- 6, No. 2 (1977), pp. 62-68.
- 16) SONE, Y.: Thermal Creep in Rarefied Gas, J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 21 (1966), pp. 1836-1837.
- 17) SONE, Y.: Flow Induced by Thermal Stress in Rarefied Gas, Phys. Fluids, Vol. 15, No. 8 (1972), pp. 1418-1424.
- 18) BAKANOV, S.P. and DERYAGIN, B.V.: On the Theory of Thermal Precipitation of Highly Disperse Aerosol Systems, Kolloidn. Zh., Vol. 21, No. 4 (1959), pp. 377-384.
- 19) WALDMANN, L.: On the Motion of Spherical Particles in Nonhomogeneous Gases, in Rarefied Gas Dynamics (L. TALBOT, ed.), Academic Press, New York (1961), pp. 323-344.
- 20) 曾根良夫, 青木一生, 大西善元: 希薄気体の熱応力流と境界条件, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第261号 (1975), pp. 568-575; Heat Transfer Japanese Research, Vol. 6, No. 4 (1977), pp. 1-12.
- 21) EPSTEIN, P.S.: Zur Theorie des Radiometers, Z. Physik, Vol. 54 (1929), pp. 537-563.
- 22) ROSENBLATT, P. and LAMER, V.K.: Motion of a Particle in a Temperature Gradient; Thermal Repulsion as a Radiometer Phenomenon, Physical Review, Vol. 70, No. 5 (1946), pp. 385-395.
- 23) SCHADT, C.F. and CADLE, R.D.: Thermal Force on Aerosol Particles, J. Phys. Chem., Vol. 65 (1961), pp. 1689-1694.
- 24) WALDMANN, L. and SCHMITT, K.H.: Thermophoresis and Diffusiophoresis of Aerosols, in Aerosol Science (C.N. DAVIES, ed.), Academic Press, New York (1966), pp. 137-162.
- 25) BROCK, J.R.: On the Theory of Thermal Forces Acting on Aerosol Particles, J. Colloid Sci., Vol. 17 (1962), pp. 768-780.
- 26) DERJAGUIN, B.V. and YALAMOV, YU.: Theory of Thermophoresis of Large Aerosol Particles, J. Colloid Sci., Vol. 20 (1965), pp. 555-570.
- 27) DWYER, H.A.: Thirteen-Moment Theory of the Thermal Force on a Spherical Particle, Phys. Fluids, Vol. 10, No. 5 (1967), pp. 976-984.
- 28) GORBELOV, S.L.: Thermophoresis and Photophoresis in a Rarefied Gas, Mekhanika Zhidkosti i Gaza, No. 5 (1976), pp. 178-182; Fluid Dynamics, Vol. 11 (1977), pp. 800-803.
- 29) VESTNER, H. and WALDMANN, L.: Generalized Hydrodynamics of Thermal Transpiration, Thermal Force and Friction Force, Physica Ser. A, Vol. 86 (1977), pp. 303-336.
- 30) BAKANOV, S.P., DERYAGIN, B.V. and ROLDUGIN, V.I.: Thermophoresis in Gases, Usp. Fiz. Nauk, Vol. 129 (1979), pp. 255-278; Sov. Phys. Usp., Vol. 22, No. 10 (1979), pp. 813-825.
- 31) SONE, Y. and AOKI, K.: Negative Thermophoresis—Thermal Stress Slip Flow around a Spherical Particle in a Rarefied Gas, in Rarefied Gas Dynamics, Progress in Astronaut. Aeronaut. Vol. 74 (S.S. FISHER, ed.), AIAA, New York (1981), pp. 489-503.
- 32) JACOBSEN, S. and BROCK, J.R.: The Thermal Force on Spherical Sodium Chloride Aerosols, J. Colloid Sci., Vol. 20 (1965), pp. 544-554.
- 33) DERJAGUIN, B.V., STOROZHKOVA, A.I. and RABINOVICH, Ya. I.: Experimental Verification of the Theory of Thermophoresis of Aerosol Particles, J. Colloid Interface Sci., Vol. 31 (1966), pp. 35-58.
- 34) TONG, N.T.: Experiments on Photophoresis and Thermophoresis, J. Colloid Interface Sci., Vol. 51, No. 1 (1975), pp. 143-151.
- 35) PRODI, F., SANTACHIARA, G. and PRODI, V.: Measurements of Thermophoretic Velocities of Aerosol Particles in the Transition Region, J. Aerosol Sci., Vol. 10 (1979), pp. 421-425.
- 36) 曾根良夫, 青木一生: フォトフォレシス, 日本航空宇宙学会誌, 第24巻, 第273号 (1976), pp. 513-517.
- 37) 青木一生, 曾根良夫: 揮発性粒子のフォトフォレシス, 第11回流体力学講演会講演集 (1979), pp. 46-49.

