則が希薄化効果によってどのように修正されるかを見る。問題 [B], [C] は希薄効果特有の現象である。なお、これらの現象に関連して古くから多くの研究があるが、紙面の都合上

* 昭和56年4月7日、日本航空宇宙学会第12期年会講演会にて講演。昭和56年9月3日原稿受理 Forces on a Small Particle in a Gas—Application of the Generalized Slip Flow Theory

** 京大工学部航空工学教室 Kazuo Aoki

直接関係するもの以外には触れない。

本論に先立ち、文献7と共通の記号および同文献を参照する際の基本的な記号をまとめておく。

- L : 系の基準長 (ここでは、粒子の半径をとる),
 Lx_i : 空間の直交座標, p_0 : 基準圧力,
 T_0 : 基準温度, R : 気体定数,
 $(2RT_0)^{1/2}u_i$: 気体の速度, $p_0(1+p)$: 気体の圧力,
 $T_0(1+\tau)$: 気体の温度, $T_0(1+\tau_w)$: 境界の温度,
 l : 平均自由行程, α : 適応係数,
 k : KNUDSEN 数の程度の無次元量 $\left(k = \frac{\sqrt{\pi} l}{2L}\right)$,
 n_i : 境界の気体向き法線ベクトルの方向余弦,
 $p_0(\delta_{ij} + P_{ij})$: 応力テンソル,
 $p_0(2RT_0)^{1/2}Q_i$: 熱流ベクトル。

2. 問題の定式化

解析の基本となる仮定は、次のとおりである。

i) 気体と輻射場との直接的干渉はなく、気体の振舞いは BOLTZMANN-KROOK-WELANDER 方程式^{6),7)}に従う。

ii) a. 固体粒子の表面では、気体分子は MAXWELL 型反射条件^{6),7)}に従う。すなわち、入射分子の α 部分が拡散反射し、残りの $1-\alpha$ 部分が鏡面反射する。 $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$ は適応係数である。

b. 粒子が気体の凝縮相で、その表面で蒸発凝縮が起る場合には、粒子表面を離れる分子は表面の速度と温度およびその温度の飽和蒸気密度に基づく MAXWELL 分布に従う (蒸発凝縮の拡散反射)^{6),7)}。

iii) 系の静止平衡状態からのずれは小さく、問題を線形化できる。

iv) 粒子は一様不透明で、その内部では熱流は FOURIER の法則に従う。

仮定 i), ii), iii) により、気体の振舞いは一般すべり流理論 (線形理論) によって記述される (文献7参照)。

一般すべり流理論によれば、KNUDSEN 数が小さいときの気体の定常的振舞いは次の形で求められる (文献6,7参照)。任意の物理量 f (速度, 温度, 圧力等) は、境界近傍を除く全域での気体の振舞いを記述する HILBERT 部分と、境界近傍で HILBERT 部分を補正する KNUDSEN 層部分に分けられ、各部分は KNUDSEN 数 (k) のべき級数で表わされる。速度, 圧力, 温度の HILBERT 部分は、粘性流体の運動を支配する方程式系, すなわち連続の式, STOKES 方程式, LAPLACE 方程式に従う。これらの方程式に対する境界条件は、気体分子の境界における反射条件によって異なる。気体分子が拡散反射する場合、MAXWELL 型条件 (ただし、適応係数 α が小さく、KNUDSEN 数と同程度) に従う場合、および境界で蒸発、凝縮が起る場合の境

界条件が、文献7に示されている*。これらをすべりの境界条件と呼ぶ。KNUDSEN 層部分も上述の各反射条件によって異なるが、いずれの場合も HILBERT 部分の境界上での値と、境界の法線方向の座標の普遍関数とで表されており、HILBERT 部分が決まれば決定される。

一方、仮定 iii), iv) より、粒子内部の温度場 $T_0(1+\tilde{\tau})$ は、LAPLACE 方程式に従う。

$$\frac{\partial^2 \tilde{\tau}_m}{\partial x_j^2} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

ここで、 $\tilde{\tau}$ について k のべき級数形を仮定している：

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 + \tilde{\tau}_1 k + \tilde{\tau}_2 k^2 + \dots \quad (2)$$

結局1.の問題[A],[B],[C]は、気体を支配する連続の式, STOKES 方程式, LAPLACE 方程式 (文献7参照) と、粒子内部の温度場を支配する LAPLACE 方程式(1)を、次に示す境界条件のもとで解くことに帰着する。

[I] 問題[A],[B],[C]に応じて与えられる無限遠の条件 (速度, 圧力, 温度の HILBERT 部分に対する条件) を満たす。

[II] 粒子表面において、

a. すべりの境界条件を満たす。ただし、文献7に示された各すべりの境界条件における境界の温度 τ_w は、 $\tilde{\tau}$ の粒子表面での値になる。したがって(2)より、文献7のすべりの境界条件を、 τ_w が k のべき級数形

$$\tau_w = \tau_{w0} + \tau_{w1}k + \tau_{w2}k^2 + \dots$$

で書ける場合に拡張する必要がある。これは、問題の線形性により、容易に行える (たとえば、文献8参照)**。

b. エネルギー保存の条件を満たす。

条件[II b]を、ここで考える問題をすべて含む形に書くと、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x_i} n_i &= Q_i n_i + \zeta + \xi l_i n_i \\ &\quad + \gamma u_i n_i \quad (\text{光の当たる部分}) \\ -\frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x_i} n_i &= Q_i n_i + \zeta + \gamma u_i n_i \quad (\text{陰の部分}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$H = \frac{p_0(2RT_0)^{1/2}L}{k_s T_0}, \quad \zeta = \frac{\bar{\epsilon} \sigma T_0^4}{p_0(2RT_0)^{1/2}}$$

$$\xi = \frac{\bar{a} I_0}{p_0(2RT_0)^{1/2}} \quad (4)$$

ここに、 k_s は粒子の熱伝導係数、 $p_0(2RT_0)^{1/2}Q_i$ は

* MAXWELL 型条件で、適応係数 α があまり小さくないときの境界条件は、拡散反射の場合と同形であるが、すべり係数 (k_s, K_i 等) が α によって変化する。

** KNUDSEN 層部分も同様の変更を受ける。

輻射以外の気体中の熱流, $\sigma (=5.6697 \times 10^{-8} \text{ erg/cm}^2 \text{ K}^4 \text{ sec})$ は STEFAN-BOLTZMANN 定数, I_0 は照射光線の強度, l_i はその伝播方向の方向余弦, $\bar{\epsilon}$, $\bar{\alpha}$ はそれぞれ粒子表面の平均放射率と平均吸収能, RT_0 は温度 T_0 における蒸発熱である. Q_i の HILBERT 部分および KNUDSEN 層部分 (気体分子の境界における反射条件によって異なる) は文献7にまとめられている*. (3)の左辺, 右辺の ζ の項, ξ の項, および γ の項は, それぞれ粒子内部の熱伝導, 粒子からの輻射エネルギー流出, 入射光によるエネルギー流入, および蒸発凝縮によるエネルギー伝達の寄与を表わす. 輻射場を考えない場合 (問題 [A], [B]) には, $\zeta = \xi = 0$ と置く. 線形近似が成り立つためには, ζ, ξ が微小で, それらの2次以上の積が無視できなければならない. 粒子が固体で, 蒸発凝縮が起こらないときには, 粒子表面で $u_i n_i = 0$ が満たされるため, γ の項はない. この場合, 粒子と気体のエネルギー授受は主として熱伝導によるが, これは蒸発凝縮によるエネルギー伝達に比べて, k の1次だけ高次で小さい (Q_i が k の1次から始まることに注意). 線形問題の範囲で定常性が保たれるには, 粒子に伝わる輻射エネルギーは, 粒子と気体のエネルギー授受に見合う量でなければならないから, この場合の輻射エネルギー流は, 蒸発凝縮がある場合に比べて k の程度 [$O(k)$] だけ小さくしなければならない. したがって, 蒸発凝縮が起こらない場合には, ζ, ξ のかわりに次の $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ を用いて (3)を整理するほうが都合がよい.

$$\varepsilon = \frac{4}{5} \frac{\zeta}{k} = \frac{2\sigma T_0^3 L}{k_g}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{4}{5} \frac{\xi}{k} = \frac{\alpha I_0 L}{k_g T_0} \quad (5)$$

ここに, k_g は基準状態における気体の熱伝導係数で, BOLTZMANN-KROOK-WELANDER 方程式では $k_g = (5\sqrt{\pi}/4) R p_0 (2RT_0)^{-1/2}$ である. さらに, この場合には (4) の H のかわりに, 気体と粒子の熱伝導係数の比 K ,

$$K = \frac{k_g}{k_s} = \frac{5}{4} H k \quad (6)$$

を導入するのが便利である. K が1程度のとき, H は $1/k$ 程度で大きい. K が k の程度のとき, H は1程度である. なお, 蒸発凝縮が起こる場合の (3) は, 粒子の内部エネルギーが温度だけの関数であるか, 粒子内部の応力に対する表面張力の寄与が p_0 に比べて無視できる場合に成り立つ.

上記の境界条件 [I], [IIa, b] を満たす基礎方程式系の解 (気体の速度, 圧力, 温度の HILBERT 部分および粒子内部の温度) が求まれば, 粒子に働く力が

計算できる (無次元応力テンソル P_{ij} の KNUDSEN 層部分 P_{ijK} は, 粒子に働く力には寄与しない). HILBERT 部分 P_{ijH} の公式については文献7参照). 球状粒子に対するこれらの解析は容易であるので省略し, 以下では粒子に働く力の結果を中心に考察する.