—特 集—

Suspension 力学*

——平均応力について——

大 西 善 元**

1. ま え が き

無数の微粒子が浮遊しているような流体を一般に suspension と呼んでいる。厳密には、多相系媒質においてそのひとつの相を基質 (matrix) とし、それに他の相が粒子の形で分散しているような媒質のことを

いう。一般に基質は流体であってもまた固体であってもよい。しかしそのうちでも低分子からなる流体を基質とし、それに別の相が $1\mu\text{m}$ から $100\mu\text{m}$ 程度の微粒子の形で乱雑に散らばっているような二相分散系はとくに重要と思われる。ここでは、このような系を考えることにしたい。低分子からなる流体は、水とか空気をその代表例として、一般に NEWTON 流体とみなしてよい (応力は歪み速度に比例し、その比例係数は物質定数として一義的に与えられる)。また粒子の乱雑な分布状態は粒子の (相対) 位置、方向性などに関

* 昭和56年4月7日, 日本航空宇宙学会第12期年会講演会にて講演。昭和56年9月10日原稿受理 Mechanics of Suspension

** 大阪府立大学工学部機械工学科 Yoshimoto ONISHI

する確率の問題を生ぜしめる。しかしここでは、その確率密度関数の議論はしない。ただつけ加えておきたいことは、この関数を直観的に与えることができる場合も少なくないということである。

suspension 力学の目的は、suspension 力学系のもつ統計的平均の意味での性質または特性を調べることである。そのおもなものは、粒子のもつ平均的物理量とか系の流動的性質 (rheological properties) であろう。前者については、流体中を多数の粒子が重力のもとで沈降しているような場合に粒子がもつ平均沈降速度などがその代表的なものにあたる。後者は、外力などの外的要因によって系がある運動状態に置かれた場合、つまり平衡状態からずらされた場合に、系に必然的に生じる種々の輸送過程を特性づける parameter (たとえば、見掛けの輸送係数など) を指す。力学的平衡からのずれがある場合に、内部に生じる応力の振舞いを記述する parameter は系を特性づける性質のひとつとしてとくに重要である。

このような suspension の性質または特性は、さまざまな分野で利用され、工学的にはもちろんのこと、医学、生物学、生理学、気象学などにおいてもその応用は広い^{1),2)}。化学繊維、食品等は、それらの製造過程に、また鉱山・油田の試掘、岩石の掘削、印刷、ペンキ、顔料等はそれらの実際的な作業および使用に上述の性質を利用したほんの一部の例にすぎない。非常な困難を伴うことが多い微粒子の質量、大きさ、形などの直接測定のかわりに、流動的性質の測定から間接的にそれらを決定するというようなことも珍しくない。

このように suspension の性質は広く利用されているが、その性質についての理解はまだまだ十分ではなく、断片的にしか解明されていない部分が多い。物理的な理解を深めるために、きちんとした解析による知識が少しでも多く望まれるところである。

ここでは、これまでに得られた研究結果を suspension の流動特性、とくに偏り応力 (deviatoric stress) の振舞いだけに限って少し述べてみたい。偏り応力は運動量の輸送現象に関連して最も重要な量である。系に課せられた運動に伴って生じる応力の振舞いを、系の微視的構造の力学的考察から求めようとする研究は、EINSTEIN^{3),4)} にはじまって以来多くの人々⁵⁾⁻⁷⁾ によって研究が進められ、現在その方法も確立しつつある。次節では suspension の平均応力について述べる。

2. suspension の平均応力

suspension の平均応力を調べるにあたって、次のような条件をみたす系を考えることにする。

- 1) suspension 全体としての運動の変化の特性長さ L^* は、粒子の大きさ a (半径, 曲率半径など) とか粒子間の平均距離 D に比べてはるかに大きい。
- 2) suspension は局所的には、統計的に均質。これはある体積 V 、つまりそのなかに多くの粒子を含み、かつその代表長 $L_v (\sim V^{1/3})$ が条件 a or $D \ll L_v < L^*$ をみたすような領域が存在することを意味する。
- 3) 基質の流体は粘性係数 μ をもつ非圧縮 NEWTON 流体。
- 4) 粒子による流体の disturbance 運動の REYNOLDS 数は小さく、流体運動は STOKES 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \quad (2.1)$$
 で支配される (以後、和の規約を用いる)。ここで x_i は直交座標系、 u_i と p はそれぞれ局所的な流速ベクトルと圧力である。
- 5) 粒子に作用する外力は存在しない。しかし (外部からの) モーメントは存在してもよい。
- 6) 粒子のもつ内部構造による運動に対しては、慣性力の影響は無視。とくに、流体粒子の場合は非圧縮 NEWTON 流体。
- 7) 粒子と流体の境界面で、速度および応力は連続。

さて、これまで使ってきた suspension の応力とか速度といったような量は、何らかの意味における対応する局所的諸量の平均と考えなければならない。普通よく用いられている平均操作に、suspension のある体積にわたっての体積分によるものがある⁵⁾⁻⁷⁾。ここでもその定義を採用することにする。つまり