3. 抗 力

半径 L の球状粒子が一樣な気体の流れ [速度 $U_i = (U, 0, 0)$, 温度 T_0 , 圧力 p_0] の中に置かれている場合を考える. 拡散反射条件のもとで, 粒子に働く力 (抗力) F_{1D} を求めると次のようになる⁹⁾.

$$\frac{F_{1D}}{6\pi\mu UL} = 1 + k_0 k + \left\{ A_D + C_D \frac{K}{2K+1} \right\} k^2 \quad (7)$$

$$F_{2D} = F_{3D} = 0$$

$$k_0 = -1.01619, \quad A_D = 0.50000, \quad C_D = 0.23490$$

ここに, μ は基準状態における気体の粘性係数で, BOLTZMANN-KROOK-WELANDER 方程式では $\mu = (\sqrt{\pi}/2) p_0 (2RT_0)^{-1/2}$ である. (7)は, 気体と粒子の熱伝導係数の比 K [(6)] で整理してある. (7)の第1項は STOKES の抵抗である. 希薄化の第1次補正 [$O(k)$ の項] は K に依存しない. (7)を k の関数として第1図に示す. 第1図で, 点線は (7)の最初の2項の和である. さらに, 小円は空気中の油滴に対する MILLIKAN の実験結果^{10), 11)}, 三角は粒子が気体と同じ一様温度に保たれている場合の変分法による近似計算の結果¹²⁾を示す.

希薄化の第1次補正までを考える限り, (7)の k_0 を第2図の k_0^* [文献13, ただし, k_0^* (本論文) = $-\kappa_s$ (文献13)] に置き換えることにより, MAXWELL 型条件 [ただし, 適応係数 α が $O(k)$ ほどには小さく

第1図 抗 力

* これらの表式は, τ_w が k のべき級数で表わされる場合にも変更を受けない.

第2図 せん断すべり係数

ない] に対する結果が得られる。MAXWELL 型条件で、 α が小さく $\alpha=O(k)$ のとき、抗力 F_{1D} を (k の1次まで) 求めると^{5)*},

$$\frac{F_{1D}}{6\pi\mu UL} = \frac{A+2\sqrt{\pi}}{A+3\sqrt{\pi}} + \beta^* \left(\frac{A}{A+3\sqrt{\pi}} \right)^2 k \quad (8)$$

$$F_{2D}=F_{3D}=0$$

$$A=\alpha/k$$

$$\beta^*=0.60518$$

(8)は、 α の小さい値での抗力の急激な変化を表わしている。 $A=O(1/k)$ のとき、(8)は(7) [ただし、 k_0 を k_0^* に置き換え、 $O(k)$ まで取ったもの] に移行する (文献5参照)。鏡面反射の場合 ($\alpha=0$, したがって $A=0$) には、(8)の第1項は STOKES の抵抗の $2/3$ になる³⁾。(7) (k_0 を k_0^* に置き換えたもの) と(8)より、 α が有限値から減少するにつれて、 $O(k)$ の項の一部が増大し、 $\alpha \leq k$ で1程度になることがわかる。

粒子が気体の凝縮相で、その表面で蒸発凝縮が起こる場合について、粒子に働く抗力 $\bar{F}_{1D}$ を (k の1次まで) 求めると¹⁴⁾,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{F}_{1D}}{6\pi\mu UL} &= 1 - M_D k \\ \bar{F}_{2D} &= \bar{F}_{3D} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$M_D = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2 H - C_4^*} - k_0, \quad C_4^* = -2.13204$$

結果は $\bar{H}[(4)]$ で整理してある。 M_D を H の関数として第3図に示す。 K が1程度のときには、 $H \rightarrow \infty$ すなわち $M_D = -k_0$ と置けばよい。このとき(10)は (k の1次までは) 蒸発凝縮を考えないときの(7)に一致する。 H が1程度、すなわち K が k 程度で小さいとき、抗力は(7)より小さくなる。

第3図 M_D [全曲線は $H \rightarrow \infty$ のとき、 $-k_0 (=1.0162)$ に近づく]

4. 熱流力と熱泳動

微粒子が温度勾配のある気体中に置かれているとき、粒子のまわりに流れが誘起され、粒子には力が働く。この力を熱流力 (thermal force) と呼ぶ。ここでは、半径 L の球状粒子が、一様な温度勾配をもつ静止した気体 [温度勾配 $(\frac{\partial T}{\partial X_i})_\infty = ((\frac{\partial T}{\partial X_1})_\infty, 0, 0)$, 圧力 p_0] 中にある場合を考える。拡散反射条件のもとで、粒子に働く熱流力 F_{1T} を求めると^{8), 15)},

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{1T}}{(2RT_0)^{-1/2} L^2 k_g (\partial T / \partial X_1)_\infty} \\ = \frac{16\pi}{5} \left(3K_1 \frac{K}{2K+1} - 2Mk \right) k \\ F_{2T} = F_{3T} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$M = -\frac{3}{2} \frac{K}{2K+1} \left[A_T + \left(\frac{1}{K} - 1 \right) e - 3 \left(D_T - \frac{1}{K} E_T \right) \frac{K}{2K+1} \right]$$

$$K_1 = -0.38316, \quad e = 0.27922, \quad A_T = 0.93551,$$

$$D_T = 0.08492, \quad E_T = 0.33277.$$

(11)は、気体と粒子の熱伝導係数の比 K で整理してある。線形問題であるので、基準温度 T_0 として、粒子の近くの任意の点の温度をとればよい。(11)を k の関数として第4図に示す。熱流力は、希薄化効果を考えないとき ($k=0$) には零になる。さらに、それは K に大きく依存し、 $K \sim 1$ のときと $K \ll 1$ のときで力の方向が逆になる。これは、次に述べるように、力の原因となる流れの場が K によって異なることによる。 $K \sim 1$ では気体中の温度勾配によって粒子表面にも同程度の温度勾配が生じる。このため、粒子表面に沿って低温部から高温部に向かう熱はふく流 (thermal creep flow)^{16), 6)} が誘起され、粒子には温度勾配とは逆向き

* 文献5では、(8)は一様温度の粒子に対して導かれたが、 k の1次の項までは粒子内部の温度分布に依存しない。

第4図 熱 流 力

第5図 球状粒子のまわりに誘起される流れ
(a) $K \sim 1$ (熱はふく流),
(b) $K \sim 0$ (熱応力すべり流)

の力が働く (第5図(a)). 一方, $K \sim 0$, すなわち, 粒子の熱伝導性が非常によいときには, 粒子の温度はほとんど一様であり, 熱はふく流は無視できる. しかし, 希薄化のさらに高次の効果である熱応力すべり流 (thermal stress slip flow) が高温部から低温部に向かって誘起され, 粒子には温度勾配方向の力が働く (第5図(b)). 熱応力すべり流は, 曽根によって見いだされたもので^{2), 17)}, その物理的説明は文献 6, 17 に詳しい. $K=0$ のとき, (11)は熱応力すべり流による項だけになる:

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{1T}}{(2RT_0)^{-1/2} L^2 k_g (\partial T / \partial X_1)_\infty} &= \frac{48\pi}{5} e k^2 \\ F_{2T} = F_{3T} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

このとき, 粒子の温度は一様で, ある値に定まる. 粒子が任意に指定した一様温度に保たれている場合¹⁷⁾には, $K=0$ のときの場合に中心対称な場を重ね合わせる

だけでよいから, 熱流力としては(12)がそのまま適用できる.

粒子を気体中に放置しておくと, 熱流力によってその方向に運動する. この現象を熱泳動 (thermophoresis) という. とくに, 粒子の運動が, 温度勾配とは逆方向 (熱流の方向) の場合を正の熱泳動, 温度勾配方向の場合を負の熱泳動と呼ぶ. 粒子の定常運動の速度 V_{1T} は, (7)と(11)から定常性に関する多少の議論 (文献 8 参照) を経て,

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_{1T}}{(2RT_0)^{-1/2} L (k_g / \mu) (\partial T / \partial X_1)_\infty} \\ = \frac{8}{5} \left[K_1 \frac{K}{2K+1} - \left(\frac{2}{3} M + k_0 K_1 \frac{K}{2K+1} \right) k \right] \\ V_{2T} = V_{3T} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

文献 18, 19 によれば, 拡散反射条件のもとで, $k \rightarrow \infty$ (自由分子流) のときの熱流力は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{1T}}{(2RT_0)^{-1/2} L^2 k_g (\partial T / \partial X_1)_\infty} &= -\frac{16\sqrt{\pi}}{15} \\ F_{2T} = F_{3T} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14)は K に依存せず, 温度勾配とは逆向きである. したがって, $K \sim 0$ のときには k の大小によって力の方向が逆になる. 換言すれば, 熱伝導性のよい粒子では, 非常に小さいものには, 温度勾配とは逆向きの力が働くが (正の熱泳動), ある程度以上大きいものには, 温度勾配方向の力が働く (負の熱泳動).

MAXWELL 型境界条件 (ただし, α はあまり小さくない) に対して, (11)の第1項および(12)を拡張するには, 次のようにすればよい. (11)では, K_1 を第6図の K_1^* [文献 13, ただし K_1^* (本論文) $= -(1/2)\kappa_T$ (文献 13)] に, (12)では e を第7図の e^* (文献 20) に置き換える. したがって, α が減少するにつれて, $K \sim 1$ のときの正の熱泳動はやや弱まり, $K=0$ での