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{V} \int_V Q(x_i) dV \quad (2.2)$$

ここで $\langle Q \rangle$ は対応する局所量 Q の平均、 x_i は流体又は粒子内の任意の点を表わす。 V としては $\langle Q \rangle$ が意味をもつ程度に多くの粒子を含み、かつその代表長程度では $\langle Q \rangle$ はほとんど変化しないとみなせるような体積をとる。これの存在は条件 2) で保証されている。 $\langle Q \rangle$ が意味をもつとみなせる“ゆらぎ”の許容量を 1~2% とすれば、suspension 1 mm³ 中には、半径 10 μ m の球状粒子の場合、約 2,000 個あれば十分である。このとき粒子の平均間隔は約 75 μ m である。

以上の準備のもとに、平均応力、とくに平均偏り応力と局所的諸量との関係を調べよう⁷⁾。 σ_{ij} を局所応力、 δ_{ij} を KRONECKER のデルタとすると、(2.2) より

$$\left\langle \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{V} \int_V \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) dV \\
&= \frac{1}{V} \int_{V-\Sigma V_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) dV \\
&\quad + \frac{1}{V} \int_{V_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) dV \quad (2.3)
\end{aligned}$$

V_0 はそのなかに1個の粒子のみを含む任意の体積、 Σ は V 中のすべての粒子にわたっての総和を表わす。 $V-\Sigma V_0$ は完全に流体のみの部分であるから、右辺第1項の積分は NEWTON 流体の性質 $[\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)]$ および粒子表面での速度連続条件 (条件7) を考慮して次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{V} \int_{V-\Sigma V_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) dV \\
&= \frac{1}{V} \int_{V-\Sigma V_0} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV \\
&= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{V} \int_{V_0} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV \\
&= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{V} \int_{A_0} \mu (u_i n_j + u_j n_i) dA \quad (2.4)
\end{aligned}$$

ここで A_0 は体積 V_0 の表面積で、 n_i はその面での外向き単位法線ベクトルである。

式(2.3)の右辺第2項における積分領域 V_0 は一般に粒子とそのまわりの流体部分を含む。流体部分ではもちろんのこと、粒子内部でも応力の発散は常にゼロという条件 (条件4~6) および流体と粒子の境界面上で応力は連続という条件 (条件7) を使って、発散定理から体積積分を面積積分に変換する。その際、関係式 $\sigma_{ij} = \partial(\sigma_{ik} x_j) / \partial x_k$ [$\because \partial \sigma_{ik} / \partial x_k = 0$] を考慮すれば、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{V} \int_{V_0} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) dV \\
&= \frac{1}{V} \int_{A_0} \left(\sigma_{ik} x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} x_i \right) n_k dA \quad (2.5)
\end{aligned}$$

この式は表面張力によって流体と粒子の境界面で応力成分のひとつが非常に大きな値をとるような場合にも成り立つ (詳細は文献7)。

式(2.4)と(2.5)を(2.3)に代入すれば、求める平均偏り応力として次式が得られる。

$$\left\langle \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right\rangle = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \Sigma_{ij}^{(p)} \quad (2.6)$$

ここで $\Sigma_{ij}^{(p)}$ は particle stress と呼ばれるもので、局所的諸量によって次のように表わされる。

$$\Sigma_{ij}^{(p)} = \frac{1}{V} \int_{A_0} \left\{ \left(\sigma_{ik} x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} x_i \right) n_k \right.$$

$$\left. - \mu (u_i n_j + u_j n_i) \right\} dA \quad (2.7)$$

さて、外部から粒子にモーメント L_i を作用させると、まわりの流体に

$$L_i = \varepsilon_{ijk} \int_{A_0} \sigma_{jl} x_k n_l dA \quad (2.8)$$

なる関係式を満たすような応力場が生じる。ここで ε_{ijk} は交代テンソルである。これはまた(2.6)および(2.7)より

$$\varepsilon_{ijk} \left\langle \sigma_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} \sigma_{ll} \right\rangle = \varepsilon_{ijk} \Sigma_{ij}^{(p)} = \frac{1}{V} \Sigma L_i \quad (2.9)$$

上式から、粒子に働く外部モーメントは、平均応力および particle stress の反対称部分の生成に関与していることがわかる。

式(2.7)の右辺を、対称部分と反対称部分に分けると、

$$\Sigma_{ij}^{(p)} = \frac{1}{V} \Sigma S_{ij} + \frac{1}{V} \Sigma \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L_k \quad (2.10)$$

ここで S_{ij} は対称テンソルで、次式で定義される。

$$\begin{aligned}
S_{ij} = \int_{A_0} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sigma_{ik} x_j + \sigma_{jk} x_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} x_l \right) n_k \right. \\
\left. - \mu (u_i n_j + u_j n_i) \right\} dA \quad (2.11)
\end{aligned}$$