第6図 熱はふくすべり係数

第7図 熱応力すべり係数

負の熱泳動は顕著になる。

$K=0$ に対して, MAXWELL 型条件で α が小さい $[O(k)]$ ときの熱流力を (k の1次まで) 求めると⁵⁾,

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{1T}}{(2RT_0)^{-1/2} L^2 k_B (\partial T / \partial X_1)} &= \\ &= 6\pi^{3/2} \frac{A - 4\sqrt{\pi}}{(A + 3\sqrt{\pi})(2A + 5\sqrt{\pi})} k \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$F_{2T} = F_{3T} = 0$$

この場合, (12)とは異なり, 熱流力は k の1次から始まる。鏡面反射の場合 ($\alpha=0$ すなわち, $A=0$) には, (15)は温度勾配とは逆向きの力 (正の熱泳動) を示す³⁾。 (15)が, (12) (e を e^* に置き換えたもの) につながるには, もう1次近似を高める必要があるが, 両式から, α の狭い範囲で起こる熱流力の急激な変化の様子がわかる。

粒子が気体の凝縮相で, その表面で蒸発凝縮が起こる場合の熱流力 $\bar{F}_{1T}$ を (k の1次まで) 求めると¹⁴⁾,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{F}_{1T}}{(2RT_0)^{-1/2} L^2 k_B (\partial T / \partial X_1)} &= -\frac{6\pi}{5} M_T k \\ \bar{F}_{2T} &= \bar{F}_{3T} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$M_T = \frac{5\gamma H + 4C_1}{\gamma^2 H - C_1}, \quad C_1 = 0.55844$$

M_T を H の関数として第8図に示す。 (16)で, K が1程度のときは $H \rightarrow \infty$ すなわち $M_T = 5/\gamma$, $K=0$ のときは $H=0$ と置けばよい。熱流力(16)は, 常に k の1次から始まり, 常に温度勾配とは逆向き (正の熱泳動) で, K が小さくない限り, K に依存しない。これらの特徴は, 蒸発凝縮が起こらない場合の(11)とは対照的である。 (16)の原因となるのは, 熱はふく流ではなく, 高温側に面した表面での蒸発と低温側に面した部分での凝縮による速度場である (第9図, 実際の速度場は, これに一樣な蒸発または凝縮による球対称速度場を重ね合わせたものになる)。

以上, 一般すべり流理論をもとに, 粒子に働く熱流

第8図 M_T [各曲線は, $H \rightarrow \infty$ のとき $5/\gamma$ に近づく。 $\gamma = -5C_1^*/(4C_1) (=4.7723)$ のとき, 直線になる]

第9図 蒸発凝縮による速度場

力について見てきた。とくに, 表面で蒸発凝縮が起こらない粒子については, 粒子の熱伝導性が高い場合に, KNUDSEN 数のある範囲で負の熱泳動が起こることが明らかになった。ここで, 他の研究結果に触れておく。従来の研究は, 一, 二を除いて, すべて蒸発凝縮を考えないものである。KNUDSEN 数が小さい場合の, 熱流力の理論的研究は, 古典的すべり流理論に基づく EPSTEIN の研究²¹⁾に始まる。一般すべり流理論によれば, 古典的すべり流理論は KNUDSEN 数の1次まで実質的に正しい。したがって, 熱流力に対する EPSTEIN の結果は, (11)の第1項 $[O(k)]$ のみをとったものに対応する。このため, $K=0$ のとき力は零になり, 負の熱泳動は現れない。その後, ROSENBLATT と LAMER²²⁾を始めとして, エアゾル粒子による実験が行われた (たとえば, 文献 23, 24)。これらの実験によると, 熱流力は, 粒子の熱伝導性が低い場合 ($K \sim 1$) には EPSTEIN の結果に比較的良好一致したが, 粒子の熱伝導性にはあまり依存せず, それが低い場合 ($K \sim 0$) でも温度勾配とは逆向き (正の熱泳動) であった²³⁾。これは, 一般すべり流理論による結果(11)と大きく食い違うが, K 依存性が小さい点では EPSTEIN の結果とも矛盾する。実験と EPSTEIN 理論の不一致が原因となって熱泳動の研究

* $\alpha=0$ のとき, 気体の状態は粒子内部の温度分布に依らないため, (15)は $K \neq 0$ の場合にも成り立つ。

第10図 熱流力 ($K=0$)

が再開され、現在までさまざまな理論的 (たとえば文献 25~31)、実験的 (たとえば文献 32~35) 研究が行われている。

理論的研究のうち、負の熱泳動は文献 27, 28, 30, 31 においても認められている。文献 27 は 13 モーメント法による解析、文献 28 は BOLTZMANN 方程式の数値計算 (自由分子流からの反復計算)、文献 30 は KNUDSEN 層に非平衡熱力学を適用したものである。文献 31 は、BOLTZMANN-KROOK-WELANDER 方程式を直接漸近解析し、(12) に対して高次の希薄化補正 [$O(k^3)$] を行ったもので、その結果を次に示す。 $K=0$ のとき、拡散反射条件のもとでは、粒子に働く熱流力 F_{1T} は、

$$\frac{F_{1T}}{(2RT_0)^{-1/2} L^2 k_g (\partial T / \partial X_1)_\infty} = \frac{48\pi}{5} (e - h k) k^2 \quad (17)$$

$$F_{2T} = F_{3T} = 0$$

$$h = 0.3498$$

(17) を第 10 図に示す。点線は第 1 項のみをとったもの、すなわち (12) である。(17) の k^3 の項は、負の熱泳動を弱めるが、 k が小さいときにはその効果は小さい。

一方、上述の実験的研究においては、負の熱泳動は検出されていない。しかし、これらの実験結果の間には、実験方法や装置の規模により、相当なばらつきがある。この事実は、実験において理論で扱う理想的な状況の実現がかなり困難なことを示している。実験装置固有の流れ (自然対流など)、粒子表面での蒸発凝縮効果 (多成分系)、気体分子の反射条件など、理論と実験の不一致を解決するために検討すべき点は多い (文献 31 参照)。

5. 光 泳 動

気体中を浮遊する微粒子に一方から光が当たると、粒子には力が働き、その方向に運動する。この現

第11図 光泳動力

象を光泳動 (photophoresis)、粒子に働く力を光泳動力 (photophoretic force) と呼ぶ。ここでは、一様な静止気体 (温度 T_0 、圧力 p_0) 中に置かれた半径 L の球状粒子に、強さ I_0 の光が負の x_1 方向 [したがって、 $l_i = (-1, 0, 0)$] に照射されている場合を考える。拡散反射条件のもとで、粒子に働く光泳動力 F_{1P} を求めると^{21, 36)}、

$$\frac{F_{1P}}{(2RT_0)^{-1/2} a I_0 L^2} = \frac{8\pi}{5} \frac{K}{2K+1} \left[K_1 + \left(A_P + B_P \frac{K}{2K+1} \right) k \right] k$$

$$F_{2P} = F_{3P} = 0 \quad (18)$$

$$A_P = 0.097855, \quad B_P = -2.25136$$

(18) を k の関数として第 11 図に示す。粒子は常に光源から遠ざかる方向に力を受ける。この力は主として、粒子が光によって不均一に温められるため、粒子表面に沿って光源方向に向かう熱ふく流が誘起されることによる。熱流力 (11) とは異なり、(18) は $K=0$ で零になる。これは、この場合粒子の温度が一様になり、まわりの温度場が球対称となるため、熱ふく流、熱応力すべり流が誘起されないからである。

粒子が気体中を浮遊している場合の定常的な光泳動の速度 V_{1P} は、(7)、(18) よりただちに、

$$\frac{V_{1P}}{(2RT_0)^{-1/2} a I_0 \mu^{-1} L} = \frac{4}{15} \frac{K}{2K+1} \left[K_1 + \left(A_P - k_0 K_1 + B_P \frac{K}{2K+1} \right) k \right] k$$

$$V_{2P} = V_{3P} = 0 \quad (19)$$

k の 1 次までを考える限り、(18) を MAXWELL 型条件 (ただし、 α はあまり小さくない) の場合に拡張するには、 K_1 を第 6 図の K_1^* に置き換えればよい。熱流力とは異なり、鏡面反射の場合 ($\alpha=0$) には、光泳動力は働かない。これは、光によって粒子が温められても、粒子から気体への熱伝達がないため、もとも

第12図 (a) M_F (各曲線は, $H \rightarrow \infty$ のとき $1/r$ に近づく), (b) $M_F N_F$

と一様な気体が粒子によって乱されないからである。
粒子が気体の凝縮相で, 表面で蒸発凝縮が起こる場合の光泳動力 $\tilde{F}_{1P}$ は次のようになる³⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{F}_{1P}}{4\pi\mu L p_0^{-1} (2RT_0)^{-1/2} a I_0 L^2 k} &= \frac{\tilde{F}_{1P}}{-\pi M_F (1 + N_F k)} \\ \tilde{F}_{2P} = \tilde{F}_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$M_F = \frac{\gamma H}{\gamma^2 H - C_4^*}$$

$$\begin{aligned} N_F = & -2 \left\{ \left(K_1 + \frac{5}{4} \frac{1}{\gamma} \right) \left(d_4^* - \frac{C_4^*}{\gamma} \right) + A_F^* \right. \\ & \left. + \frac{1}{\gamma^2 H - C_4^*} \left[\left(C_1 + \frac{5}{4} \frac{C_4^*}{\gamma} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(d_4^* - \frac{C_4^*}{\gamma} \right) + B_F^* \right] \right\} \end{aligned}$$

$$d_4^* = -0.44675, \quad A_F^* = -0.72910,$$

$$B_F^* = 1.51114$$

M_F , $M_F N_F$ を H の関数として第12図(a), (b)に示す。2.で述べたように, 蒸発凝縮が起こる場合には, それが起こらない場合に比べて $O(1/k)$ だけ強い光を照射することができる。このため, (20)の無次元化は蒸発凝縮を考えない場合の(18)と異なっている。