S_{ij} はおのおのの粒子に関連した量で、平均応力へ最も重要な寄与をする。上の結果は、外部から力を受けていないような粒子であれば、その数密度、大きさ、形といったようなものに関係なく成り立つ。

ここで注意事項を少し述べておく。これまでの議論は、流体の振舞いは完全に連続体力学で記述されるという前提に立ってきた。しかし、流体が気体である場合には、その振舞いが希薄化とか相変化の影響のために連続体的記述では不十分な場合が起こる。このような状況においても、ここで行った平均応力についての結果は、次の条件のもとで導かれた (相変化を含む弱希薄気体の) 漸近理論⁸⁾ を利用することにより、そのままの形で成り立つことがいえる⁹⁾。ただし流体と粒子の温度は連続体の極限においては一樣で等しくなければならない。

i) 気体の振舞いは BOLTZMANN-KROOK-WELANDER 方程式で記述される。

ii) 気体分子が粒子 (凝縮相) と相互作用の結果得る速度分布は、粒子の速度および温度と、その温度に対応する飽和蒸気圧で特性づけられる MAXWELL 分布をもつ。

iii) 考えている系の完全静止平衡からの“ずれ”は非常に小さく、支配方程式および境界条件は線形化できる (気体論においては、系の平衡からの

“ずれ”の目安を与えるのは MACH 数 M である。線形化は MACH 数の 2 乗以上の影響を完全に無視することに等しい。

- iv) 気体分子の平均自由行路 l は粒子の大きさ a に比べて小さい。つまり KNUDSEN 数 $Kn=l/a \ll 1$ 。しかし、任意の正の整数 N に対して $Kn^N \gg M^2$ はみたしているものとする。(REYNOLDS 数 Re は M, Kn と $Re \sim M/Kn$ の関係で結びついている。したがってこの場合、 $Re \ll 1$)

このような場合、 A_0 としては粒子とその近傍の KNUDSEN 層を完全に包むような面を選ぶ。もちろん、 u_i, σ_{ik} は気体論的方程式から求められなければならない。しかし、さきの漸近理論は小さな KNUDSEN 数で特性づけられるような種々の問題を、気体論的レベルでの取り扱いから、通常の流体力学的レベルでの取り扱いに帰着させたものであるから、 u_i および σ_{ik} を求めるために、いちいち気体論的方程式に立ち返らなくとも、この理論が示すように一般化された“すべり”境界条件のもとで、STOKES 型の方程式を解けばよい。

以上、平均応力が局所応力および速度とどのように結びついているかをみてきた。残る問題は、STOKES 方程式系からこれらの局所的な場の量を実際に求めることである。

3. dilute suspension の理論

suspension 力学においては、後でわかるように、体積分率 ϕ (単位体積中の粒子全体が占める体積割合) が重要な役割を果たす。 ϕ が小さくなってくると、粒子間の平均距離は、粒子の平均の大きさを a として、 $a\phi^{-1/3}$ に比例して大きくなる。このとき、粒子間の相互作用を思い切って無視すれば、(2.11) 式の S_{ij} はただ 1 個の粒子が存在しているとしたときの流れ場で完全に求められる。粒子のまわりの流れ場としては、無限遠で一樣な速度勾配をもつ流体中にひとつの粒子が置かれている場合に生じる流れ場をとればよい。系に課せられた運動に伴って生じる系の (巨視的) 体積要素の運動は、ここでは重要でない並進を除けば、回転と純粹ずれ運動を与える平均速度勾配 $\langle \partial u_i / \partial x_j \rangle$ をもつ。したがって、上述の“無限遠で一樣な速度勾配”はこの平均速度勾配の意味にとらなければならない。

結局、 $\phi \rightarrow 0$ なる場合においては、STOKES 方程式 (2.1) を粒子表面での境界条件 (すべりまたはすべりなし条件等) と粒子から遠く離れた点で与えられる次の条件

$$u_i \rightarrow E_{ij}x_j - \varepsilon_{ijk}x_j\Omega_k, \quad p \rightarrow p_0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

のもとで解けばよいことになる。ここで $r = |x_i|$, p_0

は無限遠での圧力で一定、 E_{ij} は純粹ずれ運動を特性づける一定な歪み速度テンソルで非圧縮性の条件より $E_{ii}=0$ 、そして Ω_i は一定な角速度ベクトルである。 $E_{ij} - \varepsilon_{ijk}\Omega_k$ は suspension の平均速度勾配 $\langle \partial u_i / \partial x_j \rangle$ を対称部分と反対称部分に分解したものである。

さて、もう少し一般的に議論を進めるために、次のような disturbance 速度 u_i' および圧力 p' を導入しよう。

$$u_i = E_{ij}x_j - \varepsilon_{ijk}x_j\Omega_k + u_i', \quad p = p_0 + p' \quad (3.2)$$