(20)は, 常に光源から遠ざかる方向の力を示す。この力の主因は, 光の当たる側で強く起こる蒸発による速度場である。 $K=0$ すなわち $H=0$ のときには, 粒子は一様に温められ, 蒸発による速度場および粒子まわりの温度場が球対称になるため, 粒子には力は働かない。

参考文献

- 1) SONE, Y.: Asymptotic Theory of Flow of Rarefied Gas over a Smooth Boundary I, in Rarefied Gas Dynamics (L. TRILLING and H. Y. WACHMAN, eds.), Academic Press, New York (1969), pp. 243-253.
- 2) SONE, Y.: Asymptotic Theory of Flow of Rarefied Gas over a Smooth Boundary II, in Rarefied Gas Dynamics (D. DINI, ed.), Editrice Tecnica Scientifica, Pisa (1971), pp. 737-749.
- 3) SONE, Y. and AOKI, K.: Slightly Rarefied Gas Flow over a Specularly Reflecting Body, Phys. Fluids, Vol. 20, No. 4 (1977), pp. 571-576.
- 4) SONE, Y. and ONISHI, Y.: Kinetic Theory of Evaporation and Condensation—Hydrodynamic Equation and Slip Boundary Condition, J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 44, No. 6 (1978), pp. 1981-1994.
- 5) AOKI, K., INAMURO, T. and ONISHI, Y.: Slightly Rarefied Gas Flow over a Body with Small Accommodation Coefficient, J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 47, No. 2 (1979), pp. 663-671.
- 6) 曾根良夫: 希薄気体力学, 流体力学の展望, 第3号, 流体力学懇談会(現 日本流体力学会) (1979), pp. 45-75.
- 7) 曾根良夫: 小さい系の気体力学, 日本航空宇宙学会誌, 第30巻, 第342号 (1982), pp. 408-416.
- 8) SONE, Y. and AOKI, K.: Forces on a Spherical Particle in a Slightly Rarefied Gas, in Rarefied Gas Dynamics, Progress in Astronaut. Aeronaut., Vol. 51 (J. L. PORTER, ed.), AIAA, New York (1977), pp. 417-433.
- 9) 曾根良夫: 弱希薄気流中の閉じた物体に働く力に関する諸定理, 第13回流体力学講演会講演集 (1981).
- 10) MILLIKAN, R. A.: The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of Its Charge, and the Correction of Stokes's Law, Physical Review, Vol. 32 (1911), pp. 349-397.
- 11) MILLIKAN, R. A.: The General Law of Fall of a Small Spherical Body through a Gas, and Its Bearing upon the Nature of Molecular Reflection from Surfaces, Physical Review, 2nd Ser., Vol. 22 (1923), pp. 1-23.
- 12) CERCIGNANI, C., PAGANI, C. D. and BASSANINI, P.: Flow of a Rarefied Gas past an Axisymmetric Body, II. Case of a Sphere, Phys. Fluids, Vol. 11, No. 7 (1968), pp. 1399-1403.
- 13) ONISHI, Y.: A Rarefied Gas Flow over a Flat Wall, Bull. Univ. of Osaka Prefecture, Ser. A, Vol. 22, No. 2 (1973), pp. 91-99.
- 14) SONE, Y. and AOKI, K.: Thermal Force and Drag on a Volatile Particle in a Slightly Rarefied Gas, in Rarefied Gas Dynamics (R. CAMPARGUE, ed.), Commissariat a l'Energie Atomique, Paris (1979), pp. 1207-1218.
- 15) 曾根良夫, 青木一生: エアゾール粒子に働く熱流力, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第261号 (1975), pp. 575-579; Heat Transfer Japanese Research, Vol.