このような u_i', p' は無限遠でゼロになる関数で、しかも u_i, p と同様、STOKES 方程式をみたす。つまり

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} \quad (3.3)$$

そして、 $r \rightarrow \infty$ で

$$u_i' \rightarrow 0, \quad p' \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

粒子から十分遠く離れた点での disturbance 運動の漸近的振舞いはよく調べられており、次のような形に書くことができる^{7), 10)}。

$$\left. \begin{aligned} \frac{p'}{\mu} &= -D_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) - D_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \\ u_i' &= \frac{1}{2} D_j \left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} D_{jk} \left[-\frac{3x_i x_j x_k}{r^5} + \frac{x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij}}{r^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ここで $D_j, D_{jk}, \dots$ は粒子表面での境界条件から決まるべき係数である。粒子をかこむ任意の面を通しての流量がゼロという条件より $D_{ii}=0$ 。(3.5) 式の右辺第 1 項は Stokeslet に、第 2 項は force doublet (di-Stokeslet) に対応し、流体が粒子に及ぼす力を F_i 、モーメントを M_i とすれば

$$F_i = -4\pi\mu D_i, \quad M_i = -4\pi\mu \varepsilon_{ijk} D_{jk} \quad (3.6)$$

となることはいうまでもない。ここでは粒子にはこの F_i を支える外力はない場合を考えているから、 $D_i \equiv 0$ 、また外部からのモーメント L_i は M_i と絶対値等しく、符号反対である ($L_i = -M_i$)。

S_{ij} に対する (2.11) の積分面 A_0 は 1 個の粒子だけを含んでさえいれば任意の大きさでよいから、この S_{ij} も (3.5) およびそれから導かれる応力の漸近解を使って求められ、次のようになる。

$$S_{ij} = 4\pi\mu \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{ji}) \quad (3.7)$$

以上のことから、流れ場の force doublet の強さに相当する D_{ij} の対称部分が S_{ij} を与え、反対称部分は L_i に関係していることがわかる。したがって、dilute suspension において平均応力を求める問題は、1 個の粒子による流れ場の force doublet の強さ (と

くにその対称部分)を求めることに帰着されたわけである。(3.7)および(2.11)式の S_{ij} は stresslet の強さと呼ばれているものである。次の節において、この理論の応用を扱う。

4. dilute suspension 理論の応用

ここで考える粒子は、かんたんのため、自由粒子(外部からの力、モーメントはなし)であるとし、さらに suspension はとくに指定しなければすべて歪み速度テンソル E_{ij} (ただし $E_{ii}=0$) で特性づけられる純粋な運動のもとに置かれているものとする。

4.1 球状粒子からなる suspension^{11), 12)} 粒子は粘性係数 μ' をもつ流体粒子で、大きさはすべて同じ(半径 a) とする。粒子が常に球形を保つことができる状況は、たとえば表面張力が流れによる“変形力”より優っているような場合にみられる。表面張力を γ 、歪み速度テンソル E_{ij} の代表的成分を E (流れの強さ) とすれば、 $\gamma \gg (\mu a E)$ であればよい。

粒子の中心に座標原点をとり $r=|x_i|$ とすれば、速度分布 u_i および圧力 p は

$$u_i = E_{ij}x_j + E_{kj}x_j \left\{ -\delta_{ik}\beta \frac{a^5}{r^5} - \frac{x_i x_k}{r^2} \left(\alpha \frac{a^3}{r^3} - \frac{5}{2} \beta \frac{a^5}{r^5} \right) \right\} \quad (r \geq a)$$

$$p = p_0 - 2\alpha a^3 \mu E_{ik} \frac{x_i x_k}{r^5} \quad (r \geq a)$$

となる。粒子内部 ($r \leq a$) での分布は省略する。ここで α と β は次のように与えられる。

$$\alpha = \frac{\mu + \frac{5}{2}\mu'}{\mu + \mu'}, \quad \beta = \frac{\mu'}{\mu + \mu'}$$

分布 $u_i - E_{ij}x_j$ または $p - p_0$ の $r \rightarrow \infty$ での振舞いを(3.5)と比較することにより、いまの流れの force doublet の強さ D_{ij} は $D_{ij} = (2/3)\alpha a^3 E_{ij}$ となることからわかる。したがって、(3.7)から stresslet の強さ S_{ij} が、さらに(2.10)より particle stress $\Sigma_{ij}^{(p)}$ がそれぞれ次のように求まる。

$$S_{ij} = \frac{4}{3}\pi a^3 2\alpha \mu E_{ij}, \quad \Sigma_{ij}^{(p)} = 2\alpha \phi \mu E_{ij}$$

ここで ϕ は体積分率で $\phi = (4/3)\pi a^3 n$ 、 n は粒子の数密度である。

式(2.6)より、平均偏り応力は

$$\left\langle \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ii} \right\rangle = 2\mu(1 + \alpha\phi) E_{ij}$$

となり、応力の振舞いに関する限りにおいては、この suspension は effective viscosity $\mu^* = \mu(1 + \alpha\phi)$ をもつひとつの NEWTON 流体とみなしてよい。とくに、粒子

が剛体の場合は ($\mu \ll \mu'$)、EINSTEIN^{3), 4)} によってはじめに求められ $\alpha = 5/2$ 、また、粒子が液体中に分散している気泡のような場合には ($\mu \gg \mu'$)、 $\alpha = 1$ となる。

4.2 球状凝縮相粒子からなる suspension⁹⁾ suspension は一様な温度 T_0 に保たれているとし、粒子はすべて同じ大きさ(半径 a)で、内部構造はないとする。凝縮相粒子は必ずしも液体とは限らないが、液体の場合でもその粘性係数 μ' が気体の粘性係数 μ より十分大きければ内部構造は問題とならない(たとえば、 H_2O の場合、普通の状態で $\mu/\mu' \sim 7 \times 10^{-3}$ 程度)。

さて、相変化を考慮した弱希薄気体の漸近理論⁹⁾を用いて解析を進めれば、速度および圧力場は

$$u_i = E_{ij}x_j \left(1 + \beta \frac{a^5}{r^5} \right) + E_{jk}x_k x_i \left[-\alpha \frac{a^3}{r^3} - \frac{5}{2} \beta \frac{a^5}{r^5} \right]$$

$$p = p_0 - 2\alpha a^3 E_{ik} \frac{x_i x_k}{r^5}$$

$$\alpha = \frac{5}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{C_4^*} + 3k_0 \right) Kn \right]$$

$$\beta = -1 - \frac{5}{2} \sqrt{\pi} k_0 Kn$$

$$C_4^* = -2.132, \quad k_0 = -1.0162$$

ここで p_0 はかんたんのため T_0 に対する飽和蒸気圧力としてある。 Kn は KNUDSEN 数で $Kn = l/a$ 、平均自由行路 l は気体の粘性係数 μ と $l = \mu p_0^{-1} (8RT_0/\pi)^{1/2}$ (R : 気体定数) で結びついている。いまの場合、 Kn は小さいとしてある。 C_4^* を含む項は相変化による寄与を表わし、 k_0 の項は純粋な希薄効果による寄与を表わす。粒子(凝縮相)への質量流は全体としてゼロであり、粒子の大きさは変化しない(ある部分での蒸発量は別の部分での凝縮量で補われる)。

上記の u_i , p の漸近的振舞いを調べることに、この場合の force doublet の強さが求められ、 $D_{ij} = (2/3)\alpha a^3 E_{ij}$ となる。このことよりただちに、

$$S_{ij} = \frac{4}{3}\pi a^3 2\alpha \mu E_{ij}$$

$$\Sigma_{ij}^{(p)} = 2\mu \alpha \phi E_{ij}$$

$$\left\langle \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ii} \right\rangle = 2\mu(1 + \alpha\phi) E_{ij}$$

を得る。suspension は effective viscosity $\mu^* = \mu(1 + \alpha\phi)$ をもつひとつの NEWTON 流体とみてよい。希薄化および相変化の両方の効果がある場合には $\alpha = (5/2)(1 - 3.533Kn)$ 、純粋な希薄効果のみの場合は $\alpha = (5/2)(1 - 2.702Kn)$ である。 $Kn \rightarrow 0$ なる連続体の極限では、 $\alpha = 5/2$ で EINSTEIN の結果に一致することはいうまでもない。

4.3 細長い棒状粒子からなる suspension¹³⁾ かんたんのため、粒子はすべて同じ大きさ、同じ形をもち、その断面は円形で細長い円柱状とする。円形断面の半径を a 、棒の長さを $2h$ とすれば $h \gg a$ である。粒子の中心を座標原点にとり、粒子の中心軸の方向余弦を単位ベクトル λ で表わす。

さて、disturbance 速度 u_i' を考えてみる。粒子表面で $u_i' = -E_{ij}x_j$ 、無限遠で $u_i' \rightarrow 0$ をみたす u_i' は、粒子の中心軸上に Stokeslet を線状に分布させることによって (近似的) に得られる。このとき、線密度分布の符号を変えたものは、流体が粒子の単位長さ当りに及ぼす力に相当する。この線密度分布の近似解は容易に求められ、それから stresslet の強さ S_{ij} がただちに計算される。すなわち、中心軸方向が λ であるような粒子に対して

$$S_{ij} = \frac{4}{3} \pi h^3 \mu E_{ik} \lambda_i \lambda_k \left(\lambda_i \lambda_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right)$$