- 6, No. 2 (1977), pp. 62-68.
- 16) SONE, Y.: Thermal Creep in Rarefied Gas, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 21 (1966), pp. 1836-1837.
- 17) SONE, Y.: Flow Induced by Thermal Stress in Rarefied Gas, *Phys. Fluids*, Vol. 15, No. 8 (1972), pp. 1418-1424.
- 18) BAKANOV, S.P. and DERYAGIN, B.V.: On the Theory of Thermal Precipitation of Highly Disperse Aerosol Systems, *Kolloidn. Zh.*, Vol. 21, No. 4 (1959), pp. 377-384.
- 19) WALDMANN, L.: On the Motion of Spherical Particles in Nonhomogeneous Gases, in *Rarefied Gas Dynamics* (L. TALBOT, ed.), Academic Press, New York (1961), pp. 323-344.
- 20) 曾根良夫, 青木一生, 大西善元: 希薄気体の熱応力流と境界条件, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第261号 (1975), pp. 568-575; *Heat Transfer Japanese Research*, Vol. 6, No. 4 (1977), pp. 1-12.
- 21) EPSTEIN, P.S.: Zur Theorie des Radiometers, *Z. Physik*, Vol. 54 (1929), pp. 537-563.
- 22) ROSENBLATT, P. and LAMER, V.K.: Motion of a Particle in a Temperature Gradient; Thermal Repulsion as a Radiometer Phenomenon, *Physical Review*, Vol. 70, No. 5 (1946), pp. 385-395.
- 23) SCHADT, C.F. and CADLE, R.D.: Thermal Force on Aerosol Particles, *J. Phys. Chem.*, Vol. 65 (1961), pp. 1689-1694.
- 24) WALDMANN, L. and SCHMITT, K.H.: Thermophoresis and Diffusiophoresis of Aerosols, in *Aerosol Science* (C.N. DAVIES, ed.), Academic Press, New York (1966), pp. 137-162.
- 25) BROCK, J.R.: On the Theory of Thermal Forces Acting on Aerosol Particles, *J. Colloid Sci.*, Vol. 17 (1962), pp. 768-780.
- 26) DERJAGUIN, B.V. and YALAMOV, YU.: Theory of Thermophoresis of Large Aerosol Particles, *J. Colloid Sci.*, Vol. 20 (1965), pp. 555-570.
- 27) DWYER, H.A.: Thirteen-Moment Theory of the Thermal Force on a Spherical Particle, *Phys. Fluids*, Vol. 10, No. 5 (1967), pp. 976-984.
- 28) GOMELOV, S.L.: Thermophoresis and Photophoresis in a Rarefied Gas, *Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, No. 5 (1976), pp. 178-182; *Fluid Dynamics*, Vol. 11 (1977), pp. 800-803.
- 29) VESTNER, H. and WALDMANN, L.: Generalized Hydrodynamics of Thermal Transpiration, Thermal Force and Friction Force, *Physica Ser. A*, Vol. 86 (1977), pp. 303-336.
- 30) BAKANOV, S.P., DERYAGIN, B.V. and ROLDUGIN, V.I.: Thermophoresis in Gases, *Usp. Fiz. Nauk*, Vol. 129 (1979), pp. 255-278; *Sov. Phys. Usp.*, Vol. 22, No. 10 (1979), pp. 813-825.
- 31) SONE, Y. and AOKI, K.: Negative Thermophoresis—Thermal Stress Slip Flow around a Spherical Particle in a Rarefied Gas, in *Rarefied Gas Dynamics, Progress in Astronaut. Aeronaut.* Vol. 74 (S.S. FISHER, ed.), AIAA, New York (1981), pp. 489-503.
- 32) JACOBSEN, S. and BROCK, J.R.: The Thermal Force on Spherical Sodium Chloride Aerosols, *J. Colloid Sci.*, Vol. 20 (1965), pp. 544-554.
- 33) DERJAGUIN, B.V., STOROZHKOVA, A.I. and RABINOVICH, Ya. I.: Experimental Verification of the Theory of Thermophoresis of Aerosol Particles, *J. Colloid Interface Sci.*, Vol. 31 (1966), pp. 35-58.
- 34) TONG, N.T.: Experiments on Photophoresis and Thermophoresis, *J. Colloid Interface Sci.*, Vol. 51, No. 1 (1975), pp. 143-151.
- 35) PRODI, F., SANTACHIARA, G. and PRODI, V.: Measurements of Thermophoretic Velocities of Aerosol Particles in the Transition Region, *J. Aerosol Sci.*, Vol. 10 (1979), pp. 421-425.
- 36) 曾根良夫, 青木一生: フォトフォレシス, 日本航空宇宙学会誌, 第24巻, 第273号 (1976), pp. 513-517.
- 37) 青木一生, 曾根良夫: 揮発性粒子のフォトフォレシス, 第11回流体力学講演会講演集 (1979), pp. 46-49.

—特 集—

Suspension 力学*

——平均応力について——

大 西 善 元**

1. ま え が き

無数の微粒子が浮遊しているような流体を一般に suspension と呼んでいる。厳密には、多相系媒質においてそのひとつの相を基質 (matrix) とし、それに他の相が粒子の形で分散しているような媒質のことを

いう。一般に基質は流体であってもまた固体であってもよい。しかしそのうちでも低分子からなる流体を基質とし、それに別の相が $1\mu\text{m}$ から $100\mu\text{m}$ 程度の微粒子の形で乱雑に散らばっているような二相分散系はとくに重要と思われる。ここでは、このような系を考えることにしたい。低分子からなる流体は、水とか空気をその代表例として、一般に NEWTON 流体とみなしてよい (応力は歪み速度に比例し、その比例係数は物質定数として一義的に与えられる)。また粒子の乱雑な分布状態は粒子の (相対) 位置、方向性などに関

* 昭和56年4月7日, 日本航空宇宙学会第12期年会講演会にて講演。昭和56年9月10日原稿受理 Mechanics of Suspension

** 大阪府立大学工学部機械工学科 Yoshimoto ONISHI