を得る。粒子の中心軸の方向分布状態はさまざまな要因に支配される。したがって、その議論は確率的考察を必要とする。そこでいま、任意の粒子を考え、その中心軸が λ と $\lambda + d\lambda$ との間にあるような確率を $P(\lambda)d\lambda$ とする。ただし、 $P(\lambda)$ は規格化条件 $\int P(\lambda)d\lambda = 1$ をみたすものとする。この確率分布を使えば、1 個の粒子によって生じる stresslet の強さ S_{ij} は平均として次の値 $\bar{S}_{ij}$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij} &= \int S_{ij}(\lambda) P(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{4}{3} \pi h^3 \mu E_{ik} \int \lambda_i \lambda_k \left(\lambda_i \lambda_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) P(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

をもつ。すると (2.6)、(2.10) から、平均の粒子数密度を n として、

$$\left\langle \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right\rangle = 2\mu E_{ij} + n \bar{S}_{ij}$$

が得られる。

確率分布 $P(\lambda)$ の立ち入った議論はここでの範囲外である。そこでこの確率分布が直観的にわかるような二つの場合について考えてみたい。簡単のため E_{ij} による純粹ずれ運動は軸対称であるとしておく。

i) 粒子の中心軸の方向分布状態が、何らかの方向乱雑化要因 (たとえば、BROWN 運動など) によってまったく乱雑になっている場合

このような場合、中心軸の方向分布は等方的でどの方向も等しい出現確率をもつであろう。したがって、確率分布は $P(\lambda) = 1/4\pi$ としてよい。このとき、suspension は等方的で、effective viscosity

$$\mu^* = \mu \left[1 + \frac{4}{45} \pi h^3 n / \log(h/a) \right]$$

をもつひとつの NEWTON 流体とみなせる。

ii) 方向乱雑化要因がまったくない場合

方向乱雑化が行われなければ粒子の中心軸は流れ (E_{ij}) によって整列化されるであろう。このとき、中心軸は E_{ij} の最も大きな主値に対応する主方向を向くと考えられる。この主方向の単位ベクトルを $\hat{i}$ とすると、確率分布は $P(\lambda) = \delta(\lambda - \hat{i})$ となる。ただし、 δ はデルタ関数である。計算を実行すれば、suspension は

$$\mu^* = \mu \left[1 + \frac{4}{9} \pi h^3 n / \log(h/a) \right]$$

なる effective viscosity をもつことがわかる。

これでわかるように、平均応力あるいは effective viscosity は確率分布 $P(\lambda)$ に依存し、 $P(\lambda)$ はまた、方向乱雑化要因と流れ (E_{ij}) による方向整列化要因に依存する。この例では、流れによる方向整列化が乱雑化要因より強くなってくると、effective viscosity もそれに伴ってわずかではあるが増す。この性質は "strain thickening" といわれる。ここで考えた suspension は一般的には "strain thickening" の性質をもつ非 NEWTON 流体と考えられる。

以上、suspension 力学のほんの一部分をみてきたわけであるが、ここで述べたことの拡張として、粒子間の相互作用 ($O(\phi^2)$ を考慮) をとり入れたり、また粒子の形状変化を考慮した解析も行われつつあることを付言しておく。

参考文献

- 1) TREVENA, D. H.: The Liquid Phase, Wykeham Publications, London (1975).
- 2) HIDE, G. M. and BROCK, J. R.: The Dynamics of Aerocolloidal Systems, Pergamon Press, New York (1970).
- 3) EINSTEIN, A.: A New Determination of Molecular Dimensions, Ann. Phys., Vol. 19 (1906), pp. 289-306.
- 4) EINSTEIN, A.: Correction of My Paper, "A New Determination of Molecular Dimensions," Ann. Phys., Vol. 34 (1911), pp. 591-592.
- 5) LANDAU, L. D. and LIFSHITZ, E. M.: Fluid Mechanics, Pergamon Press, New York (1966), §22.
- 6) GODDARD, J. D. and MILLER, C.: Nonlinear Effects in the Rheology of Dilute Suspensions, J. Fluid Mech., Vol. 28 (1967), pp. 657-673.
- 7) BATCHLOR, G. K.: The Stress System in a Suspension of Force-free Particles, J. Fluid Mech., Vol. 41 (1970), pp. 545-570.
- 8) SONE, Y. and ONISHI, Y.: Kinetic Theory of Evaporation and Condensation—Hydrodynamic Equation and Slip Boundary Condition, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 44 (1978), pp. 1981-1994.
- 9) ONISHI, Y.: The Bulk Stress in a Suspension of Spherical Particles of Condensed Phase in its Slightly Rarefied Vapour Gas, J. Fluid Mech., Vol. 114 (1982), pp. 175-186.
- 10) 今井 功: 流体力学 (前編), 裳華房 (1973), §70.
- 11) TAYLOR, G. I.: The Viscosity of a Fluid Containing Small Drops of Another Fluid, Proc. Roy.

Soc., Vol. A 138 (1932), pp. 41-48.

- 12) BATCHELOR, G. K. and GREEN, J. T.: The Determination of the Bulk Stress in a Suspension of Spherical Particles to Order C^2 , J. Fluid Mech.,

Vol. 56 (1972), pp. 401-427.

- 13) BATCHELOR, G. K.: Slender-body Theory for Particles of Arbitrary Cross-section in Stokes Flow, J. Fluid Mech., Vol. 44 (1970), pp. 419-440.

—特 集—

気泡を含む液体中の衝撃波伝播*

長谷川 達也**・藤原 俊隆**

伊藤 宏幸**

1. はじめに

気泡を含む液体中の衝撃波伝播は多くの研究者によって研究されてきている^{1),2)}が、その一つの目的は、原子炉の冷却系や水ジェット推進機などの中の気泡を含む流れが衝撃を受けた場合の安全上の問題にある。したがってその場合、衝撃波の伝播速度と構造の解明に焦点が当てられている。一方、気泡の挙動に関してはキャビテーション³⁾や気泡を含む固体爆薬の爆発機構に関連して研究がなされてきた。このような爆薬は体積の30~40%の気泡を含んでおり、その中を伝播するデトネーション(爆轟)は、衝撃波で圧縮された気泡が高温高压のホットスポットを形成しそれが反応を誘起して伝播していくといわれている。このホットスポットが形成される機構⁴⁾は、断熱圧縮で生じる高温によるとする説、いったん圧縮された気泡が再膨張する際に生ずる衝撃波によるとする説⁵⁾、そして気泡が非球形状に変形して生ずるマイクロジェットの衝撃作用によるという説が提案されているが、いまのところ明確な結論は得られていない。

このように、気泡を含む液体中の衝撃波伝播やそれに伴う気泡の挙動は、それらが解明されるとさまざまな応用が考えられ、「混相流」の大切な一分野となっている。著者らはおもに爆薬中のホットスポット形成を解明することにねらいを置きながら、実際にははるかに低圧で、気泡を含む液体中を伝播する衝撃波と気泡の変形についての基礎研究を理論と実験で行っている⁶⁾ので、これについて紹介する。

2. 気泡を含む液体中の微小擾乱伝播の理論解析

気泡を均一に含む液体中を伝播するステップ状一次

元圧力波の伝播の様子が、気泡から液体への熱伝達を考慮して解析された。ここで(i)気泡と液体の相対運動、音波の散乱、溶解・凝縮・蒸発等の質量輸送、気泡の変形や振動、表面張力と重力の影響は無視し、(ii)液体は熱容量が大きいために温度が一定で、(iii)気泡中のガスは完全気体で温度は一樣であると仮定すると、流体の質量、運動量、エネルギー方程式を線形化して次の波動方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a_{ad}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\tau_0 \equiv \frac{1 - \beta_0 + \gamma \beta_0}{\gamma} \frac{d_0^2}{Nu \alpha_g} \quad (2)$$

$$a_{ad}^2 \equiv \frac{(1 - \beta_0 + \gamma \beta_0) \rho_{g0}}{\rho_0 \left(\frac{\beta_0}{R^* T_{g0}} + \frac{\rho_{g0}}{\rho_{l0}} \frac{1 - \beta_0}{a_l^2} \right)} \quad (3)$$

$$a_e^2 \equiv \frac{\rho_{g0}}{\rho_0 \left(\frac{\beta_0}{R^* T_{g0}} + \frac{\rho_{g0}}{\rho_{l0}} \frac{1 - \beta_0}{a_l^2} \right)} \quad (4)$$

ここで τ_0 は熱輸送の特性時間、 a_{ad} と a_e は断熱および等温音速、 γ は気体の比熱比、 α_g は気体の熱拡散係数、 β_0 は初期ボイド率、 d_0 は気泡の初期直径、 Nu はヌセルト数 ($Nu \equiv d_0 q / k_g (T_g - T_l)$) で無次元熱伝導率を表わし、 q は気泡表面での熱流束、 ρ_{g0} と ρ_{l0} は気体と液体の初期密度、 $\rho_0 \equiv \beta_0 \rho_{g0} + (1 - \beta_0) \times \rho_{l0}$ 、 R^* は気体定数、 T_{g0} は気体の初期温度、 a_l は純粋液体の音速である。

式(1)は化学反応⁷⁾や内部自由度の緩和⁸⁾の起こる気体中での音波の方程式と同じ形をしており、緩和現象の結果として断熱音速と等温音速の二つの音速が現われることに注意して欲しい。この式にステップ状圧力を加えたときの解として漸近解⁹⁾が求められているが、ここでは厳密解を求めるために(1)式から x の正方向へ伝播する波の方程式を導き⁹⁾、

* 昭和56年4月6日、日本航空宇宙学会第12期年会講演会にて講演。昭和56年8月27日原稿受理 Shock Propagation in Liquid with Bubbles

** 名古屋大学工学部航空学科 Tatsuya HASEGAWA, Toshitaka FUJIWARA and Hiroyuki ITOH